Практические и лабораторные работы по дисциплине

Исследование операций

Практическое занятие № 1

Графическое решение задачи линейного программирования

Примеры графического решения ЗЛП приведены в лекциях. Повторите соответствующий материал.

Решите графически следующие задачи.

1. Фирма выпускает платья двух моделей А и В. При этом используется ткань трех видов. На изготовление одного платья модели А требуется 2 м ткани первого вида, 1 м ткани второго вида, 2 м ткани третьего вида. На изготовление одного платья модели В требуется 3 м ткани первого вида, 1 м ткани второго вида, 2 м ткани третьего вида. Запасы ткани первого вида составляют 21 м, второго вида - 10 м, третьего вида - 16 м. Выпуск одного изделия типа А приносит доход 400 д.ед., одного изделия типа В - 300 д.ед.

Составьте план производства, обеспечивающий фирме наибольший доход.

2. При откорме каждое животное должно получить не менее 9 ед. питательного вещества S_1, не менее 8 ед. вещества S_2 и не менее 12 ед. вещества S_3. Для составления рациона используют два вида корма. Содержание питательных веществ в 1 кг каждого корма и стоимость корма приведены в таблице:

Питательное вещество	Содержание питательных веществ в 1 кг корма (ед.)	
	Корм 1	Корм 2
S_1	3	1
S_2	1	2
S_3	1	6
Стоимость 1 кг корма (д.ед.)	4	6

Составьте дневной рацион нужной питательности, минимизировав денежные затраты на этот рацион.

3. Решите графически задачу линейного программирования. Найдите максимальное и минимальное значение целевой функции.

$$F = x_1 + x_2 \to \max (\min)$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 8, \\ x_1 + 2x_2 \geq 6, \\ x_1 - x_2 \leq 3, \end{cases}$$

где $x_1, x_2 \geq 0$.

4. Сведите приведенную ниже задачу к задаче, содержащей 2 переменных, и решите её графически (см. пример в лекциях).

$$F = 7x_1 + 5x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 19, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 13, \\ x_2 + x_5 = 5, \\ x_1 + x_6 = 6, \end{cases}$$

$$\text{где } x_j \geq 0,\ j = \overline{1;6}.$$

Отчет о работе – подробное решение всех задач в тетради.

Практическое занятие № 2

Симплексный метод решения задачи линейного программирования

Алгоритм применения симплексного метода рассмотрен в лекциях. Повторите соответствующий материал. Можете воспользоваться ресурсами интернета.

Решите симплексным методом следующие задачи.

1. $F = 3x_1 + 4x_2 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 + x_2 + x_4 = 3, \\ 2x_1 + x_2 + x_5 = 8, \end{cases}$$

$x_i \geq 0,\ j = \overline{1,5}.$

2. $F = x_1 - x_2 \to \max$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 - 2x_2 + x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + x_5 = 5, \end{cases}$$

$x_i \geq 0,\ j = \overline{1,5}.$

3. Запишите следующую задачу в канонической форме и решите симплексным методом.

$F = 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 18, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 16, \\ x_1 + x_2 \leq 8, \\ x_2 + x_3 \leq 6, \end{cases}$$

$x_i \geq 0,\ j = \overline{1,3}.$

Отчет о работе – подробное решение всех задач в тетради.

Практическое занятие № 3

Транспортная задача

Методы решения транспортной задачи рассмотрены в лекциях. Повторите соответствующий материал. Можете воспользоваться ресурсами интернета.

1. Решите сбалансированную транспортную задачу. В двух пунктах A_1 и A_2 имеется соответственно 180 и 30 единиц товара. Весь товар нужно перевезти в пункты B_1, B_2, B_3 в количестве 90, 50 и 70 единиц соответственно. Матрица тарифов такова: $C = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 7 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$. Спланируйте перевозки так, чтобы их стоимость была минимальной.

2. Решите открытую транспортную задачу. В трех пунктах A_1, A_2 и A_3 имеется соответственно 80, 100 и 50 единиц товара. Товар нужно перевезти в пункты B_1, B_2, B_3, запрашивающие, соответственно, 90, 60 и 60 единиц этого товара. Матрица тарифов такова: $C = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 7 \\ 4 & 6 & 8 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$. Спланируйте перевозки так, чтобы запросы потребителей были удовлетворены в максимальной степени, а стоимость перевозок была минимальной.

3. Решите усложненную транспортную задачу. В трех пунктах A_1, A_2 и A_3 имеется соответственно 80, 100 и 30 единиц товара. Товар нужно перевезти в пункты B_1, B_2, B_3, запрашивающие, соответственно, 90, 70 и 70 единиц этого товара. Матрица тарифов такова: $C = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 7 \\ 4 & 6 & 8 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$. Штрафы за недопоставку единицы товара в пункты B_1, B_2, B_3 равны, соответственно, 1, 0, 2. Спланируйте перевозки так, чтобы запросы потребителей были удовлетворены в максимальной степени, а сумма затрат, включая возможные штрафы, была минимальной.

Отчет о работе – подробное решение всех задач в тетради.

Практическое занятие № 4

Применение транспортной модели при решении оптимизационных задач

Методы решения транспортной задачи рассмотрены в лекциях. Повторите соответствующий материал. Можете воспользоваться ресурсами интернета.

Решите следующие задачи, используя транспортную модель.

1. Одно фермерское хозяйство (A_1) имеет продовольственное зерно двух видов: 3 тыс. тонн – III класса и 4 тыс. тонн - IV класса. Второе фермерское хозяйство (A_2) также имеет зерно двух видов: 5 тыс. тонн – III класса и 2 тыс. тонн - IV класса. Зерно должно быть вывезено на два элеватора: на первый элеватор

(B_1) необходимо поставить 2 тыс. тонн пшеницы III класса, 3 тыс. тонн пшеницы IV класса и остальные 2 тыс. тонн пшеницы любого класса.

Аналогично второй элеватор (B_2) должен получить 8,25 тыс. тонн, из них пшеницы - 1 тыс. тонн III класса и 1,5 тыс. тонн IV класса.

Стоимость перевозки в д.е. 1 тонны зерна составляет: из пункта A_1 в пункты B_1 и B_2 - 1 и 1,5 соответственно; из пункта A_2 в пункты B_1 и B_2 - 2 и 1 д.е. соответственно.

Составить оптимальный план перевозок.

2. Фирма переводит свой головной завод на производство определенного вида изделий, которые будут выпускаться в течение четыре месяцев. Величины спроса в течение этих четырех месяцев составляют 100, 200, 180 и 300 изделий соответственно. В каждый месяц спрос можно удовлетворить за счет:

- запасов изделий, произведенных в прошлом месяце, сохраняющихся для реализации в будущем;
- производства изделий в течение текущего месяца;
- избытка производства изделий в более поздние месяцы в счет невыполненных заказов.

Затраты на одно изделие в каждом месяце составляют 4 д.е. Изделие, произведенное для более поздней реализации, влечет за собой дополнительные издержки на хранение в 0,5 д.е. в месяц. С другой стороны, каждое изделие, выпускаемое в счет невыполненных заказов, облагается штрафом в размере 2 д.е. в месяц.

Объем производства изделий меняется от месяца к месяцу в зависимости от выпуска других изделий. В рассматриваемые четыре месяца предполагается выпуск 50, 180, 280 и 270 изделий соответственно.

Требуется составить план, имеющий минимальную стоимость производства и хранения изделий.

3. Имеются три сорта бумаги в количестве 10, 8 и 5 т, которую можно использовать на издание четырех книг тиражом 8000, 6000, 15000 и 10000 экземпляров. Расход бумаги на одну книгу составляет: 0,6; 0,8; 0,4; 0,5 кг, а себестоимость тиража книги при использовании i-го сорта бумаги задается следующей матрицей (д.е.):

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} 24 & 16 & 32 & 25 \\ 18 & 24 & 24 & 20 \\ 30 & 24 & 16 & 20 \end{pmatrix}.$$

Определить оптимальное распределение бумажных резервов.

Отчет о работе – подробное решение всех задач в тетради.

Практическое занятие № 5

Задачи нелинейного программирования

Примеры решения нелинейных задач математического программирования приведены в лекциях. Повторите соответствующий материал.

Решите следующие нелинейные задачи.

1. **Найти максимальное значение функции**

$$F = x_2 - x_1^2 + 6x_1$$

при условиях

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 24, \\ x_1 + 2x_2 \le 15, \\ 3x_1 + 2x_2 \le 24, \end{cases}$$
$$x_2 \le 4,$$
$$x_{1,}x_2 \ge 0.$$

2. **Найти максимальное и минимальное значение функции**

$$F = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 4)^2$$

при условиях

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \ge 7, \\ 10\,x_1 - x_2 \le 8\,, \\ -18x_1 + 4x_2 \le 12, \end{cases}$$
$$x_{1,}\, x_2 \ge 0.$$

3. **Найти максимальное и минимальное значение функции**

$$F = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 3)^2$$

при условиях

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \ge 6, \\ 3\,x_1 - 2x_2 \le 18\,, \\ -x_1 + 2x_2 \le 8, \end{cases}$$
$$x_{1,}\, x_2 \ge 0.$$

4. **Найти максимальное и минимальное значение функции**

$$F = 3x_1 + 4x_2$$

при условиях

$$\begin{cases} x_1^{\,2} + x_2^{\,2} \le 25, \\ x_{1,}x_2 \ge 4, \end{cases}$$
$$x_{1,}x_2 \ge 0.$$

Отчет о работе – подробное решение всех задач в тетради.

Лабораторная работа №1

Задача линейного программирования: построение математической модели

Рассмотрим несколько примеров построения математической модели.

Пример 1.

Завод производит два вида продукции: велосипеды и мотоциклы. При этом цех по сборке велосипедов имеет мощность 100 тыс. штук в год, цех по сборке мотоциклов – 30 тыс. Механические цеха завода оснащены взаимозаменяемым оборудованием, и одна группа цехов может производить либо детали для 120 тыс. велосипедов, либо детали для 40 тыс. мотоциклов, либо любую комбинацию деталей, ограниченную этими данными. Другая группа механических цехов может выпускать детали либо для 80 тыс. велосипедов, либо для 60 тыс. мотоциклов, либо любую допустимую их комбинацию. В результате реализации каждой тыс. велосипедов завод получает прибыль в 2 тыс. ден. ед., а каждой тыс. мотоциклов – 3 тыс. ден. ед. Найти такое сочетание объемов выпуска продукции, которое дает наибольшую сумму прибыли.

Формализация.

Обозначим через x_1 , x_2, соответственно, количество велосипедов и мотоциклов, выпускаемых заводом в год (в тыс. шт.)

Учитывая возможности сборочных цехов, необходимо потребовать, чтобы

$$x_1 \le 100; \qquad x_2 \le 30, \tag{1}$$

Переходя к анализу возможностей механических цехов, следует учитывать, что при выпуске этих видов продукции должно выполняться условие пропорциональности количества продукции данного вида доле производственной мощности, занятой ее выпуском. Если предусматривается производство 1000 велосипедов, то доля занятой производственной мощности механических цехов первой группы составит 1/120 всей их мощности, принимаемой в данном случае за единицу; на выпуск же x_1 тыс. велосипедов потребуется занять 1/120 x_1 всей мощности.

Аналогично, для производства x_2 тыс. мотоциклов необходимо выделить 1/40 x_2 всей мощности. Так что для реализации плана (x_1, x_2) потребуется предусмотреть (1/120 x_1 + 1/40 x_2)мощности механических цехов первой группы. Но в производственном процессе может быть использована не более чем вся наличная производственная мощность рассматриваемых цехов, следовательно,

$$1/120x_1 + 1/40x_2 \le 1. \tag{2}$$

Точно также получим ограничение по производственной мощности механических цехов второй группы:

$$1/80x_1 + 1/60x_2 \le 1, \tag{3}$$

По смыслу задачи

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \tag{4}$$

Любой план (x_1 , x_2), удовлетворяющий ограничениям (1) - (4) будет допустимым и даст предприятию прибыль (в тыс. ден. ед.)

$$F=2x_1 +3x_2. \tag{5}$$

Соотношения (1) - (5) образуют математическую модель задачи.

Итак, задача состоит в отыскании оптимального плана (x_1^*, x_2^*) производства велосипедов и мотоциклов, при котором достигается максимум линейной функции $F=2x_1+3x_2$ при выполнении ограничений (1)-(4).

$F=2x_1+3x_2 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 \le 100; \\ x_2 \le 30, \\ 1/120x_1 + 1/40x_2 \le 1, \\ 1/80x_1 + 1/60x_2 \le 1, \\ x_1 \ge 0, \ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Пример 2.

Для строительства домов на 100 строительных площадках выбраны 5 типовых проектов. По каждому из проектов известны длительность закладки фундамента и строительства остальной части здания, а также жилая площадь дома (см. таблицу).

Вид работы	Длительность выполнения (дни) для типового проекта				
	I	II	III	IV	V
Закладка фундамента	20	30	35	30	40
Остальные работы	40	20	60	35	25
Жилая площадь, м^2	3000	2000	5000	4000	6000

Параллельно можно вести закладку 10 фундаментов и строительство 15 зданий. Составить план строительства, максимизирующий ввод жилой площади в течение года (300 рабочих дней), при условии, что домов второго типа должно быть построено не менее 10.

Формализация.

Обозначим через x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 количество домов каждого типа, планируемых к строительству. По условию всего должно быть построено 100 домов. В принятых обозначениях этот факт можно выразить так:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 100.$$

Поскольку одновременно можно вести работы по закладке не более 10 фундаментов, то годовой фонд времени по этому виду работ ограничен величиной 300*10 рабочих дней. Для реализации плана $(x_1;...;x_5)$ только на закладку фундаментов потребуется $20x_1 + 30x_2 + 35x_3 + 30x_4 + 40x_5$ рабочих дней. Это количество не может превышать имеющегося фонда времени, предусмотренного для данного вида работ, поэтому должно выполняться неравенство

$$20x_1 + 30x_2 + 35x_3 + 30x_4 + 40x_5 \le 3000.$$

Фонд времени на строительство остальной части зданий составляет 300*15 = 4500 рабочих дней. На этот вид работ фактически будет потрачено $40x_1 + 20x_2 + 60x_3 + 35x_4 + 25x_5$ рабочих дней. Ясно, что это количество не может превышать имеющегося резерва, т.е. $40x_1 + 20x_2 + 65x_3 + 35x_4 + 25x_5 \le 4500.$

И, наконец, учитываем последнее условие задачи: $x_2 \geq 10.$

Остается добавить естественное условие неотрицательности переменных:

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0; x_4 \geq 0; x_5 \geq 0.$$

В принятых обозначениях цель задачи – максимизировать вводимую в течение года жилую площадь – можно записать следующим образом: $f = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 6x_5. \to \max$ (Здесь мы жилую площадь исчисляем в тысячах квадратных метров.) Добавив систему ограничений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 100; \\ 20x_1 + 30x_2 + 35x_3 + 30x_4 + 40x_5 \leq 3000; \\ 40x_1 + 20x_2 + 60x_3 + 35x_4 + 25x_5 \leq 4500; \\ x_2 \geq 10; \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0; x_4 \geq 0; x_5 \geq 0, \end{cases}$$

получим математическую модель данной задачи.

Задания для самостоятельной работы

Для приведенных ниже задач постройте математическую модель.

Задача 1.

При составлении суточного рациона кормления скота можно использовать свежее сено (не более 50 кг) и силос (не более 85 кг). Рацион должен содержать не менее 30 кормовых единиц, 1 кг белка, 100 г кальция и 80г фосфора. В табл. Приведены данные о содержании указанных компонентов в 1 кг каждого корма и себестоимость этих кормов.

Корм	Количество кормовых единиц	Компоненты, г/кг			Себестоимость, ден.ед./кг
		белок	кальций	фосфор	
свежее сено	0,5	40	1,25	2	1,2
силос	0,5	10	2,5	1	0,8

Определить оптимальный рацион исходя из условия минимума его себестоимости.

Задача 2.

Полосы листового проката длиной 200 см необходимо разрезать на заготовки трех типов: А, Б и В длиной соответственно 57, 82 и 101 см для производства 50 изделий. На каждое изделие требуется по 4 заготовки типов А и Б и 5 заготовок типа В. Известны 5 способов раскроя одной полосы. Количество заготовок, нарезаемых из одной полосы при каждом способе раскроя приведено в таблице.

Способ раскроя	Количество заготовок типа		
	А	Б	В
I	3	-	-
II	2	1	-
III	1	-	1
IV	-	2	-
V	-	1	1

Определить, какое количество полос проката нужно разрезать каждым способом для изготовления 50 изделий, чтобы отходы от раскроя были наименьшими.

Задача 3.

Найти оптимальное сочетание посевов пшеницы и кукурузы на участках различного плодородия площадью 100 и 200га. Данные об урожайности приведены в таблице.

Культура	Урожайность (ц/га) участка	
	I	II
Пшеница	20	15
Кукуруза	35	30

По плану должно быть собрано не менее 1500ц пшеницы и 4500ц кукурузы. Цена 1ц пшеницы – 6 ден.ед., кукурузы – 4 ден.ед. Критерий оптимальности – максимум валовой продукции в денежном выражении.

Задача 4.

На звероферме могут выращивать черно-бурых лисиц и песцов. Для обеспечения нормальных условий их выращивания используется 3 вида корма. Количество корма каждого вида, который должны получать лисицы и песцы указаны а таблице, в ней же указаны общее количество корма каждого вида, которое может быть использовано зверофермой и прибылью от реализации одной шкурки лисицы и песца. Определить, сколько лисиц и песцов следует выращивать, чтобы прибыль от реализации их шкурок была максимальной.

Вид корма	Количество единиц корма, который ежедневно должны получать		Общее количество корма
	лисицы	песцы	
1	2	3	180
2	4	1	240
3	6	7	426
Прибыль	16	12	846

Задача 5.

На мебельной фабрике из стандартных листов фанеры необходимо вырезать заготовки трех видов в количестве соответственно равном 24;31;18. Каждый лист фанеры может быть разрезан двумя способами. Количество получаемых заготовок при данном способе раскроя приведены в таблице. В ней же указана величина отходов, которые получаются при данном способе раскроя одного листа фанеры. Определить сколько листов фанеры и по какому способу следует раскроить так, чтобы было получено не менее нужного количества заготовок при минимуме отходов.

x_1–количество листов фанеры при раскрое по способу 1.

x_2–количество листов фанеры при раскрое по способу 2.

Вид заготовок	Количество заготовок (шт.) при раскрое по способу	
	I	II
I	2	6
II	5	4
III	2	3
Величина отходов	12	16

Задача 6.
Для производства двух видов изделий A и B используется 3 вида оборудования. Нормы затрат времени для каждого из типов оборудования на одно изделие данного вида приведены в таблице, в ней же указан общий фонд рабочего времени каждого из типов оборудования, а также прибыль от реализации одного изделия. Найти план выпуска изделий A и B обеспечивающее максимальную прибыль от их реализации.

Вид заготовок	Затраты времени (ч) на обработку изделий		Общий фонд полного рабочего времени, (ч)
	A	B	
I	10	8	168
II	5	10	180
III	6	12	144
Прибыль от реализации одного изделия	14	18	492

Отчет по работе. Составить математическую модель для каждой задачи, записать в тетрадь, показать преподавателю.

Лабораторные работы №2-3

Решение одноиндексных задач линейного программирования с использованием Microsoft Excel

Если в какой-либо системе (экономической, организационной, военной и т.д.) не хватает имеющихся в наличии ресурсов для эффективного выполнения каждой из намеченных работ, то возникают так называемые **распределительные задачи**. Цель решения распределительной задачи – отыскание оптимального распределения ресурсов по работам. Под оптимальностью распределения может пониматься, например, минимизация общих затрат, связаных с выполнением работ, или максимизация получаемого в результате общего дохода.

Для решения таких задач используются методы математического программирования. **Математическое программирование** – это раздел математики, занимающийся разработкой методов отыскания экстремальных значений функции, на аргументы которой наложены ограничения. Слово «программирование» заимствовано из зарубежной литературы, где оно используется в смысле «планирование».

Наиболее простыми и лучше всего изученными среди задач математического программирования являются задачи линейного программирования.

Характерные черты задач ЛП следующие:

1) показатель эффективности L представляет собой линейную функцию, заданную на элементах решения $x_1, x_2, ..., x_n$;

2) ограничительные условия, налагаемые на возможные решения, имеют вид линейных равенств или неравенств.

В общей форме записи модель задачи ЛП имеет вид:

целевая функция (ЦФ)

$$L = c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... + c_n x_n \to max(min);$$

при ограничениях

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le (\ge, =) b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le (\ge, =) b_2, \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le (\ge, =) b_m, \\ x_1, x_2, ..., x_k \ge 0 \; (\mathrm{k} \le \mathrm{n}). \end{cases}$$

Допустимое решение – это совокупность чисел $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$, удовлетворяющих ограничениям задачи.

Оптимальное решение – это план $X^* = (x^*_1, x^*_2, ..., x^*_n)$, при котором ЦФ принимает свое максимальное (минимальное) значение.

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

Для модели ЛП, соответствующей номеру Вашего варианта, найдите оптимальное решение в табличном редакторе MicrosoftExcel и продемонстрируйте его преподавателю.

Инструкция по использованию MicrosoftExcel для решения одноиндексных задач ЛП

Для того чтобы решить задачу ЛП в табличном редакторе MicrosoftExcel, необходимо выполнить следующие действия.

1Ввести условие задачи:

a) ***создать экранную форму для ввода условия задачи***:

- переменных,
- целевой функции (ЦФ),
- ограничений,
- граничных условий;

b) ***ввести исходные данные в экранную форму***:

- коэффициенты ЦФ,
- коэффициенты при переменных в ограничениях,
- правые части ограничений;

c) ***ввести зависимости из математической модели в экранную форму***:

- формулу для расчета ЦФ,
- формулы для расчета значений левых частей ограничений;

d) ***задать ЦФ*** (в окне **«Поиск решения»**):

- целевую ячейку,
- направление оптимизации ЦФ;

e) ***ввести ограничения и граничные условия*** (в окне **«Поиск решения»**):

- ячейки со значениями переменных,
- граничные условия для допустимых значений переменных,
- соотношения между правыми и левыми частями ограничений.

2Решить задачу:

a) ***установить параметры решения задачи*** (в окне **«Поиск решения»***);*

b) ***запустить задачу на решение*** (в окне **«Поиск решения»***)*;

c) ***выбрать формат вывода решения*** (в окне **«Результаты поиска решения»**).

ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ОДНОИНДЕКСНОЙ ЗАДАЧИ ЛП

Рассмотрим пример нахождения решения для следующей одноиндексной задачи ЛП:

$$L(X) = 130{,}5x_1 + 20x_2 + 56x_3 + 87{,}8x_4 \to max;$$

$$\begin{cases} -1{,}8x_1 + 2x_2 + x_3 - 4x_4 = 756, \\ -6x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 \ge 450, \\ 4x_1 - 1{,}5x_2 + 10{,}4x_3 + 13x_4 \le 89, \\ x_j \ge 0;\ j = \overline{1{,}4}. \end{cases} \qquad (1.1)$$

ВВОД ИСХОДНЫХ ДАННЫХ

Создание экранной формы и ввод в нее условия задачи

Экранная форма для ввода условий задачи (1.1) вместе с введенными в нее исходными данными представлена на рис. 1.1.

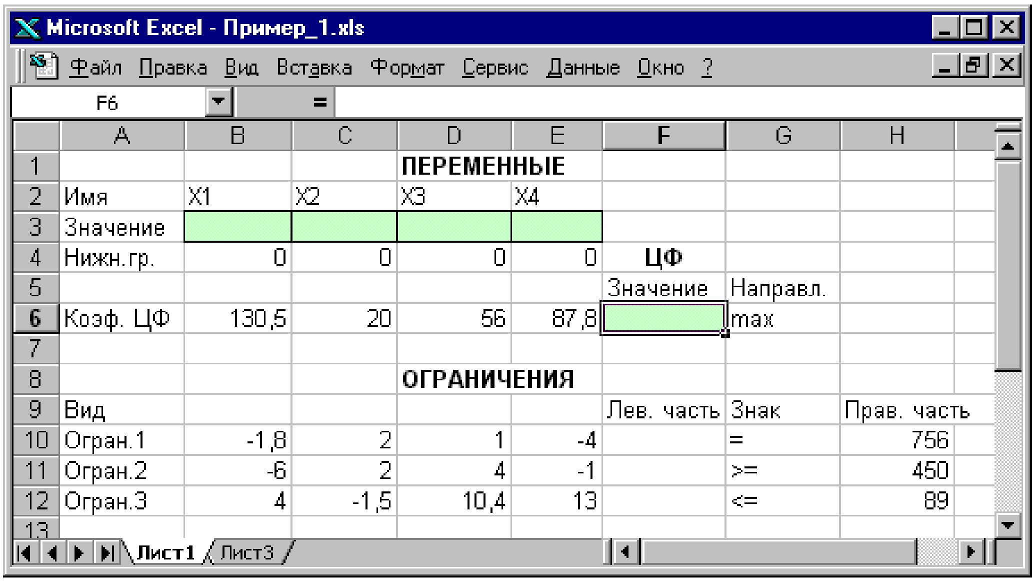


Рис. 1.1. Экранная форма задачи (1.1) (курсор в ячейке F6)

В экранной форме на рис. 1.1 каждой переменной и каждому коэффициенту задачи поставлена в соответствие конкретная ячейка в Excel. Имя ячейки состоит из буквы, обозначающей столбец, и цифры, обозначающей строку, на пересечении которых находится объект задачи ЛП. Так, например, переменным задачи (1.1) соответствуют ячейки ***B*3** (x_1), ***C*3** (x_2), ***D*3** (x_3), ***E*3** (x_4), коэффициентам ЦФ соответствуют ячейки ***B*6** ($c_1 =$130,5), ***C*6** ($c_2 =$20), ***D*6** ($c_3 =$ 56), ***E*6** ($c_4 =$87,8), правым частям ограничений соответствуют ячейки ***H*10** ($b_1 =$ 756), ***H*11** ($b_2 =$450), ***H*12** ($b_3 =$89) и т.д.

Ввод зависимостей из математической модели в экранную форму

Зависимость для ЦФ

В ячейку ***F*6**, в которой будет отображаться значение ЦФ, необходимо ввести **формулу,** по которой это значение будет рассчитано. Согласно (1.1) значение ЦФ определяется выражением

$$130{,}5x_1 + 20x_2 + 56x_3 + 87{,}8x_4 . \qquad (1.2)$$

Используя обозначения соответствующих ячеек в Excel (см. рис. 1.1), формулу для расчета ЦФ (1.2) можно записать как **сумму произведений** каждой из ячеек, отведенных для значений переменных задачи (***B*3, *C*3, *D*3, *E*3**), на соответствующую ячейку, отведенную для коэффициентов ЦФ (***B*6, *C*6, *D*6, *E*6**), то есть

$$B6 \cdot B3 + C6 \cdot C3 + D6 \cdot D3 + E6 \cdot E3. \qquad (1.3)$$

Чтобы задать формулу (1.3) необходимо в ячейку ***F*6** ввести следующее выражение и нажать клавишу **«Enter»**

=СУММПРОИЗВ(B$3:E$3;B6:E6), (1.4)

где символ **$** перед номером строки 3 означает, что при копировании этой формулы в другие места листа Excel номер строки 3 не изменится;

символ**:** означает, что в формуле будут использованы **все** ячейки, расположенные между ячейками, указанными слева и справа от двоеточия (например, запись ***B*6:*E*6** указывает на ячейки ***B*6, *C*6, *D*6 и *E*6**). После этого в целевой ячейке появится 0 (нулевое значение) (рис. 1.2).

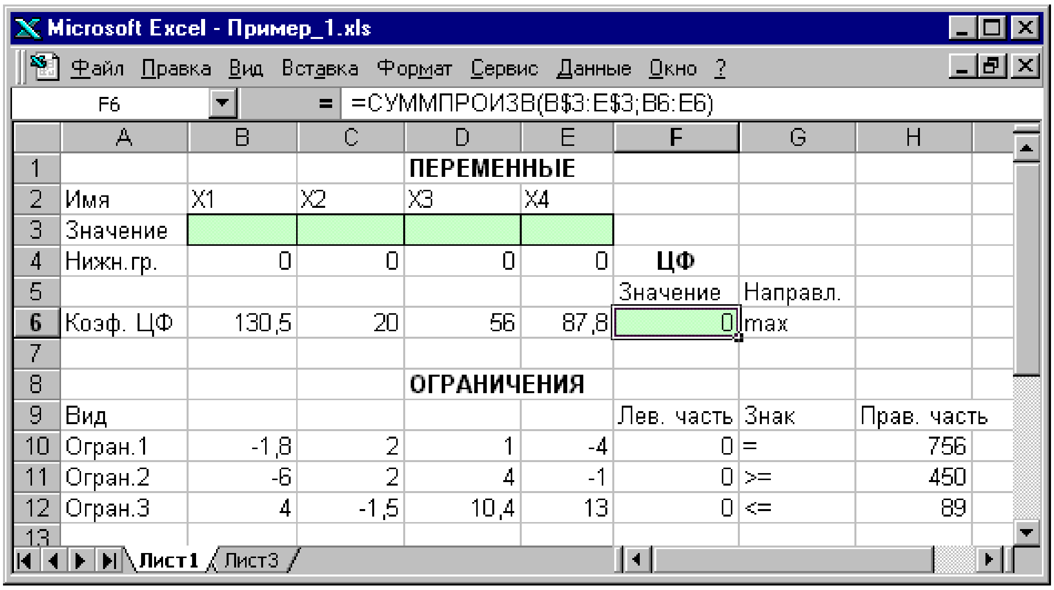


Рис. 1.2. Экранная форма задачи (1.1) после ввода всех необходимых формул (курсор в ячейке F6)

Примечание1.1. Существует другой способ задания функций в Excel с помощью режима **«Вставка функций»,** который можно вызвать из меню **«Вставка»** или при нажатии кнопки «f_x«на стандартной панели инструментов. Так, например, формулу (1.4) можно задать следующим образом:

- курсор в поле ***F6;***
- нажав кнопку «f_x»,вызовите окно**«Мастер функций – шаг 1 из 2»;**
- выберите в окне **«Категория»** категорию **«Математические»;**
- в окне **«Функция»** выберитефункцию **СУММПРОИЗВ*;***
- в появившемся окне **«СУММПРОИЗВ»** в строку **«Массив 1»** введите выражение **B$3:E$3**, а в строку **«Массив 2»** – выражение **B6:E6** (рис.1.3);
- после ввода ячеек в строки **«Массив 1»** и **«Массив 2»** в окне **«СУММПРОИЗВ»** появятся числовые значения введенных массивов (см. рис. 1.3), а в экранной форме в ячейке ***F6*** появится текущее значение, вычисленное по введенной формуле, то есть 0 (так как в момент ввода формулы значения переменных задачи нулевые).

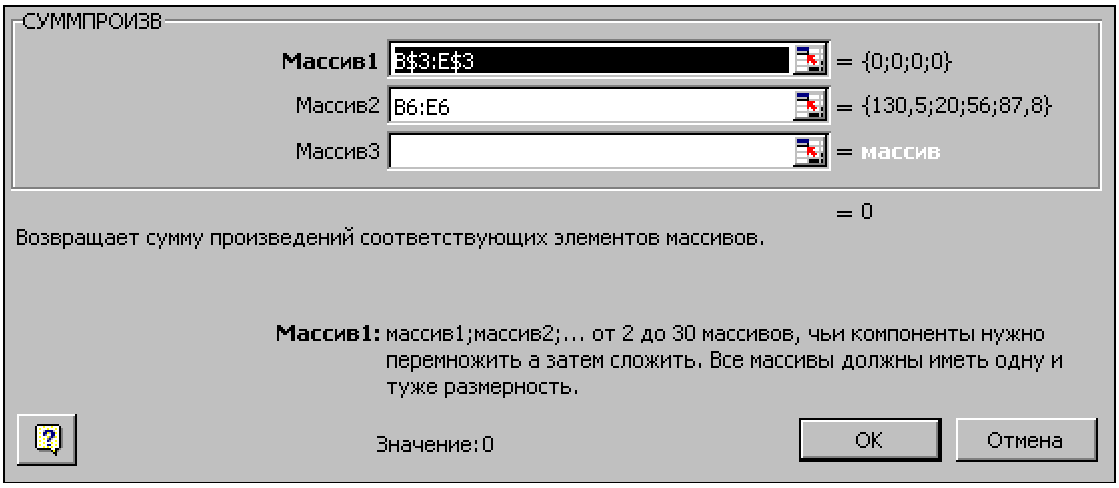


Рис. 1.3. Ввод формулы для расчета ЦФ в окно **«Мастер функций»**

Зависимости для левых частей ограничений

Левые части ограничений задачи (1.1) представляют собой *сумму произведений* каждой из ячеек, отведенных для значений переменных задачи (**B3, C3, D3, E3**), на соответствующую ячейку, отведенную для коэффициентов конкретного ограничения (**B10, C10, D10, E10 –** 1-е ограничение**; B11, C11, D11, E11** – 2-е ограничение и **B12, C12, D12, E12 –** 3-е ограничение). Формулы, соответствующие левым частям ограничений, представлены в табл. 1.1.

Таблица 1.1

Формулы, описывающие ограничения модели (1.1)

Левая часть ограничения	Формула Excel
$-1{,}8x_1 + 2x_2 + x_3 - 4x_4$ или $B10 \cdot B3 + C10 \cdot C3 + D10 \cdot D3 + E10 \cdot E3$	**=СУММПРОИЗВ(*B*\$3:*E*\$3;*B*10:*E*10)**
$-6x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4$ или $B11 \cdot B3 + C11 \cdot C3 + D11 \cdot D3 + E11 \cdot E3$	**=СУММПРОИЗВ(*B*\$3:**E**\$3;*B*11:*E*11)**
$4x_1 - 1{,}5x_2 + 10{,}4x_3 + 13x_4$ или $B12 \cdot B3 + C12 \cdot C3 + D12 \cdot D3 + E12 \cdot E3$	**=СУММПРОИЗВ(*B*\$3:*E*\$3;*B*12:*E*12)**

Как видно из табл. 1.1, формулы, задающие левые части ограничений задачи (1.1), отличаются друг от друга и от формулы (1.4) в целевой ячейке ***F*6** только номером строки во втором массиве. Этот номер определяется той строкой, в которой ограничение записано в экранной форме. Поэтому для задания зависимостей для левых частей ограничений достаточно скопировать формулу из целевой ячейки в ячейки левых частей ограничений. Для этого необходимо:

- поместить курсор в поле целевой ячейки ***F*6** и скопировать в буфер содержимое ячейки ***F*6** (клавишами **«Ctrl-Insert»**);
- помещать курсор поочередно в поля левой части каждого из ограничений, то есть в ***F*10, *F*11** и***F*12,** и вставлять в эти поля содержимое буфера (клавишами **«Shift-Insert»**) (при этом номер ячеек во втором массиве формулы будет меняться на номер той строки, в которую была произведена вставка из буфера);
- на экране в полях **F10**,**F11** и **F12** появится 0 (нулевое значение) (см. рис. 1.2).

ПРОВЕРКА ПРАВИЛЬНОСТИ ВВЕДЕНИЯ ФОРМУЛ

Для проверки правильности введенных формул производите поочередно двойное нажатие левой клавиши мыши на ячейки с формулами. При этом на экране рамкой будут выделяться ячейки, используемые в формуле (рис. 1.4 и 1.5).

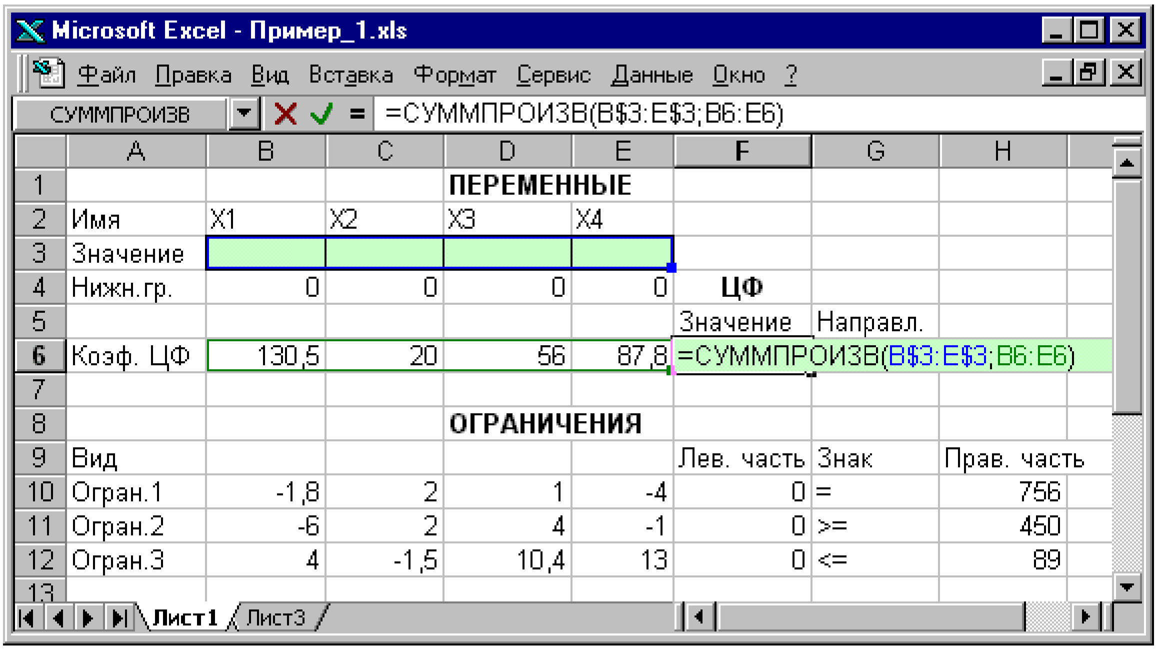


Рис. 1.4. Проверка правильности введения формулы в целевую ячейку **F6**

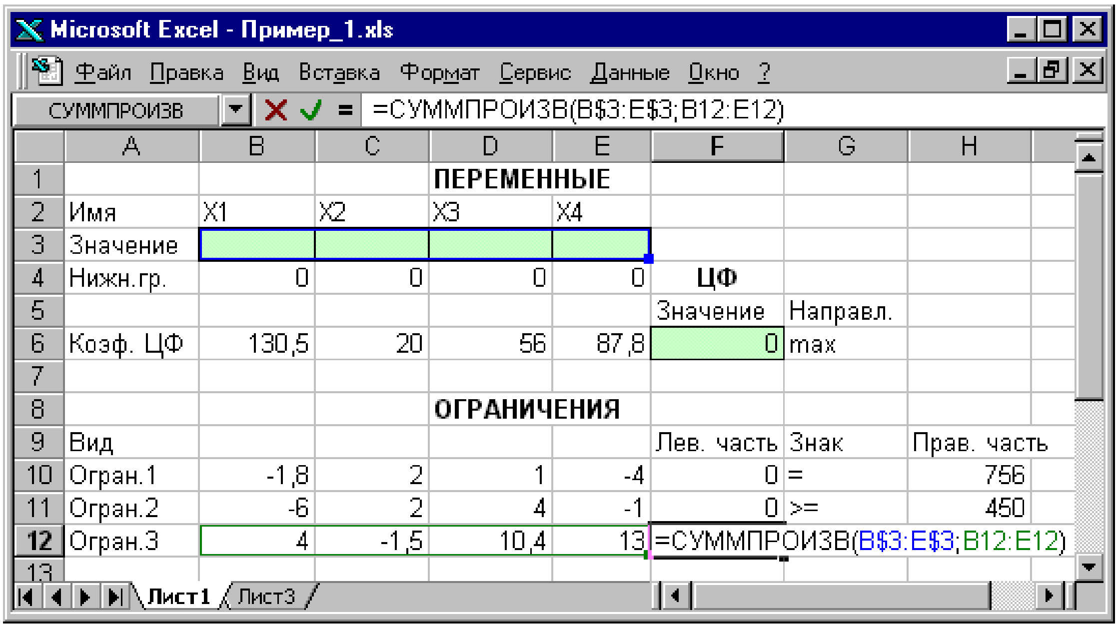


Рис. 1.5. Проверка правильности введения формулы в ячейку **F12**
для левой части ограничения 3

Задание целевой функции

Дальнейшие действия производятся в окне **«Поиск решения»**, которое вызывается из меню **«Сервис»** (рис. 1.6):

- поставьте курсор в поле **«Установить целевую ячейку»**;
- введите адрес целевой ячейки **$*F*$6** или сделайте одно нажатие левой клавиши мыши на целевую ячейку в экранной форме - это будет равносильно вводу адреса с клавиатуры;
- введите направление оптимизации ЦФ, щелкнув один раз левой клавишей мыши по селекторной кнопке **«максимальному значению».**

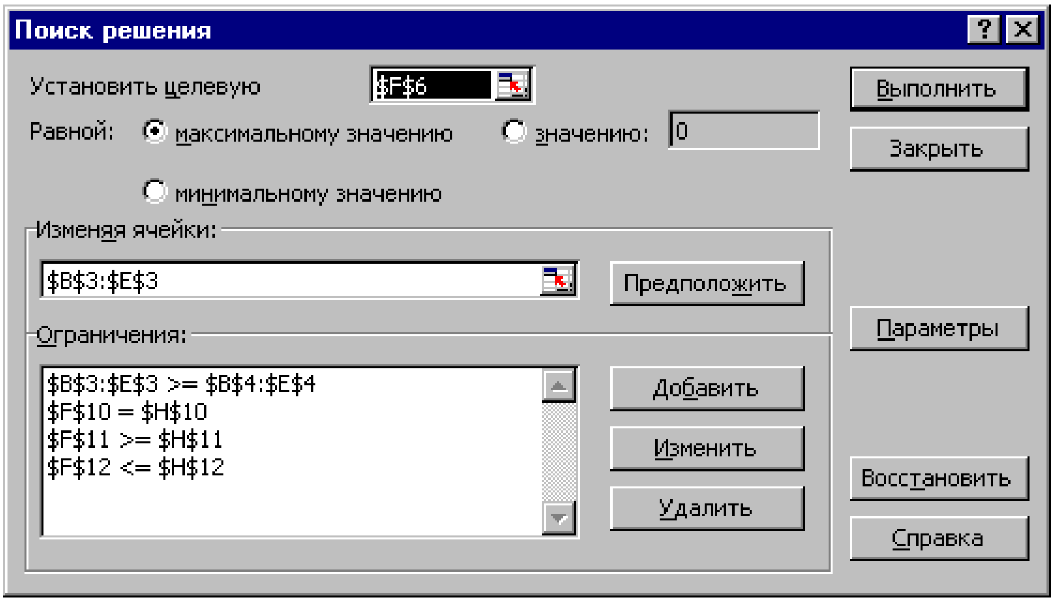


Рис. 1.6. Окно **«Поиск решения»** задачи (1.1)

Ввод ограничений и граничных условий

Задание ячеек переменных

В окно **«Поиск решения»** в поле **«Изменяя ячейки»** впишите адреса **$*B*$3:$*E*$3**. Необходимые адреса можно вносить в поле **«Изменяя ячейки»** и автоматически путем выделения мышью соответствующих ячеек переменных непосредственно в экранной форме.

Задание граничных условий для допустимых значений переменных

В нашем случае на значения переменных накладывается только граничное условие неотрицательности, то есть их нижняя граница должна быть равна нулю (см. рис. 1.1).

- Нажмите кнопку **«Добавить»**, после чего появится окно **«Добавление ограничения»** (рис.1.7).
- В поле **«Ссылка на ячейку»** введите адреса ячеек переменных **$B$3:$E$3**. Это можно сделать как с клавиатуры, так и путем выделения мышью всех ячеек переменных непосредственно в экранной форме.
- В поле знака откройте список предлагаемых знаков и выберите ≥.
- В поле **«Ограничение»** введите адреса ячеек нижней границы значений переменных, то есть **$*B*$4:$*E*$4**. Их также можно ввести путем выделения мышью непосредственно в экранной форме.

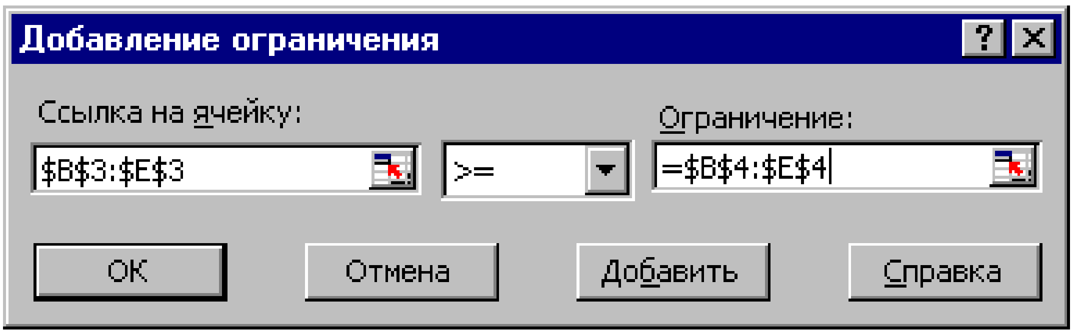


Рис. 1.7. Добавление условия неотрицательности переменных задачи (1.1)

Задание знаков ограничений ≤, ≥, =

- Нажмите кнопку **«Добавить»** в окне **«Добавление ограничения»**.
- В поле **«Ссылка на ячейку»** введите адрес ячейки левой части конкретного ограничения, например **$*F*$10**. Это можно сделать как с клавиатуры, так и путем выделения мышью нужной ячейки непосредственно в экранной форме.
- В соответствии с условием задачи (1.1) выбрать в поле знака необходимый знак, например =.
- В поле **«Ограничение»** введите адрес ячейки правой части рассматриваемого ограничения, например **$*H*$10**.
- Аналогично введите ограничения: **$*F*$11>=$*H*$11, $*F*$12<=$*H*$12.**
- Подтвердите ввод всех перечисленных выше условий нажатием кнопки **OK.**

Окно **«Поиск решения»** после ввода всех необходимых данных задачи (1.1) представлено на рис. 1.6.

Если при вводе условия задачи возникает необходимость в изменении или удалении внесенных ограничений или граничных условий, то это делают, нажав кнопки **«Изменить»** или **«Удалить»** (см. рис. 1.6).

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Установка параметров решения задачи

Задача запускается на решение в окне **«Поиск решения».** Но предварительно для установления конкретных параметров решения задач оптимизации определенного класса необходимо нажать кнопку **«Параметры»** и заполнить некоторые поля окна **«Параметры поиска решения»** (рис. 1.8).

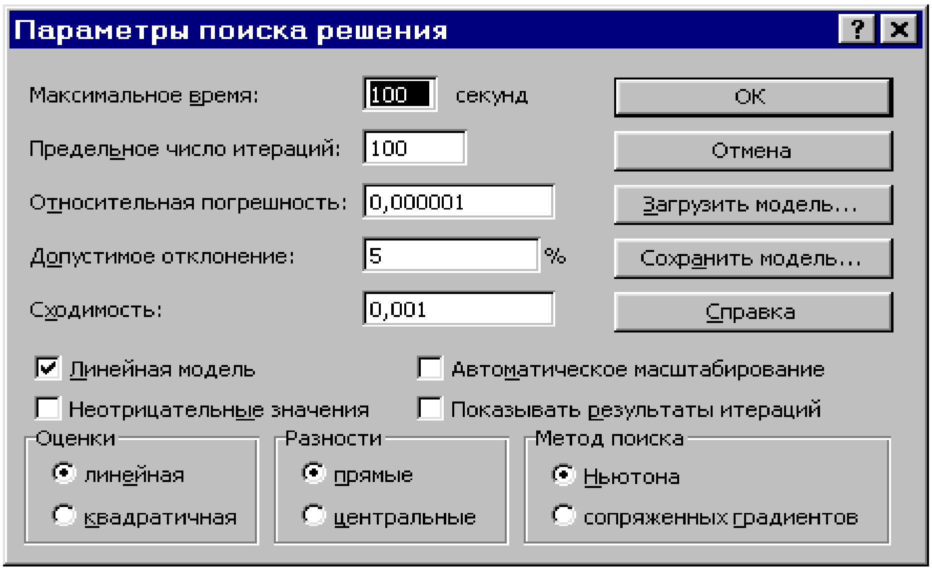


Рис. 1.8. Параметры поиска решения, подходящие для большинства задач ЛП

Параметр **«Максимальное время»** служит для назначения времени (в секундах), выделяемого на решение задачи. В поле можно ввести время, не превышающее 32 767 секунд (более 9 часов).

Параметр **«Предельное числоитераций»**служит для управления временем решения задачи путем ограничения числа промежуточных вычислений. В поле можно ввести количество итераций, не превышающее 32 767.

Параметр **«Относительная погрешность»** служит для задания точности, с которой определяется соответствие ячейки целевому значению или приближение к указанным границам. Поле должно содержать число из интервала от 0 до 1. Чем *меньше* количество десятичных знаков во введенном числе, тем *ниже* точность. Высокая точность увеличит время, которое требуется для того, чтобы сошелся процесс оптимизации.

Параметр **«Допустимое отклонение»** служит для задания допуска на отклонение от оптимального решения в целочисленных задачах. При указании большего допуска поиск решения заканчивается быстрее.

Параметр **«Сходимость»** применяется только при решении нелинейных задач.

Установка флажка **«Линейная модель»** обеспечивает ускорение поиска решения линейной задачи за счет применение симплекс-метода.

Подтвердите установленные параметры нажатием кнопки **«ОК»**.

Запуск задачи на решение

Запуск задачи на решение производится из окна **«Поиск решения»** путем нажатия кнопки **«Выполнить».**

После запуска на решение задачи ЛП на экране появляется окно **«Результаты поиска решения»** с одним из сообщений, представленных на рис. 1.9, 1.10 и 1.11.

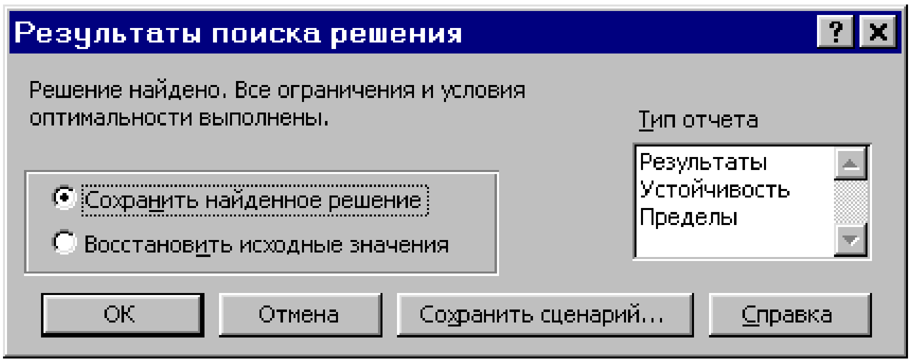


Рис. 1.9. Сообщение об успешном решении задачи

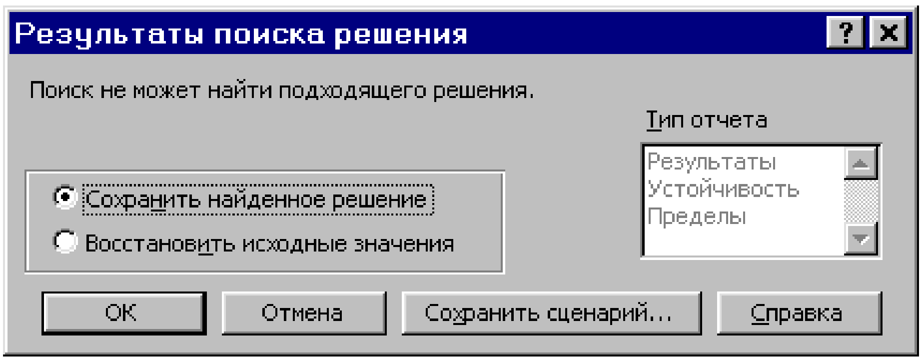


Рис. 1.10. Сообщение при несовместной системе ограничений задачи

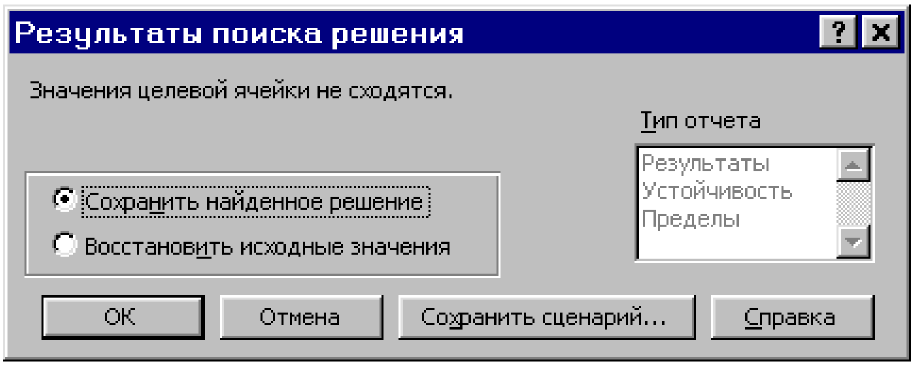


Рис. 1.11. Сообщение при неограниченности ЦФ в требуемом направлении

Иногда сообщения, представленные на рис. 1.10 и 1.11, свидетельствуют не о характере оптимального решения задачи, а о том, что при вводе условий задачи в Excel были допущены **ошибки**, не позволяющие Excel найти оптимальное решение, которое в действительности существует.

Если при решении задачи ЛП выдается сообщение о невозможности нахождения решения, то возможно, что причина заключается в ошибках ввода условия задачи в Excel. Поэтому, прежде чем делать вывод о принципиальной невозможности нахождения оптимального решения задачи, проверьте: не было ли допущено ошибок по ходу выполнения задания?

В том случае, когда при заполнении полей окна **«Поиск решения»** были допущены ошибки, не позволяющие Excel применить симплекс-метод для решения задачи или довести ее решение до конца, то после запуска задачи на решение на экран будет выдано соответствующее сообщение с указанием причины, по которой решение не найдено. Иногда слишком малое значение параметра **«Относительная погрешность»** не позволяет найти оптимальное решение. Для исправления этой ситуации увеличивайте погрешность поразрядно, например от 0,000001 до 0,00001 и т.д.

В окне **«Результаты поиска решения»**представлены названия трех типов отчетов: **«Результаты», «Устойчивость», «Пределы»**. Они необходимы при анализе полученного решения на чувствительность. Для получения же ответа (значений переменных, ЦФ и левых частей ограничений) прямо в экранной форме просто нажмите кнопку **«ОК».** После этого в экранной форме появляется оптимальное решение задачи (рис. 1.12).

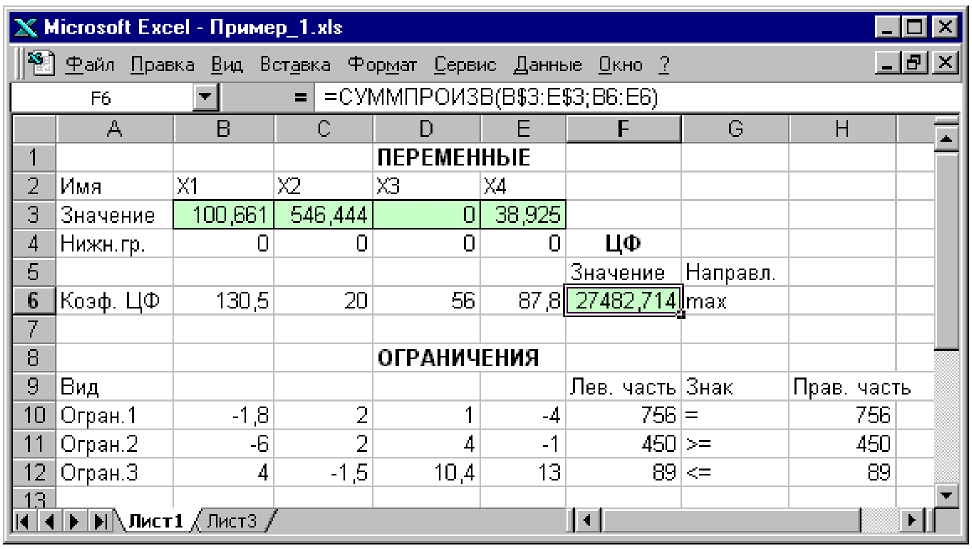


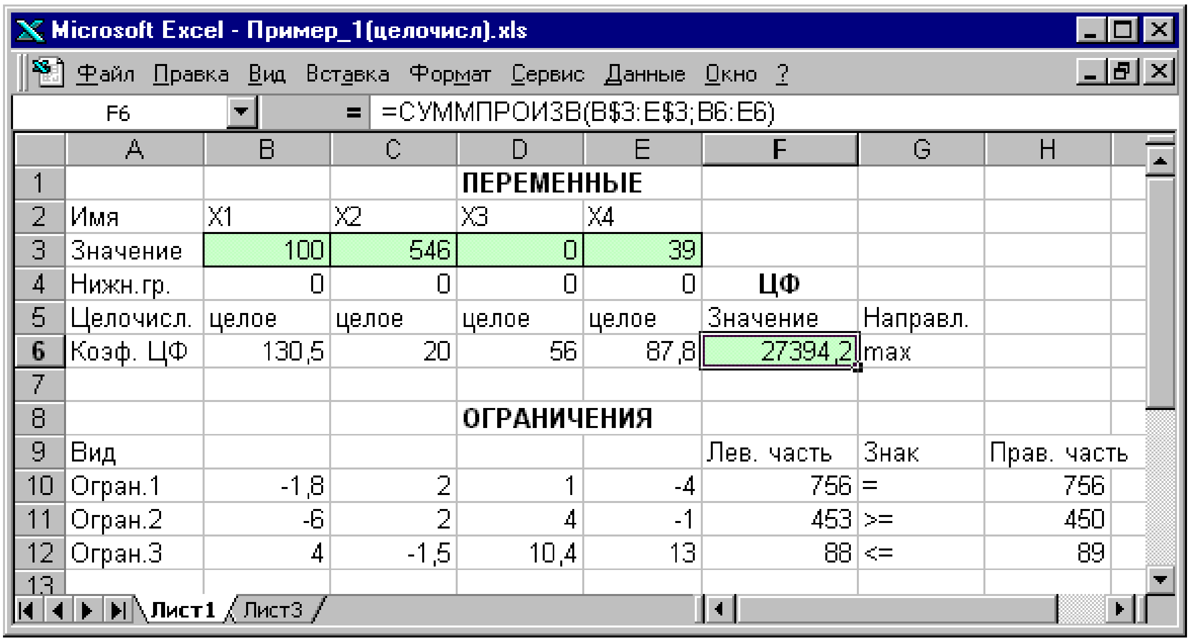
Рис. 1.12. Экранная форма задачи (1.1) после получения решения

ЦЕЛОЧИСЛЕННОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Допустим, что к условию задачи (1.1) добавилось требование целочисленности значений всех переменных. В этом случае описанный выше процесс ввода условия задачи необходимо *дополнить* следующими шагами.

- В экранной форме укажите, на какие переменные накладывается требование целочисленности (этот шаг делается для наглядности восприятия условия задачи) (рис. 1.13).
- В окне «Поиск решения» (меню «Сервис»→«Поиск решения»), нажмите кнопку **«Добавить»** и в появившемся окне **«Добавление ограничений»** введите ограничения следующим образом (рис. 1.14):

- в поле **«Ссылка на ячейку»** введите адреса ячеек переменных задачи, то есть **$*B*$3:$*E*$3**;
- в поле ввода знака ограничения установите **«целое»*;***
- подтвердите ввод ограничения нажатием кнопки «**OK».**



	A	B	C	D	E	F	G	H
1				ПЕРЕМЕННЫЕ				
2	Имя	X1	X2	X3	X4			
3	Значение	100	546	0	39			
4	Нижн.гр.	0	0	0	0	ЦФ		
5	Целочисл.	целое	целое	целое	целое	Значение	Направл.	
6	Коэф. ЦФ	130,5	20	56	87,8	27394,2	max	
7								
8				ОГРАНИЧЕНИЯ				
9	Вид					Лев. часть	Знак	Прав. часть
10	Огран.1	-1,8	2	1	-4	756	=	756
11	Огран.2	-6	2	4	-1	453	>=	450
12	Огран.3	4	-1,5	10,4	13	88	<=	89
13								

Рис. 1.13. Решение задачи (1.1) при условии целочисленности ее переменных

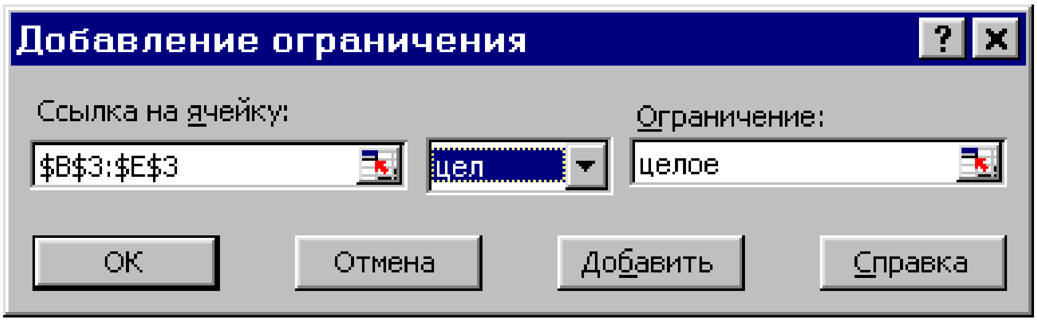


Рис. 1.14. Ввод условия целочисленности переменных задачи (1.1)

На рис. 1.13 представлено решение задачи (1.1), к ограничениям которой добавлено условие целочисленности значений ее переменных.

СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЕТА

Отчет должен содержать титульный лист, номер варианта, все необходимые промежуточные таблицы MicrosoftExcel и результаты решения задачи. Обязательно наличие выводов по проделанной работе.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1 Что такое «математическое программирование?»

2 Что значит «оптимальное решение»?

3 Каковы основные этапы решения задач ЛП в MS Excel?

4 Каков вид и способы задания формул для целевой ячейки и ячеек левых частей ограничений?

5 Почему при вводе формул в ячейки ЦФ и левых частей ограничений в них отображаются нулевые значения?

6 Каким образом в MS Excel задается направление оптимизации ЦФ?

7 Как наглядно отобразить в экранной форме ячейки, используемые в конкретной формуле, с целью проверки ее правильности?

8 Поясните общий порядок работы с окном **«Поиск решения».**

9 Каким образом можно изменять, добавлять, удалять ограничения в окне **«Поиск решения»**?

10 Какие сообщения выдаются в MS Excel в случаях: успешного решения задачи ЛП; несовместности системы ограничений задачи; неограниченности ЦФ?

11 Объясните смысл параметров, задаваемых в окне **«Параметры поиска решения».**

12 Каковы особенности решения в MS Excel целочисленных задач ЛП?

ЗАДАНИЯ

Используя MS Excel, найти решение для модели ЛП, соответствующей заданному варианту (табл.1.2).

Таблица 1.2

Варианты задач к лабораторным работам № 2-3

№ варианта	Математическая модель
1	$L(X) = 5x_1 + 7x_2 - 6x_3 + 9x_4 + 8x_5 \rightarrow max;$ $\begin{cases} 0{,}7x_1 + 0{,}9x_2 + 1{,}5x_3 + 2{,}3x_4 + 1{,}8x_5 \le 50000, \\ 0{,}4x_1 + 1{,}1x_2 - 0{,}5x_3 + 1{,}3x_4 - 2{,}8x_5 \ge 32000, \\ 0{,}5x_1 + 1{,}8x_3 + 0{,}7x_4 + 2x_5 \le 40000, \\ 2{,}2x_1 - 1{,}4x_2 - 0{,}8x_3 + 0{,}9x_4 = 15000, \\ x_j \ge 0 \left(j = \overline{1{,}5}\right). \end{cases}$

2	$L(X)=x_1+4x_3+8x_4-12x_5 \to min;$ $\begin{cases} x_1+\ \ 9x_2+2x_3-4x_4=250, \\ 0{,}4x_1+x_2-5x_3+3x_4+8x_5 \le 460, \\ 0{,}5x_1+\ 10x_2 - 8x_3+6x_4+2x_5 \le 190, \\ 11x_2-8{,}5x_3+3x_4+2x_5=210, \\ x_j \ge 0\left(j=\overline{1,5}\right). \end{cases}$
3	$L(X)=-45x_1+65x_2+2x_4-3x_5 \to max;$ $\begin{cases} 15x_1+18x_2+34x_4-22x_5=56, \\ 2x_1+7x_3-4x_4+3x_5 \ge 91, \\ 0{,}2x_1+0{,}8x_2+1{,}5x_3+0{,}9x_4+4x_5 \le 26, \\ 1{,}8x_1-42x_2+6{,}4x_3+3x_5=15, \\ x_j \ge 0\left(j=\overline{1,5}\right). \end{cases}$
4	$L(X)=14x_1-9x_2-x_4+6{,}4x_5 \to min;$ $\begin{cases} 0{,}9x_1+10x_2-28x_4+5x_5 \le 245, \\ 0{,}8x_1+1{,}7x_2-0{,}2x_3-0{,}5x_4=9, \\ 6x_1+4x_3-7x_4+6{,}3x_5 \le 54, \\ 8x_1+6{,}2x_2-4{,}8x_4+2{,}9x_5 \ge 17, \\ x_j \ge 0\left(j=\overline{1,5}\right). \end{cases}$
5	$L(X)=46x_1+2{,}3x_2+9{,}4x_3-4x_5 \to max;$ $\begin{cases} 3x_1+7{,}8x_3+12x_4+9x_5 \ge 49, \\ 2{,}3x_2+5x_3+5{,}6x_4-x_5 \le 86, \\ 16x_1-40x_4+29x_5=50, \\ 190x_1-98x_2-4x_4+150x_5 \ge 300, \\ x_j \ge 0\left(j=\overline{1,5}\right). \end{cases}$
6	$L(X)=0{,}5x_1+1{,}8x_3-9{,}2x_4+14x_5 \to min;$ $\begin{cases} 9{,}6x_2+15{,}7x_3+24x_4-8x_5 \le 74, \\ 0{,}8x_1+11{,}1x_2-4{,}5x_3+1{,}5x_4-6{,}3x_5=22, \\ 14x_1+45x_2-38x_4+26x_5 \le 46, \\ 220x_1-148x_2-7x_3+95x_5 \ge 150, \\ x_j \ge 0\left(j=\overline{1,5}\right). \end{cases}$

8	$L(X) = 4x_1 + 6x_2 - 14x_3 + 49x_5 \to min;$ $\begin{cases} 21x_1 + 9x_2 - 2x_4 - 12x_5 \geq 58, \\ 110x_2 - 60x_3 + 80x_4 - 45x_5 = 290, \\ 5x_2 + 27x_3 - 14x_4 + x_5 \leq 72, \\ 87x_1 - 6{,}4x_2 + 130x_4 = 140, \\ x_j \geq 0 \left(j = \overline{1{,}5}\right). \end{cases}$
9	$L(X) = -38x_1 + 60x_2 + x_3 + 4x_4 + 8x_5 \to max;$ $\begin{cases} 18x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 12x_5 \leq 86, \\ 2x_2 + 19x_3 - 7x_4 + 10x_5 = 130, \\ 0{,}4x_1 + 3x_2 - 4{,}2x_3 + 2x_4 - 5x_5 \leq 34, \\ 2{,}1x_1 + 13x_2 - 20x_3 + 6x_4 = 18, \\ x_j \geq 0 \left(j = \overline{1{,}5}\right). \end{cases}$
10	$L(X) = 10x_1 + 40x_3 + 13x_4 + 56x_5 \to min;$ $\begin{cases} 7x_1 + 16x_3 + 5x_4 + 25x_5 \leq 600, \\ 8x_1 + 1{,}7x_2 - 0{,}5x_4 + 4{,}7x_5 = 890, \\ 6x_1 + 4x_3 - 7x_4 + 6{,}3x_5 \leq 270, \\ 84x_1 + 62x_2 + 80x_3 + 14x_5 \geq 2300, \\ x_j \geq 0 \left(j = \overline{1{,}5}\right). \end{cases}$
11	$L(X) = 84x_1 + 5{,}7x_2 + 10x_4 - 3x_5 \to max;$ $\begin{cases} 4x_1 + 8{,}5x_2 + 16x_3 + 10x_5 \geq 50, \\ 10{,}4x_1 + 6x_3 + 2x_4 + 4x_5 \leq 120, \\ 19x_1 + 18x_2 - 20x_4 + 30x_5 = 600, \\ 200x_1 + 45x_2 - 8x_3 + 3{,}4x_4 \geq 210, \\ x_j \geq 0 \left(j = \overline{1{,}5}\right). \end{cases}$
12	$L(X) = 0{,}84x_2 - 4x_3 + 3{,}8x_4 + 12x_5 \to min;$ $\begin{cases} 15x_1 + 9{,}6x_2 + 34x_4 - 8x_5 \leq 180, \\ 0{,}6x_1 + 11{,}1x_2 - 2{,}6x_3 + 1{,}5x_4 - 6{,}3x_5 = 68, \\ 14x_1 + 64x_3 - 38x_4 + 12x_5 \leq 81, \\ 190x_1 - 148x_2 - 7x_3 + 84x_5 \geq 230, \\ x_j \geq 0 \left(j = \overline{1{,}5}\right). \end{cases}$

Лабораторные работы № 4-5

Решение двухиндексных задач линейного программирования С использованием microsoftexcel. Транспортная задача

ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Приобретение навыков построения математических моделей стандартных транспортных задач ЛП и решения их в MicrosoftExcel.

ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Задача о размещении(транспортная задача) – это распределительная задача, в которой работы и ресурсы измеряются в одних и тех же единицах. В таких задачах ресурсы могут быть разделены между работами, и отдельные работы могут быть выполнены с помощью различных комбинаций ресурсов. Примером типичной транспортной задачи является распределение (транспортировка) продукции, находящейся на складах, по предприятиям-потребителям.

Стандартная ТЗ определяется как задача разработки наиболее экономичного плана перевозки продукции*одного вида* из нескольких пунктов отправления в пункты назначения. При этом величина транспортных расходов прямо пропорциональна объему перевозимой продукции и задается с помощью тарифов на перевозку *единицы продукции*.

Исходные параметры модели ТЗ

a) *n* – количество пунктов отправления, *m* – количество пунктов назначения;

b) a_i – запас продукции в пункте отправления A_i ($i=\overline{1,n}$) (ед. тов.);

c) b_j – спрос на продукцию в пункте назначения B_j ($j=\overline{1,m}$) (ед. тов.);

d) c_{ij} – тариф (стоимость) перевозки единицы продукции из пункта отправления A_i в пункт назначения B_j (руб./ед. тов.).

Искомые параметры модели ТЗ

1 x_{ij} – количество продукции, перевозимой из пункта отправления A_i в пункт назначения B_j (ед. тов.).

2 $L(X)$ – транспортные расходы на перевозку всей продукции (руб.).

Этапы построения модели

Определение переменных.

Проверка сбалансированности задачи.

Построение сбалансированной транспортной матрицы.

Задание ЦФ.

Задание ограничений.

Транспортная модель

$$L(X)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}c_{ij}x_{ij}\rightarrow min; \qquad (2.1)$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, i = \overline{1,n}, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_{ij} = b_j, \; j = \overline{1,m}, \\ \forall x_{ij} \geq 0 \left(i = \overline{1,n}; \; j = \overline{1,m} \right). \end{cases}$$

Целевая функция представляет собой транспортные расходы на осуществление всех перевозок в целом. Первая группа ограничений указывает, что запас продукции в любом пункте отправления должен быть равен суммарному объему перевозок продукции из этого пункта. Вторая группа ограничений указывает, что суммарные перевозки продукции в некоторый пункт потребления должны полностью удовлетворить спрос на продукцию в этом пункте. Наглядной формой представления модели ТЗ является транспортная матрица (табл. 2.1).

Таблица 2.1

Общий вид транспортной матрицы

Пункты отправления, A_i	Пункты потребления, B_j				Запасы, (ед. прод.)
	$\hat{A}_1$	$\hat{A}_2$	…	B_m	
$\grave{A}_1$	c_{11}	c_{12}	…	c_{1m}	a_1
$\grave{A}_2$	c_{21}	c_{22}	…	c_{2m}	a_2
…	…	…	…	…	…
A_n	c_{n1}	c_{n2}	…	c_{nm}	a_n
Потребность (ед. прод.)	b_1	b_2	…	b_m	$\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = \sum\limits_{j=1}^{m} b_j$

Из модели (2.1) следует, что сумма запасов продукции во всех пунктах отправления должна равняться суммарной потребности во всех пунктах потребления, то есть

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{m} b_j \; . \qquad (2.2)$$

Если (2.2) выполняется, то ТЗ называется **сбалансированной**, в противном случае – **несбалансированной**. Поскольку ограничения модели (2.1) могут быть выполнены только при сбалансированной ТЗ, то при построении транспортной модели необходимо проверять условие баланса (2.2). В случае, когда *суммарные запасы превышают суммарные потребности*, необходим дополнительный **фиктивный** пункт потребления, который будет формально потреблять существующий излишек запасов, то есть

$$b_{\hat{o}} = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{j=1}^{m} b_j \; . \qquad (2.3)$$

Если *суммарные потребности превышают суммарные запасы*, то необходим дополнительный **фиктивный** пункт отправления, формально восполняющий существующий недостаток продукции в пунктах отправления:

$$a_{ф} = \sum_{j=1}^{m} b_j - \sum_{i=1}^{n} a_i \quad (2.4)$$

Введение фиктивного потребителя или отправителя повлечет необходимость формального задания **фиктивных** тарифов $c_{ij}^{ф}$ (реально не существующих) для фиктивных перевозок.

Поскольку нас интересует определение наиболее выгодных *реальных* перевозок, то необходимо предусмотреть, чтобы при решении задачи (при нахождении опорных планов) *фиктивные* перевозки не рассматривались до тех пор, пока не будут определены все реальные перевозки. Для этого надо фиктивные перевозки сделать невыгодными, то есть дорогими, чтобы при поиске решения задачи их рассматривали в самую последнюю очередь. Таким образом, величина фиктивных тарифов должна превышать максимальный из реальных тарифов, используемых в модели, то есть

$$c_{ij}^{ф} > max\, c_{ij} \left(i = \overline{1,n};\, j = \overline{1,m}\right).$$

На практике возможны ситуации, когда в определенных направлениях перевозки продукции невозможны, например, по причине ремонта транспортных магистралей. Такие ситуации моделируются с помощью введения так называемых **запрещающих** тарифов $c_{ij}^{з}$. Запрещающие тарифы должны сделать невозможными, то есть совершенно невыгодными, перевозки в соответствующих направлениях. Для этого величина запрещающих тарифов должна превышать максимальный из реальных тарифов, используемых в модели:

$$c_{ij}^{з} > max\, c_{ij} \left(i = \overline{1,n};\, j = \overline{1,m}\right).$$

<u>ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ</u>

1 Согласно номеру своего варианта выберите условие задачи.

2 Постройте модель задачи, включая транспортную таблицу.

3 Найдите оптимальное решение задачи в Excel и продемонстрируйте его преподавателю.

4 Оформите отчет по лабораторной работе.

Двухиндексные задачи ЛП вводятся и решаются в Excel аналогично одноиндексным задачам. Специфика ввода условия двухиндексной задачи ЛП состоит лишь в удобстве матричного задания переменных задачи и коэффициентов ЦФ.

Рассмотрим решение двухиндексной задачи, суть которой заключается в оптимальной организации транспортных перевозок штучного товара от поставщиков потребителям (табл. 2.2).

Таблица 2.2

Исходные данные транспортной задачи

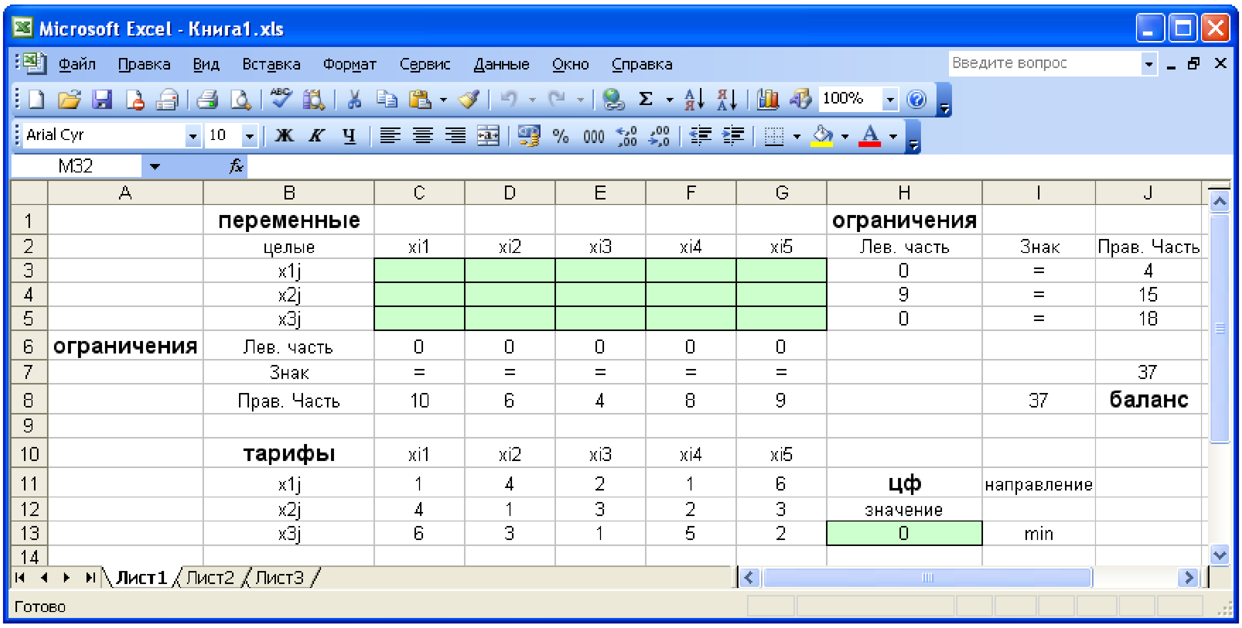
Тарифы, руб./шт.	1-й потребитель	2-й потребитель	3-й потребитель	4-й потребитель	5-й потребитель	Запасы, шт.
1-й поставщик	1	4	2	1	6	4
2-й поставщик	4	1	3	2	3	15
3-й поставщик	6	3	1	5	2	18
Потребности, шт.	10	6	4	8	9	

Целевая функция и ограничения данной задачи имеют вид

$$L(X) = x_{11} + 4x_{12} + 2x_{13} + x_{14} + 6x_{15} + 4x_{21} + x_{22} + 3x_{23} + 2x_{24} + 3x_{25} + 6x_{31} + \\ + 3x_{32} + x_{33} + 5x_{34} + 2x_{35} \to min;$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 4, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 15, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} = 18, \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 10, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 6, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 4, \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 8, \\ x_{15} + x_{25} + x_{35} = 9, \\ \forall x_{ij} \geq 0, \forall x_{ij} - öåëûå \left(i = \overline{1,3};\ j = \overline{1,5}\right). \end{cases} \tag{2.5}$$

Экранные формы, задание переменных, целевой функции, ограничений и граничных условий двухиндексной задачи (2.5) и ее решение представлены на рис. 2.1, 2.2, 2.3 и в табл. 2.3.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1		**переменные**						**ограничения**		
2		целые	xi1	xi2	xi3	xi4	xi5	Лев. часть	Знак	Прав. Часть
3		x1j						0	=	4
4		x2j						9	=	15
5		x3j						0	=	18
6	**ограничения**	Лев. часть	0	0	0	0	0			
7		Знак	=	=	=	=	=			37
8		Прав. Часть	10	6	4	8	9		37	**баланс**
9										
10		**тарифы**	xi1	xi2	xi3	xi4	xi5			
11		x1j	1	4	2	1	6	**цф**	направление	
12		x2j	4	1	3	2	3	значение		
13		x3j	6	3	1	5	2	0	min	
14										

Рис. 2.1. Экранная форма двухиндексной задачи (2.5)
(курсор в целевой ячейке **H13**)

Таблица 2.3

Формулы экранной формы задачи (2.5)

Объект математической модели	Выражение в Excel
Переменные задачи	***C*3:*G*5**
Формула в целевой ячейке ***H*13**	**=СУММПРОИЗВ(*C*3:*G*5;*C*11:*G*13)**
Ограничения по строкам в ячейках ***H*3, *H*4, *H*5**	**=СУММ(*C*3:*G*3)** **=СУММ(*C*4:*G*4)** **=СУММ(*C*5:*G*5)**
Ограничения по столбцам в ячейках ***C*6, *D*6, *E*6,*F*6,*G*6**	**=СУММ(*C*3:*C*5)** **=СУММ(*D*3:*D*5)** **=СУММ(*E*3:*E*5)** **=СУММ(*F*3:*F*5)** **=СУММ(*G*3:*G*5)**
Суммарные запасы и потребности в ячейках **J7, I8**	**=СУММ(*J*3:*J*5)** **=СУММ(*C*8:*G*8)**

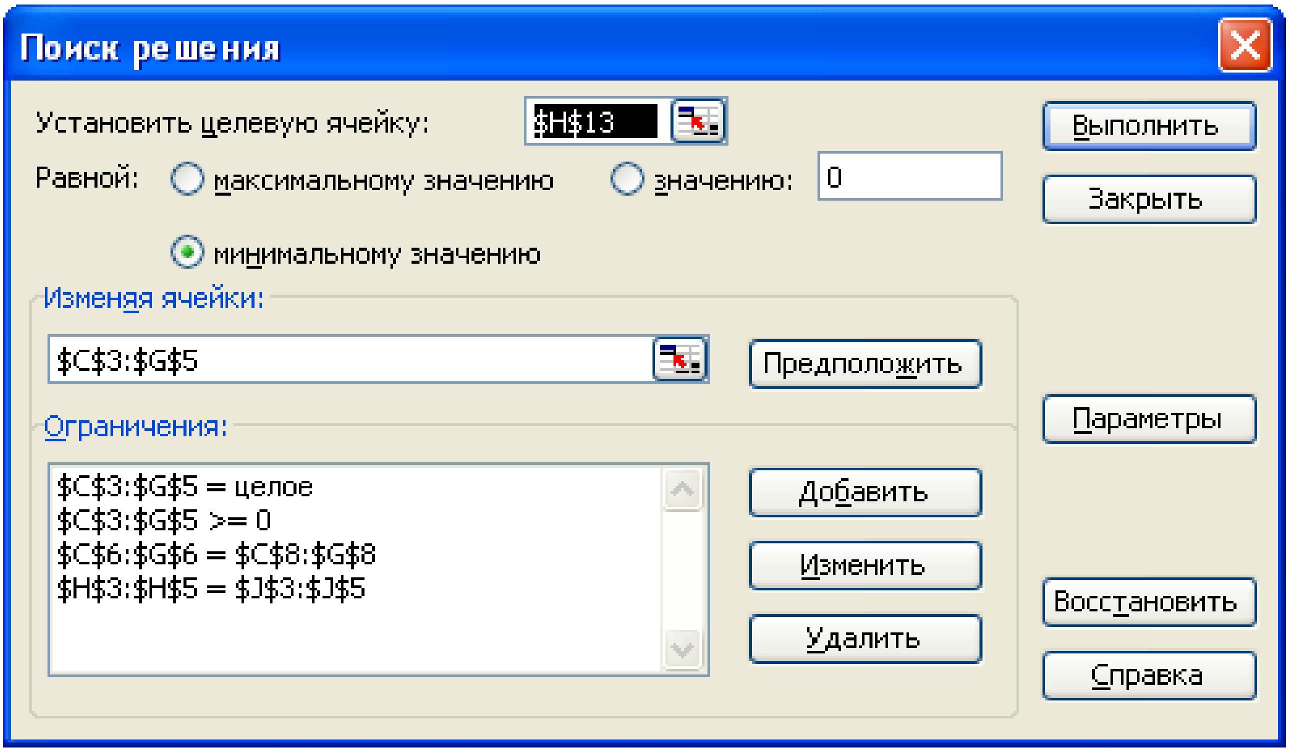


Рис. 2.2. Ограничения и граничные условия задачи (2.5)

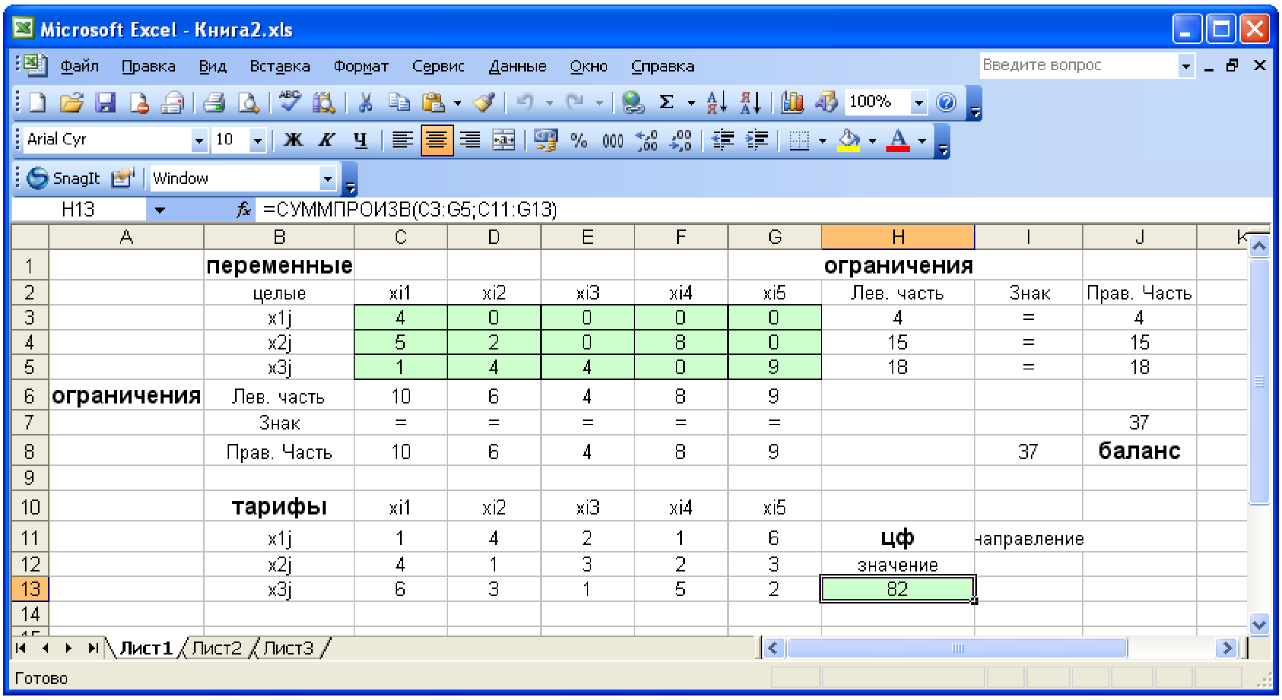


Рис. 2.3. Экранная форма после получения решения задачи (2.5)
(курсор в целевой ячейке ***H*13**)

СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЕТА

Отчет должен содержать:

- титульный лист (см. рис.2.1);
- номер варианта
- транспортную таблицу и модель задачи в MicrosoftExcel с указанием всех единиц измерения;
- результаты решения задачи с указанием единиц измерения.

Обязательно наличие выводов по проделанной работе.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1 Что такое задача о размещении?
2Какова постановка стандартной ТЗ?
3Запишите математическую модель ТЗ.
4 Перечислите исходные и искомые параметры модели ТЗ.
5 Какова суть каждого из этапов построения модели ТЗ?
6Раскройте понятие сбалансированности ТЗ.
7 Что такое фиктивные тарифы?

ЗАДАНИЯ

Используя MS Excel, найти решение ТЗ, соответствующей заданному варианту (табл. 2.4).

Таблица 2.4

№ варианта	Кол-во груза, провозимое поставщиками, ед.тов.			Кол-во груза, необходимое потребителям, ед.тов.					Тарифы на перевозки, руб./ед.тов.		
	*A*1	*A*2	*A*3	*B*1	*B*2	*B*3	*B*4	*B*5	Первым поставщиком и соотв. всеми потребителями *A*1*B*1/*B*2/*B*3/*B*4/*B*5	Первым поставщиком и соотв. всеми потребителями A2B1/B2/B3/B4/B5	Первым поставщиком и соотв. всеми потребителями A3B1/B2/B3/B4/B5
1	20	15	6	11	4	6	8	12	9/4/2/1/3	1/5/6/3/1	2/1/4/7/2
2	8	16	30	15	7	22	6	4	3/2/1/4/7	2/1/3/2/2	6/3/2/1/3
3	28	21	17	5	26	14	16	-	2/3/5/7/-	5/2/3/1/-	3/1/4/2/-
4	14	8	30	19	11	5	10	7	4/1/3/2/5	2/4/1/6/3	3/6/5/4/1
5	32	13	10	12	19	6	4	14	1/5/2/3/2	3/1/4/2/7	5/2/3/1/6
6	17	31	24	9	5	15	18	25	3/2/5/1/4	4/3/1/2/5	1/9/4/3/2
7	43	10	21	14	24	10	22	4	4/1/7/3/2	2/3/5/2/1	1/2/3/8/4
8	36	28	19	21	15	27	17	-	5/3/1/2/-	3/1/2/4/-	3/4/5/1/-
9	15	14	35	7	12	18	15	12	2/7/5/1/3	8/5/1/3/2	1/6/4/2/5
10	32	25	16	18	9	15	7	4	1/4/2/7/5	6/2/4/1/3	4/3/5/2/1
11	10	30	20	8	16	17	6	3	7/2/1/5/3	4/3/2/4/1	6/1/3/3/2
12	45	54	27	31	42	15	28	0	20/15/19/8/31	7/12/26/30/15	11/6/41/24/5

Лабораторные работы № 6-7

Решение различных линейных задач с использованием надстройки Поиск решения

Приемы применения надстройки Поиск решения были подробно описаны в работах 2-5. Повторите соответствующий материал.

Используя надстройку Поиск решения решите на компьютере следующие задачи.

1. На складах A_1, A_2иA_3имеется 85, 90 и 100 *ед.* продукции. Шести потребителям B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 *и* B_6 нужно отвезти 30, 40, 50, 70, 45 и 60 *ед.* продукции. Соответствующие тарифы заданы матрицей $C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 6 & 4 & 3 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 7 & 1 \\ 6 & 7 & 1 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ *(д.е.)*. Запросы потребителей необходимо удовлетворить в максимальной степени. Штрафы за недопоставку продукции потребителям B_1, B_4, иB_5 равны соответственно 2, 2 и 1 *д.е.* Найти решение, минимизирующее общие затраты (состоящие из транспортных расходов и штрафов за недопоставку продукции), если запросы потребителя B_2 необходимо удовлетворить полностью, перевозка со склада A_1 потребителю B_3 не может быть осуществлена, а потребителю B_6 необходимо отвезти не менее 10 *ед.* продукции со складаA_2.

2. Четыреработника-совместителя имеют возможность явиться на работу по следующему графику:

Пн.		Вт.		Ср.		Чт.		Пт.		Сб.		Вс.	
1 смена	2 смена	1 смена	2 смена	1 смена	2 смена	1 смена	2 смена	1 смена	2 смена	1 смена	2 смена	1 смена	2 смена
-	-	-	+	-	+	-	+	-	+	+	+	+	-
+	+	+	+-	+	-	+	+	-	-	+	-	+	+
+	-	+	-	+	+	-	-	+	-	+	-	-	+
-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	+	+

Потребность в работниках на неделе с учетом смен такова:

Пн.		Вт.		Ср.		Чт.		Пт.		Сб.		Вс.	
1 смена	2 смена	1 смена	2 смена	1 смена	2 смена	1 смена	2 смена	1 смена	2 смена	1 смена	2 смена	1 смена	2 смена
3	2	3	2	3	2	3	2	3	2	3	2	3	2

Составьте график выхода на работу работников-совместителей таким образом, чтобы потребность в работниках на неделе с учетом смен была удовлетворена в максимальной степени.

Каковы будут затраты на оплату труда, если за одну смену каждый работник получает 40 д.е.?

3. Объект обслуживается 7-ю группами работников. Выходные в группе А - вс., пн., в группе Б - пн., вт., в группе В - вт., ср., в группе Г - ср., чт., в группе Д - чт., пт., в группе Е - пт., сб., в группе Ж - сб., вс. Каждый сотрудник входит только в одну группу.

Потребность в работниках такова: вс. - 22, пн. - 17, вт. - 13, ср. - 14, чт. - 15, пт. - 18, сб. - 24. Все работники имеют одинаковый размер оплаты труда за день - 50 д.е. Необходимо подобрать такую численность сотрудников в каждой группе, чтобы добиться минимизации затрат на оплату труда при условии, что каждый день на работе будет не менее требующегося числа сотрудников.

Из имеющихся в Вашем распоряжении сотрудников 3 человека хотели бы иметь выходные в сб. и вс., а 2 человека - в пн. и вт.. Ещё 5 человек хотели бы иметь выходные только в пт., сб. или вс. Можно ли удовлетворить эти требования, не изменяя количество сотрудников в штате?

4. Требуется определить план выпуска четырех видов продукции, обеспечивающий максимальную прибыль от ее реализации.

На изготовление этой продукции расходуются трудовые ресурсы, сырье и финансы. С учетом рыночного спроса и производственно-технологических возможностей заданы предельные границы выпуска каждого вида продукции.

Эти границы, наличие и нормы расхода ресурсов, а также маржинальная прибыль (разность между выручкой и переменными издержками) на единицу продукции приведены в таблице:

Ресурсы	**Продукт 1**	**Продукт 2**	**Продукт 3**	**Продукт 4**	**Наличие ресурса**
Трудовые	1	2	1	2	19
Сырье	7	4	5	4	80
Финансы	5	7	9	8	100
Прибыль	70	60	100	140	-
Нижняя граница	3	1	1	2	
Верхняя граница	5	-	3	4	

Обозначив количество выпускаемых изделий через X1, X2, X3,X4, а целевую функцию (валовую маржинальную прибыль)— через F, построим математическую модель задачи:

$$F = 70x_1 + 60x_2 + 110x_3 + 140x_4 \to \max,$$
$$x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \le 19, \qquad 3 \le x_1 \le 5,$$
$$7x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 4x_4 \le 80, \qquad 1 \le x_2,$$
$$5x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 8x_4 \le 100, \qquad 1 \le x_3 \le 3,$$
$$2 \le x_4 \le 4.$$

Отчет должен содержать титульный лист, все необходимые таблицы MicrosoftExcel, результаты решения задач, а также выводы по проделанной работе.

Лабораторные работы №8 -9.

Решение задач динамического программирования. Задача о распределении ресурсов.

Основные сведения:

Динамическое программирование (ДП) представляет собой математический метод, заслуга создания и развития которого принадлежит, прежде всего, Беллману. Метод можно использовать для решения весьма широкого круга задач, включая задачи распределения ресурсов, замены и управления запасами, задачи о загрузке. Характерным для динамического программирования является подход к решению задачи по этапам, с каждым из которых ассоциирована одна управляемая переменная. Набор рекуррентных вычислительных процедур,связывающих различные этапы, обеспечивает получение допустимого оптимального решения задачи в целом при достижении последнего этапа.

Фундаментальным принципом, положенным в основу теории ДП и лежащим в основе решения всех задач динамического программирования, является принцип оптимальности: «Каково бы ни было состояние системы S перед очередным шагом, надо выбрать управление на этом шаге так, чтобы выигрыш на данном шаге плюс оптимальный выигрыш на всех последующих шагах был максимальным».

Динамическое программирование – это поэтапное планирование многошагового процесса, при котором на каждом этапе оптимизируется только один шаг. Управление на каждом шаге должно выбираться с учетом всех его последствий в будущем.

Основные термины и определения:

Отрасль - отрасль производства, в которое вкладываются исследуемые ресурсы.

Функция дохода показывает зависимость величины дохода, производимого отраслью, от количества вложенных средств. Общий вид функции дохода:

$f(x) = 1 - e^{-Ax}$

A – коэффициент функции дохода (задается для каждой отрасли отдельно)

Функция траты (амортизации) показывает, какое количество средств, вложенных в производство, расходуется. Общий вид функции траты: $\varphi(x) = \boldsymbol{K}x$

К – коэффициент функции траты (задается для каждой отрасли отдельно)

$\mathbf{Z}_i(\boldsymbol{Q})$ **-** условный оптимальный выигрыш, получаемый на всех последующих шагах, начиная с i-го и до конца

Алгоритм метода динамического программирования

При решении любой задачи динамического программирования удобно придерживаться раз и навсегда установленного, стандартного порядка действий. Этот порядок можно установить в следующей форме:

1. Выбрать способ описания процесса, т.е. параметры (фазовые координаты), характеризующие состояние S управляемой системы перед каждым шагом.
2. Разбить операцию на этапы (шаги).
3. Выяснить набор шаговых управлений xi для каждого шага и налагаемые на них ограничения.
4. Определить какой выигрыш приносит на i-ом шаге управление xi, если перед этим система была в состоянии S, т.е. записать «функцию выигрыша»:

$$W = f_i(S, x_i) \tag{1.2.1}$$

5. Определить, как изменяется состояние системы S под влиянием управления xi на i-ом шаге: оно переходит в новое состояние:

$$S' = \varphi_i(S, x_i) \tag{1.2.2}$$

6. Записать основное функциональное уравнение динамического программирования, выражающее условный оптимальный выигрыш Wi(S) (начиная с i-го шага и до конца) через уже известную функцию Wi+1 (S):

$$W_i(S) = \max_{x_i}\{\, f_i(S, x_i) + W_{i+1}(\varphi_i(S, x_i))\} \tag{1.2.3}$$

Этому выигрышу соответствует условное оптимальное управление на i-м шаге xi (S) (причем в уже известную функцию Wi+1 (S): надо вместо S подставить измененное состояние $S' = \varphi_i(S, x_i)$)

Произвести условную оптимизацию последнего (m-го) шага, задаваясь гаммой состояний S, из которых можно за один шаг дойти до конечного состояния, вычисляя для каждого из них условный оптимальный выигрыш по формуле:

$$W_m(S) = \max_{x_m}\left\{ f_m(S, x_m)\right\} \tag{1.2.4}$$

8. Произвести условную оптимизацию (m-1)-го, (m-2)-го и т.д. шагов по формуле (1.2.3), полагая в ней i = (m-1),(m-2),…, и для каждого из шагов указать условное оптимальное управление Xi(S), при котором максимум достигается.

Заметим, что если состояние системы в начальный момент известно (а это обычно бывает так), то необходимо найти оптимальный выигрыш по формуле:

$W^{*} = W_1(S_0)$ (1.2.5)

9. Далее найти безусловные оптимальные управления (и, если надо, конечное состояние S^{*}_{m}) по цепочке:

$$S_0 \to x_1(S_0) \to S^{*}_1 \to x_2(S^{*}_1) \to \ldots \to S^{*}_{m-1} \to x_m(S^{*}_{m-1}) \to S^{*}_{m}. \qquad (1.2.6)$$

В дальнейшем при решении задач распределения ресурсов будем придерживаться вышеизложенной схемы: условные оптимальные управления находятся в обратном порядке, от последнего шага к первому, а безусловные – в прямом порядке, от первого шага к последнему.

Постановка задачи распределения ресурсов:

1. Распределение ресурсов по неоднородным этапам

1.1 Входные данные

***K*₀** – начальное количество ресурсов, которое требуется распределить в течение времени n

n – количество лет, в течение которых производится оптимизация

A*1*ᵢ*, *A*2*ᵢ– коэффициенты функций дохода на *i*-м шаге оптимизации для первой и второй отраслей соответственно.

K*1*ᵢ*, *K*2*ᵢ – коэффициенты функций траты на *i*-м шаге оптимизации для первой и второй отраслей соответственно.

1.2 Схема решения

1.2.1 Рассматривается **система** – две отрасли производства с вложенными в них средствами. Она (система) характеризуется двумя параметрами X и Y, выражающими количество средств в первой и во второй отраслях соответственно (I и II). Состояние системы перед *i*-ым шагом характеризуется количеством средств *K*, сохранившихся после предыдущих *i*-1 шагов.

1.2.2 В рассматриваемой задаче шаг процесса определяется равным одному году.

1.2.3 Управление на *i*-ом шаге характеризуется количеством средств X_i и Y_i, вложенных в отрасли I и II на этом шаге. Нужно найти такое оптимальное управление, при котором суммарный доход $Z = \sum_{i=1}^{n} z_i$ будет максимальным.

1.2.4 Управление на *i*-ом шаге будет состоять в выделении в отрасль I средств в объеме X_i, $Y_i = K - X_i$. Выигрыш на *i*-ом шаге описывается уравнением $z_i(K, X_i) = f_i(X_i) + g_i(K - X_i)$

1.2.5 Под влиянием управления X_i на *i*-ом шаге система переходит в новое состояние $K' = {}_i(X_i) + \psi_i(K - X_i)$

1.2.6 Основное функциональное уравнение имеет вид: $Z_i(K) = \max\limits_{0 \le X_i \le K} \left\{ f_i(X_i) + g_i(K - X_i) + Z_{i+1}(\varphi_i(X_i) + \psi_i(K - X_i)) \right\}$

1.2.7 Условный оптимальный выигрыш на последнем *n*-м шаге описывается уравнением:

$Z_n(K) = \max\limits_{0 \le X_n \le K} \{z(K, X_n)\} = f_n(X_n) + g_n(K - X_n)$

1.2.8 Произвести условную оптимизацию для $i = (n\text{-}1),(n\text{-}2),\ldots 1$ в соответствии с рекуррентной формулой, описанной в п.1.2.6

1.2.9 Найти безусловные оптимальные управления по схеме $x_1 \to K_2^* \to x_2 \to K_3^* \to \cdots$. Изменение состояния системы производится по формуле, описанной в п.1.2.5 настоящего документа.

2. «Классическая» задача распределения ресурсов

Задача является частным случаем задачи распределения ресурсов по неоднородным этапам (функции дохода и траты одинаковы для всех этапов).

2.1 Входные данные

$\mathbf{K_0}$ – начальное количество ресурсов, которое требуется распределить в течение времени n

n – количество лет, в течение которых производится оптимизация

A1, A2 – коэффициенты функций дохода для первой и второй отраслей соответственно.

K1, K2 – коэффициенты функций траты для первой и второй отраслей соответственно.

2.2 Схема решения

2.2.1 В нашем случае **система** – это две отрасли производства с вложенными в них средствами. Она (система) характеризуется двумя параметрами X и Y, выражающими количество средств в первой и во второй отраслях соответственно (I и II). Состояние системы перед *i*-ым шагом характеризуется количеством средств *K*, сохранившихся после предыдущих *i*-1 шагов.

2.2.2 В рассматриваемой задаче шаг процесса определяется равным одному году.

2.2.3 Управление на *i*-ом шаге характеризуется количеством средств X_i и Y_i, вложенных в отрасли I и II на этом шаге. Нужно найти такое оптимальное управление, при котором суммарный доход $Z = \sum_{i=1}^{n} z_i$ будет максимальным.

2.2.4 Управление на *i*-ом шаге будет состоять в выделении в отрасль I средств в объеме X_i, $Y_i = K - X_i$. Выигрыш на *i*-ом шаге описывается уравнением $z_i(K, X_i) = f(X_i) + g(K - X_i)$.

2.2.5 Под влиянием управления X_i на *i*-ом шаге система переходит в новое состояние $K' = (X_i) + \psi(K - X_i)$.

2.2.6 Основное функциональное уравнение имеет вид:
$Z_i(K) = \max\limits_{0 \le X_i \le K} \{ f(X_i) + g(K - X_i) + Z_{i+1}(\varphi(X_i) + \psi(K - X_i)) \}$

2.2.7 Условный оптимальный выигрыш на последнем *m*-м шаге описывается уравнением:
$Z_n(K) = \max\limits_{0 \le X_n \le K} \{z(K, X_n)\} = f(X_n) + g(K - X_n)$

2.2.8 Произвести условную оптимизацию для $i = (n-1),(n-2),\ldots 1$ в соответствии с рекуррентной формулой, описанной в п.1.2.6

2.2.9 Найти безусловные оптимальные управления по схеме $x_1 \to K_2^* \to x_2 \to K_3^* \to \cdots$. Изменение состояния системы производится по формуле, описанной в п.2.2.5 настоящего документа.

3. Задача резервирования ресурсов

Задача с резервированием ресурсов заключается в следующем: требуется найти такой способ управления ресурсами, при котором максимизируется доход за m лет при резервировании части средств на каждом шаге.

Задача о резервировании ресурсов сводится к классической задаче (см. п. 2), когда $g(Y)= 0$, а $\psi(Y) = Y$. Т.е вводится некая фиктивная отрасль, которая при вложении в нее средств, не приносит дохода, но и не тратит их.

3.1 Входные данные

$\mathbf{K_0}$ – начальное количество ресурсов, которое требуется распределить в течение времени n

n – количество лет, в течение которых производится оптимизация

А1– коэффициент функции дохода для первой отрасли. Коэффициент **А2**полагается равным 0.

К1– коэффициент функции траты для первой отрасли. Коэффициент **К2**полагается равным 1.

3.2 Ограничения

3.2.1 По истечение года, оставшиеся от K_0средства можно вкладывать не целиком, а часть их резервировать.

3.2.2 Новых средств извне не поступает.

3.2.3 Доход в производство не вкладывается, а накапливается отдельно.

3.3 Схема решения

Схема решения задачи резервирования идентична схеме решения «классической» задачи распределения ресурсов, описанной в п.2 настоящего документа.

4. Распределение ресурсов с вложением доходов в производство.

В данной задаче по мимо заданных функций дохода и траты, дополнительно, вводятся «функции отчислений» $r_i(D) \le D, i = 1,\ldots,n$, показывающие, какая часть дохода D, полученного на i-м шаге, не вкладывается в производство на следующем (i+1)-м шаге, а отчисляется.

4.1 Входные данные

$\boldsymbol{K_0}$ – начальное количество ресурсов, которое требуется распределить в течение времени n

n – количество лет, в течение которых производится оптимизация

$\boldsymbol{A1_i}$, $\boldsymbol{A2_i}$– коэффициенты функций дохода на i-м шаге оптимизации для первой и второй отраслей соответственно.

$\boldsymbol{K1_i}$, $\boldsymbol{K2_i}$ – коэффициенты функций траты на i-м шаге оптимизации для первой и второй отраслей соответственно.

$\boldsymbol{K3_i}$- коэффициент функций отчислений на i-м шаге оптимизации

4.2 Схема решения

4.2.1 В рассматриваемой задаче шаг процесса определяется равным одному году.

4.2.2 Управление X_i на *i*-ом шаге - вложение средств X_iв отрасль I, а остальных средств – в отрасль II (Y_i=K - X_i). Выигрыш на *i*-ом шаге описывается уравнением $z_i(K,X_i) = r_i(f_i(X_i) + g_i(K - X_i))$

4.2.3 Под влиянием управления X_i на *i*-ом шаге система переходит в новое состояние $K' = \ _i(X_i) + \psi_i(K - X_i) + f_i(X_i) + g_i(K - X_i) - r_i(f_i(X_i) + g_i(K - X_i))$

4.2.4 Основное функциональное уравнение имеет вид:

$$Z_i(K) = \max_{0 \le X_i \le K} \left\{ \begin{aligned} & r_i(f_i(X_i) + g_i(K - X_i)) + Z_{i+1}(\varphi_i(X_i) + \psi_i(K - X_i) + \\ & + f_i(X_i) + g_i(K - X_i) - r_i(f_i(X_i) + g_i(K - X_i))) \end{aligned} \right\}$$

4.2.5 Условный оптимальный выигрыш на последнем *n*-м шаге описывается уравнением:

$$Z_n(K) = \max_{0 \le X_n \le K} \left\{ f_n(X_n) + g_n(K - X_n) + \ _n(X_n) + \psi_n(K - X_n) \right\}$$

4.2.6 Произвести условную оптимизацию для *i = (n-1),(n-2),…1* в соответствии с рекуррентной формулой, описанной в п.1.2.6

4.2.7 Найти безусловные оптимальные управления по схеме $x_1 \to K_2^* \to x_2 \to K_3^* \to \cdots$. Изменение состояния системы производится по формуле, описанной в п.1.2.5 настоящего документа.

5. Решение «классической» задачи распределения ресурсов

Планируется деятельность двух отраслей производства I и II сроком на 3 года (N=3).

Заданы функции дохода для первой и второй отраслей соответственно:

$f(x) = 1 - e^{-x}$

$g(x) = 1 - e^{-2x}$

Так же заданы функции траты:

$\varphi(x)$ = 0.75 xи

$\psi(y)$ = 0.3 yдля первой и второй отраслей соответственно.

Требуется распределить имеющиеся средства в размере ***Q***= 2 между отраслями, исходя из условия максимума дохода.

Задачу условной оптимизации на всех этапах будем решить численно.

Условный оптимальный выигрыш на последнем **3-ом** шаге равен:

$$Z_3(Q) = \max_{0 \le X_3 \le K} \left\{ z(Q, X_3) \right\} = \max_{0 \le X_3 \le Q} \left\{ 2 - \left[e^{-X_3} + e^{-2(Q - X_3)} \right] \right\}$$

Здесь, $z(K, X_5)$–выигрыш на 3-м шаге.

Выясним, в каких пределах может находиться Q, т.е. Q_{max} и Q_{min}.

Значение Q_{max} можно найти, считая, что на первых двух шагах все средства будут вложены в первую отрасль, в которой затраты минимальны. Тогда после двух лет получим: $Qmax = K_0 *(0.75)^2 \approx 1.12$

Величину Q_{min} можно найти, если на первых четырех шагах все средства вкладывать во вторую отрасль $Qmin = K_0 *(0.3)^2 \approx 0.18$. То есть, Q принадлежит интервалу

[0.18; 1.12].

Возьмем опорные значения Q = 0.28; 0.38; …;1.08 и для каждого из них найдем условное оптимальное управление $x_3(Q)$ и условный максимальный доход на двух последних шагах $Z_3(Q)$.Для этого построим зависимости $z(Q,X_3)$ от X_3 для всех значений Q (см. рис.5.1).

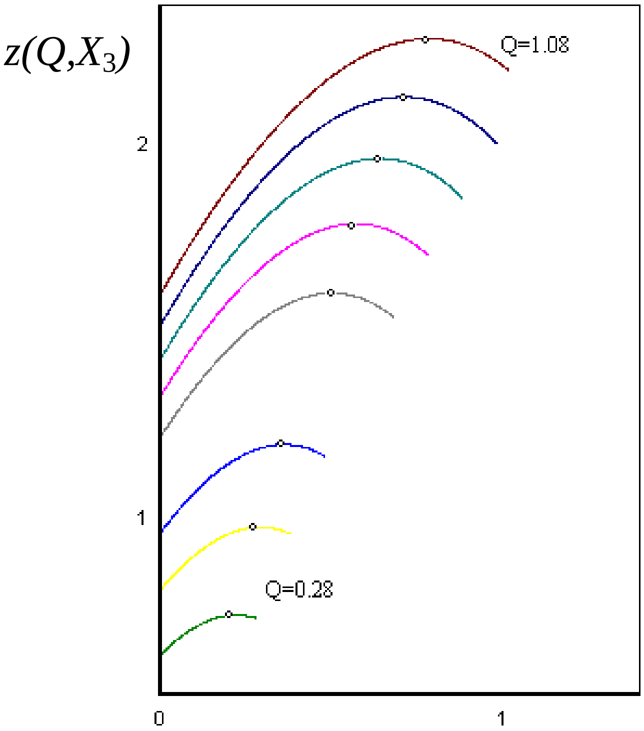


Рисунок 5.1 – Зависимость $z(Q,X_3)$ от X_3 для значений Q

Координаты максимального значения каждой кривой представляют собой условный оптимальный доход на двух последних шагах $Z_3(Q)$ и соответствующее оптимальное управление $X_3(Q)$. Результаты вычисления координат максимального значения каждой кривой сведены в таблицу 5.1.

Таблица 5.1 – Результаты вычисления

Q	$z(Q,X_3)$	X_3
0.18	0.302	0.000
0.28	0.429	0.000
0.38	0.533	0.022
0.48	0.628	0.089
0.58	0.716	0.156
0.68	0.799	0.222
0.78	0.876	0.289
0.88	0.949	0.356
0.98	1.017	0.422
1.08	1.080	0.489

С помощью полученных значений построим зависимости, показанные на рис.5.2.
Кривая $Z_3(Q)$строится путем линейной интерполяции на сетке значений Q и $z(Q,X_3)$, представленных в Таблице 5.1. Кривая $X_3(Q)$ - Q иX_3.
Таким образом, оптимизация последнего шага завершена.

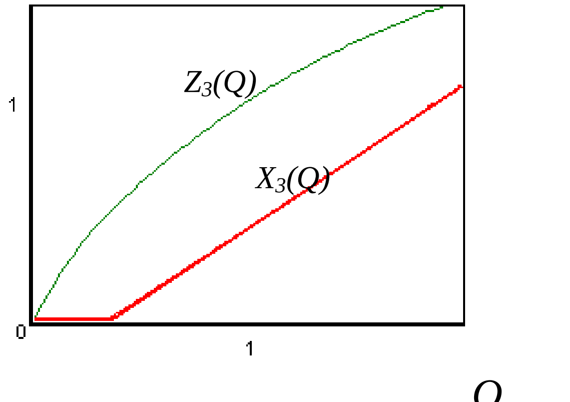


Рисунок 5.2 – Зависимости $Z_3(Q)$ и $X_3(Q)$

Рассмотрим 2-й шаг. Задачу условной оптимизации так же решается численно:
$Z_2(Q,X_2)=\max\{\tilde{Z}_2(Q,X_2)\}$, где условный полуоптимальный выигрыш равен
$\tilde{Z}_2(Q,X_2)=z_2(Q,X_2)+Z_3(0.75X_2+0.3(Q-X_2))$
$z_2(Q,X_2)=2-\left[e^{-X_2}+e^{-2(Q-X_2)}\right]$ - выигрыш на 2-ом шаге. Аналогично третьему шагу выясним пределы Q: $Qmax = K_0 *(0.75)^1 \approx 1.5$, а $Qmin= K_0 *(0.3)^1 \approx 0.6$ То есть, Q принадлежит интервалу[0.6; 1.5]

Возьмем опорные значения $Q = 0.6; 0.8; \ldots;1.5$ и для каждого из них найдем условное оптимальное управление $X_2(Q)$ и условный максимальный доход на последнем шаге $Z_2(Q)$.Для этого построим зависимости $\tilde{Z}_2(Q,X_2)$от X_2 для всех значений Q (см. рис.5.3).

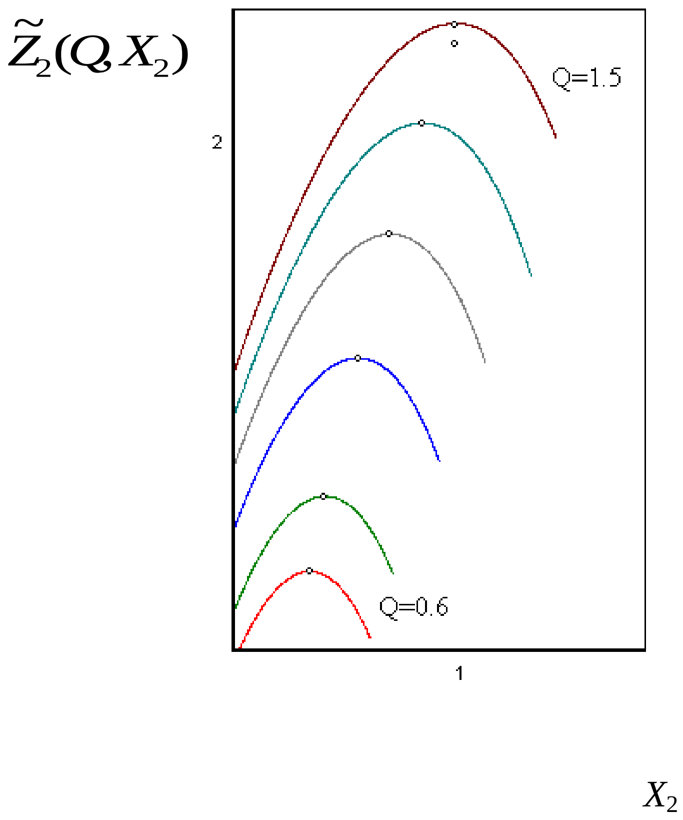


Рисунок 5.3 – Зависимость $\tilde{Z}_2(Q, X_2)$ от X_2 для значений Q

При этом второе слагаемое в формуле для полуоптимального выигрыша определяется по рис. 5.2 для аргумента $0.75X_2 + 0.3(Q - X_2)$.

Координаты максимального значения каждой кривой представляют собой условный оптимальный доход на последнем шаге $Z_2(Q)$ и соответствующее оптимальное управление $X_2(Q)$. Сведем результаты в таблицу 5.2.

Таблица 5.2 – Результаты вычислений на втором шаге.

Q	***z(Q,X₂)***	***X₂***
0.6	1.180	0.335
0.8	1.460	0.474
1.0	1.710	0.622
1.2	1.934	0.756
1.4	2.135	0.899
1.5	2.228	0.970

Аналогично третьему шагу, с помощью полученных значений строятся зависимости, показанные на рис. 5.4.

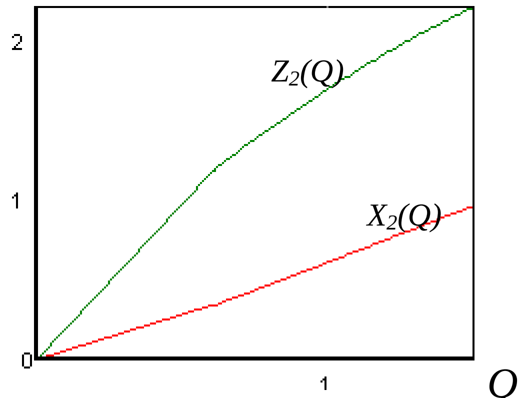


Рисунок 5.4 – Зависимости $Z_2(Q)$ и $X_2(Q)$

Теперь остается оптимизировать первый шаг.

Начальное состояние системы $Q_0 = 2$ и нужно построить зависимость $\tilde{Z}_1(Q_0, X_1)$ от X_1:

$$\tilde{Z}_1(Q_0, X_1) = z_1(Q_0, X_1) + Z_2(Q') = 2 - \left[e^{-X_1} + e^{-2(Q_0 - X_1)}\right] + Z_2(0.75X_1 + 0.3(Q_0 - X_1)).$$

Второе слагаемое определяется по рис. 5.4 для аргумента $0.75X_1 + 0.3(Q_0 - X_1)$.

Определяя на единственной кривой (см. рис. 5.5) максимум, найдем окончательное (уже не условное) значение максимального дохода за весь период $0.75X_1 + 0.3(Q_0 - X_1)$

и соответствующее оптимальное управление на первом шаге $X_1 = 1.47$.

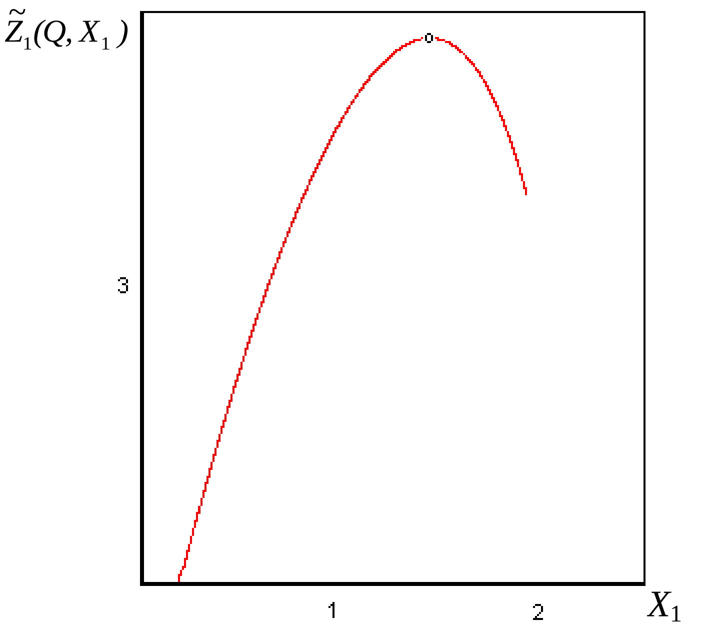


Рисунок 5.5 – Зависимость $\tilde{Z}_1(Q, X_1)$ от X_1

Найдем безусловные оптимальные управления по схеме:

$x_1 \to Q_2^* \to x_2 \to Q_3^* \to x_3$.

Остаток средств после первого определяется следующим образом:

$Q_2^* = 0.75x_1 + 0.3(Q_0 - x_1) = 1.26$.

По рис.4 определяем $x_2 = 0.8$. Остаток средств после второго шага:

$Q_3^* = 0.75x_2 + 0.3(Q_2 - x_2) = 0.73$. По этому значению из рис.5.2 определим $x_3 =$ 0.26. Полученные результаты сведены в таблице 5.3

Таблица 5.3

Отрасли	**Год**		
	1	**2**	**3**
I	1.469	0.801	0.261
II	0.531	0.460	0.477

Вид оптимальной кривой в фазовом пространстве показан на рис.5.6.

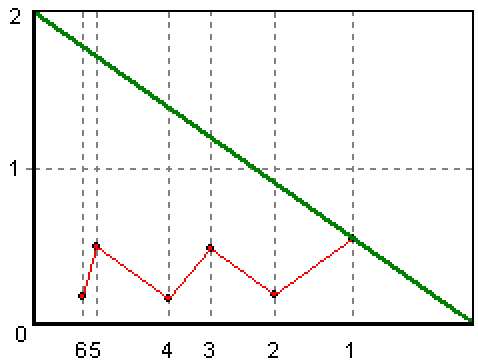


Рисунок 5.6 – Оптимальная кривая в фазовом пространстве

6. Связь различных типов задач распределения ресурсов

На рис.6.1 показана зависимость между задачами распределения ресурсов.

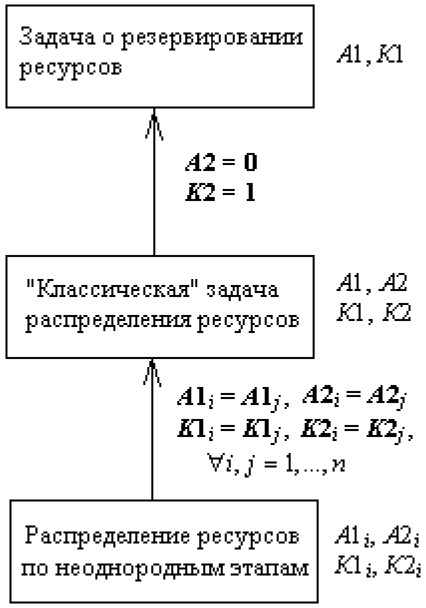


Рисунок 6.1 – Связь между различными типами задач распределения ресурсов

Задание

Записать функцию Беллмана на последнем шаге и на предпоследнем шаге, объяснить как решается задача. Реализовать численное решение задачи.

Лабораторная работа №10

Решение нелинейных задач с использованием надстройки Поиск решения

Решение нелинейных задач, как и решение линейных, требует создания удобной табличной модели и грамотного использования надстройки Поиск решения. Используя полученный опыт построения табличных моделей и применения указанной надстройки, решите следующие нелинейные задачи.

1. Найти максимальное значение функции

$$F = x_2 - x_1^2 + 6x_1$$

при условиях

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 24, \\ x_1 + 2x_2 \le 15, \\ 3x_1 + 2x_2 \le 24, \end{cases}$$
$$x_2 \le 4,$$
$$x_1, x_2 \ge 0.$$

2. **Найти максимальное и минимальное значение функции**

$$F = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 4)^2$$

при условиях

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geq 7, \\ 10\,x_1 - x_2 \leq 8\,, \\ -18x_1 + 4x_2 \leq 12, \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \geq 0.$$

3. **Найти максимальное и минимальное значение функции**

$$F = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 3)^2$$

при условиях

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \geq 6, \\ 3\,x_1 - 2x_2 \leq 18\,, \\ -x_1 + 2x_2 \leq 8, \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \geq 0.$$

4. **Найти максимальное и минимальное значение функции**

$$F = 3x_1 + 4x_2$$

при условиях

$$\begin{cases} {x_1}^2 + {x_2}^2 \leq 25, \\ x_1, x_2 \geq 4, \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Сравните полученные результаты с ответами, полученными на практическом занятии №5.

Отчет должен содержать титульный лист, все необходимые таблицы Microsoft Excel, результаты решения задач, а также выводы по проделанной работе.