Использование Microsoft Office Excel для решения математических задач

Лабораторная работа 1. Построение графиков функций в Microsoft Office Excel

1. Запустите табличный процессор *Microsoft Excel 2007*.
2. На первом листе рабочей книги необходимо построить график функции *y=sin(x)* на отрезке [-6;6] с шагом 0,5 (рис. 32).
3. Выделите ячейки *A1:F1* и объедините их, используя кнопку – *объединить и поместить в центре* на панели инструментов *Выравнивание* вкладки ленты *Главная*.
4. Введите в объединенные ячейки заголовок *Построение графиков функций*.
5. В ячейку *A3* введите *x*, а в ячейку *B3 – y=sin(x).*
6. В ячейку *A4* введите значение - *6*, в *A5* – значение -*5,5*. Выделите эти две ячейки и наведите указатель мыши на правый нижний угол выделения – черный квадратик (*маркер заполнения*). После того, как указатель примет форму черного крестика, растяните область выделения до значения 6.
7. В ячейку *B4* введите формулу *=sin(A4)* и нажмите клавишу *Enter*.
8. Используя *маркер заполнения*, скопируйте формулу в остальные ячейки.
9. Выделите значения двух столбиков и выполните команду: вкладка ленты *Вставка* ► панель инструментов *Диаграммы* ► *Точечная*.

10. Приведите диаграмму к виду

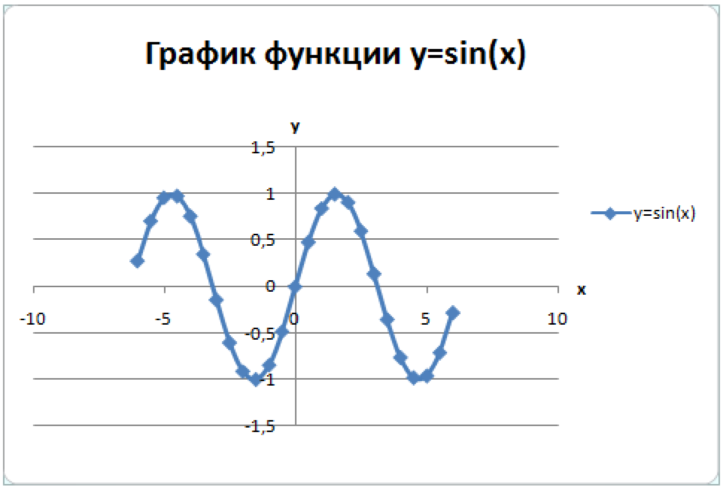


График функции y=sin(x)

.

11. Переименуйте *Лист1* в *Графики функций*.

12. Постройте на этом же листе график функции:

$$y = \begin{cases} 1 - x^2, & x \in [-1;1] \\ |x| - 1, & x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty) \end{cases}$$

на отрезке [-3;3] с шагом 0,2 (рис. 33).

Для того чтобы записать функцию *y* воспользуемся логической функцией **ЕСЛИ**(Логическое выражение**;** значение_если истина; значение_если ложь).

Функция **ЕСЛИ** проверяет выполняется ли условие, и возвращает одно значение, если оно истинно и другое значение, если нет.

В нашем случае если $\boldsymbol{x \in [-1;1]}$, то $\boldsymbol{y = 1 - x^2}$, в противном случае $\boldsymbol{y = |x| - 1}$.

Чтобы записать условие $\boldsymbol{x \in [-1;1]}$ воспользуемся логической функцией

И(логическое выражение1; логическое выражение2; …).

В нашем случае получим И(С3 >= – 1;С3 <= 1).

Таким образом формула для нахождения значения функции будет выглядеть следующим образом:

=**ЕСЛИ**(**И**(С3 >= – 1;С3 <= 1); 1 – С3*С3; **ABS**(С3) – 1).

Для вычисления модуля используется функция **ABS**(число).

График функции

.

Задания для самостоятельной работы

1. Постройте графики функций:

А) y = |x^2+5x-10|, [-10;5], шаг 0,5

В) $y = \begin{cases} \ln|x| + 5, x \le -1 \\ 5, x \in (-1;1) \\ \ln(x) + 5, x \ge 1 \end{cases}$, [-3;3], шаг 0,5.

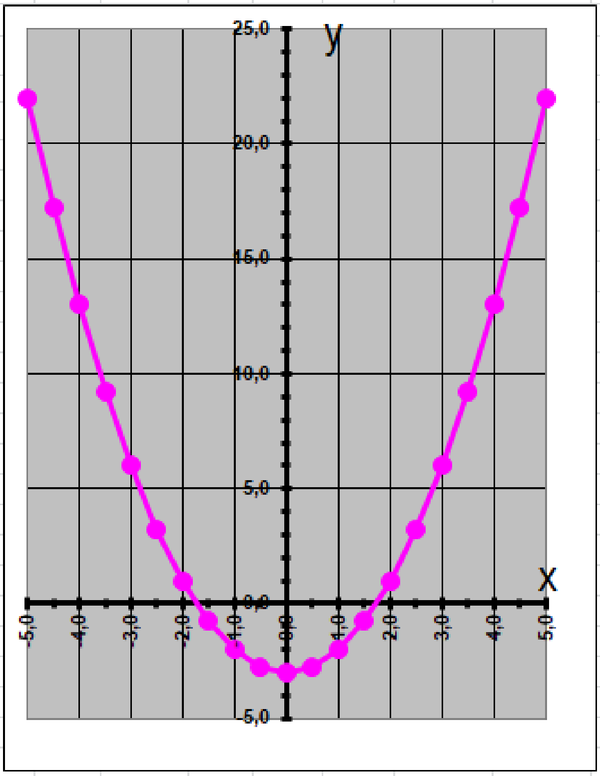
2. Построить график квадратичной функции y=a(x-m)^2 +n. Значения коэффициентов a, m, n задаются в отдельных ячейках. Примерный вид графика

Построение графика квадратичной функции y=a(x-m)^2 +n

Коэффициенты функции

a=	1	m=	0	n=	-3

x	y
-5,0	22,0
-4,5	17,3
-4,0	13,0
-3,5	9,3
-3,0	6,0
-2,5	3,3
-2,0	1,0
-1,5	-0,8
-1,0	-2,0
-0,5	-2,8
0,0	-3,0
0,5	-2,8
1,0	-2,0
1,5	-0,8
2,0	1,0
2,5	3,3
3,0	6,0
3,5	9,3
4,0	13,0
4,5	17,3
5,0	22,0



.

Лабораторная работа 2. Решение нелинейного уравнения с использованием инструмента Подбор параметра

Цель работы:

1. Научиться отделять корни нелинейного уравнения графически.
2. Освоить инструмент **Подбор параметра** для решения нелинейных уравнений с одной неизвестной.

Задание:

1. Найти все корни уравнения на отрезке [a, b], используя инструмент **Подбор параметра**.

2. Оформить созданный документ заголовками и поясняющими комментариями.

Варианты задания приведены в табл. 1.

Порядок выполнения (на примере уравнения $y = 1.8 \cdot (x + 0{,}5)^2 - \sin(10 \cdot x)$).

1. Запустите приложение **Excel**. Для выполнения работы используйте открывшуюся рабочую книгу.
2. Дважды щелкните на ярлычке текущего рабочего листа и дайте ему имя **Решение нелинейного уравнения**.
3. На первом этапе **– Локализация корней –** необходимо построить график искомой функции и по нему определить интервалы локализации корней. Для этого на рабочем листе создайте таблицу значений функции $y=f(x)$ на отрезке [–0,5; 0,5] с шагом изменения 0,1.
4. Постройте график функции $y=f(x)$ (тип - **График**).
5. Основываясь на данных таблицы и графика, выделите интервалы, на которых функция меняет знак. Это значит, что на каждом из них имеется корень. Для решаемого уравнения это интервалы [–0.4, –0.3], [0, 0.1] и [0.2, 0.3].

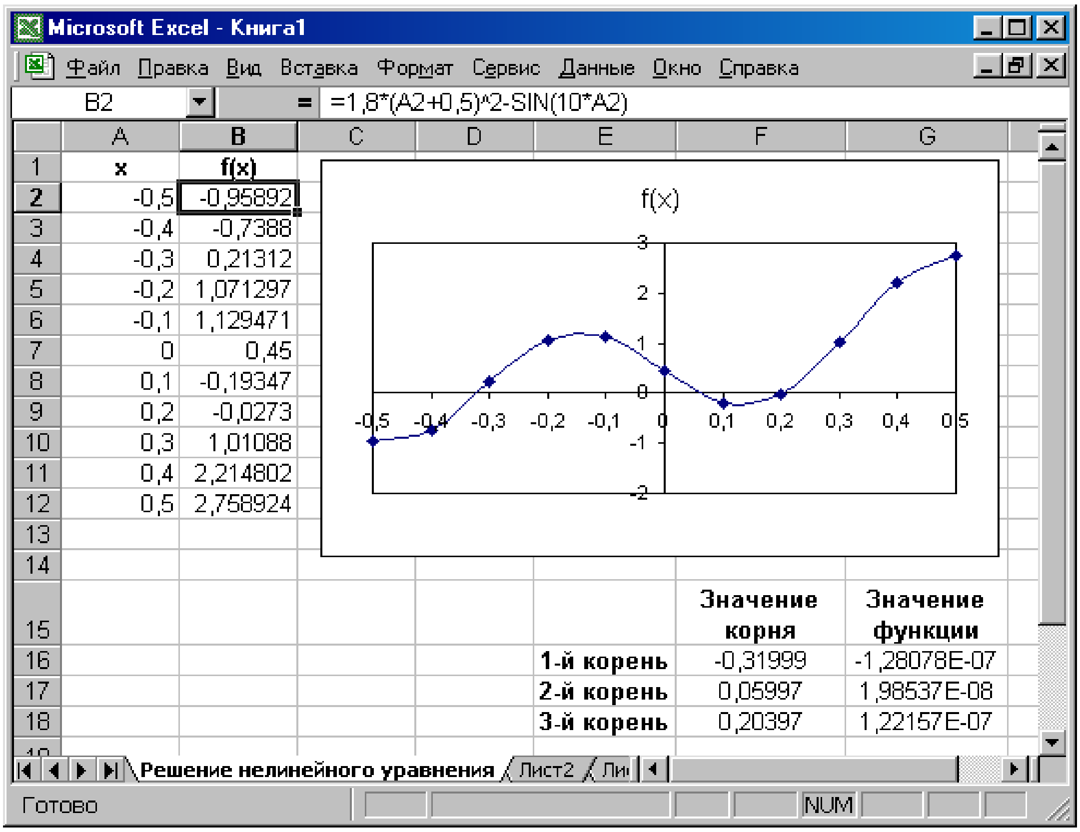
1. На втором этапе – **Уточнение корней –** на каждом из интервалов найти корень уравнения методом подбора параметра.

Для этого:

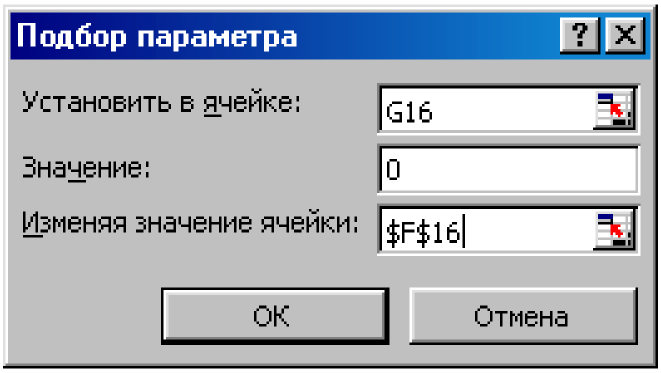
- выберите команду **СЕРВИС-Параметры**, на вкладке **Вычисления** установите относительную погрешность и предельное число итераций, равные 0,00001 и 1000 соответственно;
- введите в ячейки **F16**, **F17** и **F18** начальное приближение к корню на каждом отрезке (середину отрезка локализации корня), после применения Подбора параметра в этой ячейке будет находиться найденное приближенное значение корня (рис. 1.7);
- в ячейку **G16** запишите функцию, где вместо неизвестной *x* укажите ссылку на ячейку, отведенную под искомый корень (**F16**);
- скопируйте формулу в ячейки **G17** и **G18**, используя маркер автозаполнения;
- выберите команду **СЕРВИС-Подбор параметра;**
- в поле **Установить в ячейке** введите ссылку на ячейку **G16** (в которой введена формула);

·

- в поле **Значение** введите 0 (значение правой части уравнения);
- в поле **Изменяя значение ячейки** введите **F16** (ссылка на ячейку, отведенную под переменную), как показано на рис. 1.8;
- нажмите **OK**. На экране отображается окно **Результат подбора параметра** с результатами работы команды **Подбор параметра**. Найденное приближенное значение корня помещается в ячейку F16.
- аналогично найдите остальные корни.



Результаты решения нелинейного уравнения



Окно Подбор параметра

Задания для самостоятельной работы

.

№ вар.	Уравнение	№ вар.	Уравнение
1	$2^x – 5x – 3 = 0$	11	$3^x + 2x – 2 = 0$
2	$3x^4+4x^3–12x^2–5=0$	12	$x^4 – x^3 – 2x^2 + 3x – 3=0$
3	$x^4 – x – 1=0$	13	$3^x – 2x – 5 = 0$
4	$5^x – 8x = 0$	14	$3x^4 – 8x^3 – 18x^2 + 2=0$
5	$3x^4 + 8x^3 + 6x^2 – 10=0$	15	$x^4 – 18x^2 + 6=0$
6	$x^4 + 4x^3 – 8x^2 – 17=0$	16	$2^x – 3x + 2 = 0$
7	$3^{x-1} + 2 – x = 0$	17	$2x^4 + 8x^3 + 8x^2 – 1=0$
8	$3x^4 + 4x^3 – 12x^2 + 1=0$	18	$2x^4 – 8x^3 + 8x^2 – 1=0$
9	$5^x – 6x – 3 = 0$	19	$3x^4 + 4x^3 – 12x^2 + 1=0$
10	$2x^4 – x^2 – 10=0$	20	$3^x – 5x – 2 = 0$

Лабораторная работа 3. Решение систем линейных уравнений

I *Решение систем линейных уравнений методом Крамера.*

Пусть задана система линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad\qquad \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

Неизвестные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ вычисляются по формулам:

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta},\ i = 1,\ldots,n$$

Δ – определитель матрицы А,

Δ_i – определитель матрицы, полученный из матрицы А путем замены *i*-го столбца вектором b.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 & \dots & a_{2n} \\ & & & \dots & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & b_i & \dots & a_{in} \\ & & & \dots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Пример 1. Решить систему линейных уравнений методом Крамера.

$$\begin{cases} -5x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = -1, \\ -2x_1 + 3x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$$

Запишем в табличном процессоре Microsoft Office Excel 2007 матрицы, которые понадобятся нам при вычислениях.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1															
2		-5	2	3			1								
3	A=	1	2	-1		B=	-1								
4		-2	3	1			2								
5															
6															
7		1	2	3			-5	1	3			-5	2	1	
8	A_1=	-1	2	-1		A_2=	1	-1	-1		A_3=	1	2	-1	
9		2	3	1			-2	2	1			-2	3	2	
10															

Найдем определители Δ, Δ_1, Δ_2, и Δ_3, используя математическую функцию *МОПРЕД* .

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1															
2		-5	2	3			1								
3	A=	1	2	-1		B=	-1								
4		-2	3	1			2								
5															
6															
7		1	2	3			-5	1	3			-5	2	1	
8	A_1=	-1	2	-1		A_2=	1	-1	-1		A_3=	1	2	-1	
9		2	3	1			-2	2	1			-2	3	2	
10															
11															
12	Δ=	-2													
13	Δ_1=	-18													
14	Δ_2=	-4													
15	Δ_3=	-28													
16															

Корни уравнения найдем по формулам: $x_i = \dfrac{\Delta_i}{\Delta},\ i = 1,\dots,n$

В результате всех вычислений должны получиться следующие данные:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1															
2		-5	2	3			1								
3	A=	1	2	-1		B=	-1								
4		-2	3	1			2								
5															
6															
7		1	2	3			-5	1	3			-5	2	1	
8	A_1=	-1	2	-1		A_2=	1	-1	-1		A_3=	1	2	-1	
9		2	3	1			-2	2	1			-2	3	2	
10															
11															
12	Δ=	-2													
13	Δ_1=	-18			x_1=	9									
14	Δ_2=	-4			x_2=	2									
15	Δ_3=	-28			x_3=	14									

II *Решение систем линейных уравнений матричным методом*

Пусть дана система линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

Эту систему можно представить в матричном виде: $A \cdot X = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Умножим систему линейных алгебраических уравнений $A \cdot X = B$ слева на матрицу, обратную к A. Тогда система уравнений примет вид:

$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$.

Так как $A^{-1} \cdot A = E$ (единичная матрица), то получим $E \cdot X = A^{-1} \cdot B$.

Таким образом, вектор неизвестных вычисляется по формуле: $X = A^{-1} \cdot B$.

Пример 2. Решить систему линейных уравнений матричным методом.

$$\begin{cases} -5x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = -1, \\ -2x_1 + 3x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$$

Запишем в табличном процессоре матрицу A и столбец свободных членов B

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2		-5	2	3			1	
3	A=	1	2	-1		B=	-1	
4		-2	3	1			2	
5								
6								
7								
8								
9	A^{-1}=							
10								
11								

Исходные данные

Нам необходимо найти обратную матрицу A^{-1}, для этого:

1. выделите диапазон ячеек *B8:D10*;
2. вызовите функцию *МОБР*;
3. в появившемся диалоговом окне заполните поле ввода *Матрица*. Это поле должно содержать диапазон ячеек, в котором хранится исходная матрица, то есть *B2:D4*, нажмите кнопку ОК;

4. В первой ячейке выделенного диапазона появиться некоторое число. Чтобы получить всю обратную матрицу, необходимо нажать клавишу *F2*, для перехода в режим редактирования, а затем одновременно клавиши *Ctrl+Shift+Enter* .

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2		-5	2	3			1	
3	A=	1	2	-1		B=	-1	
4		-2	3	1			2	
5								
6								
7								
8		-3	-4	4				
9	A^{-1}=	-1	-1	1				
10		-4	-6	6				
11								

Осталось найти вектор неизвестных по формуле $X=A^{-1}\cdot B$, для этого:

1. выделите диапазон ячеек *G8:G10*;
2. вызовите функцию *МУМНОЖ*;
3. в поле для первой матрицы укажите диапазон *B8:D10***;**
4. в поле для второй матрицы укажите диапазон *G2:G4***;**
5. нажмите кнопку *ОК*.

В результате должны получиться следующие значения:

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2		-5	2	3			1	
3	A=	1	2	-1		B=	-1	
4		-2	3	1			2	
5								
6								
7								
8		-3	-4	4			9	
9	A^{-1}=	-1	-1	1		X=	2	
10		-4	-6	6			14	
11								

Самостоятельно сделайте проверку, для этого умножьте матрицу *A* на *X*. В результате должен получиться столбец *B*.

Задания для самостоятельной работы

Решите систему линейных уравнений:

.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 7, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = -9. \end{cases}$$

a) методом Крамера;

b) с помощью обратной матрицы.

Сделайте проверку.

Лабораторная работа 4. Решение задач оптимизации

Задачи оптимизации занимают очень важное место в бизнесе, производстве, прогнозировании. Условно эти задачи можно разделить на следующие категории:

- транспортная задача – минимизация расходов на транспортировку товаров;
- задача о назначениях – составление штатного расписания с минимизацией денежных затрат на заработную плату или времени выполнения работ;
- задачи оптимизации производства – максимизация выпуска товаров при ограничениях на сырье для производства этих товаров.

Прежде, чем искать оптимальное решение задачи необходимо построить ее математическую модель, т.е. осуществить перевод условия и решения на четкий язык математических отношений.

Задача оптимизации в общем виде формулируется следующим образом.

Найти значения переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$, такие, что целевая функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ примет максимальное, минимальное или заданное значения при ограничениях вида $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Таким образом, задача оптимизации содержит три основных компонента:

- *переменные* $x_1, x_2, \dots, x_n$ – определяемые величины;
- *целевая функция* – это цель, записанная математически в виде функции от переменных, принимающая максимальное, минимальное или заданное значения;
- *ограничения* – условия или соотношения, которым должны удовлетворять переменные.

MS Excel предоставляет возможность решения оптимизационных задач с помощью надстройки *Поиск решения*. При этом после создания математической модели на рабочем листе Excel создается табличная модель, где в отдельных ячейках содержаться переменные

.

решения, в отдельные ячейки записаны формулы, по которым будут вычисляться целевая функция и функции ограничений.

Продемонстрируем эту возможность на примере решения следующей транспортной задачи.

Пример 1. Компания «Атлант» хранит свою продукцию на трех складах (первом, втором и третьем), расположенных в разных частях города. На этих складах хранится продукция в количествах 1000, 3000 и 2500 штук соответственно. Продукцию необходимо доставить четырем оптовым покупателям «Урал», «Купец», «Гелиос» и «Меркурий» с минимальными затратами, заявки которых составляют 1300, 800, 2700 и 1700 штук соответственно. Склады оптовых покупателей также расположены в разных частях города. Стоимости (в рублях) доставки одной штуки продукции со складов компании на склады покупателей показаны в следующей таблице.

Склады компании	Оптовые покупатели			
	«Урал»	«Купец»	«Гелиос»	«Меркурий»
№1	50	150	60	75
№2	100	30	100	40
№3	70	180	210	120

1. Построим математическую модель задачи: определим переменные, целевую функцию и ограничения.

   Пусть:

   - $\mathbf{x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24}, x_{31}, x_{32}, x_{33}, x_{34}}$ – количество продукции, перевозимой со складов компании на соответствующие склады покупателей;
   - $\mathbf{z=50\,x_{11} + 150\,x_{12} + 60\,x_{13} + 75\,x_{14} + 100\,x_{21} + 30\,x_{22} +100\,x_{23} +40\,x_{24}+ +70x_{31}+180\,x_{32} + 210\,x_{33} + 120\,x_{34}}$ – целевая функция, общая стоимость доставки грузов покупателям;
   - $\mathbf{x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14}=1000,}$
     $\mathbf{x_{21} + x_{22} +x_{23} +x_{24}=3000,}$
     $\mathbf{x_{31}+x_{32} + x_{33} + x_{34}=2500}$ – ограничения для складов компании;
   - $\mathbf{x_{11}+ x_{21} + x_{31}=1300,}$
     $\mathbf{x_{12} + x_{22} + x_{32}=800,}$
     $\mathbf{x_{13} + x_{23} + x_{33}=2700,}$
     $\mathbf{x_{14}+ x_{24}+ x_{34}=1700}$ – ограничения для складов покупателей.

2. Имеем сбалансированную транспортную задачу, так как спрос покупателей (1300+800+2700+1700=6500) равен предложению производителей (1000+3000+2500=6500).

3. Запустите табличный процессор MS Excel. Переименуйте *Лист 1* в *Сбалансированная модель*.

4. Составьте табличную модель Excel

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		Стоимость доставки ед. продукции						
2		Покупатели						
3	Склады	«Урал»	«Купец»	«Гелиос»	«Меркурий»			
4	№1	50	150	60	75			
5	№2	100	30	100	40			
6	№3	70	180	210	120			
7								
8								
9		Перевозки (кол-во продукции)						
10								
11		Покупатели				Всего	Имеется на складе	
12	Склады	«Урал»	«Купец»	«Гелиос»	«Меркурий»			
13	№1	1	1	1	1	4	= 1000	
14	№2	1	1	1	1	4	= 3000	
15	№3	1	1	1	1	4	= 2500	
16								
17	Всего	3	3	3	3			
18	Необходимо	= 1300	= 800	= 2700	= 1700			
19								
20		Затраты на перевозки						
21								
22		Покупатели						
23	Склады	«Урал»	«Купец»	«Гелиос»	«Меркурий»	Всего		
24	№1	50	150	60	75	335		
25	№2	100	30	100	40	270		
26	№3	70	180	210	120	580		
27								
28	Всего	220	360	370	235	1185	Целевая функция	

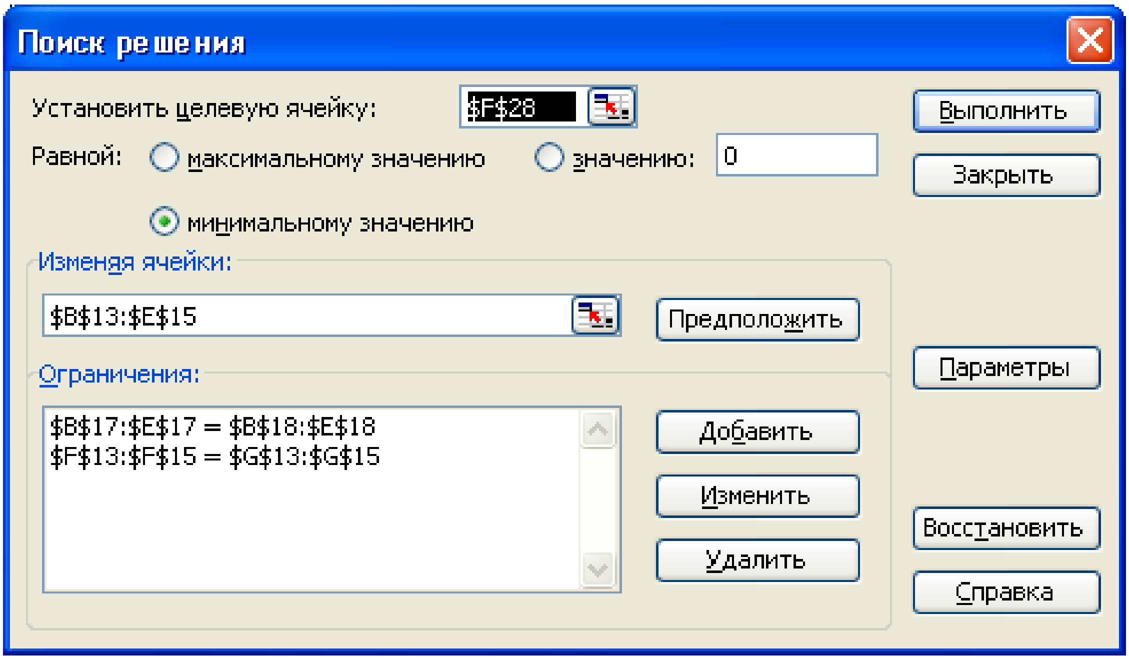
Сбалансированная модель

5. Последняя таблица не обязательна. Целевую функцию можно было вычислить по формуле:

6. =СУММПРОИЗВ(B4:E6;B13:E15).

7. Выделите целевую ячейку и запустите надстройку *Поиск решения (Данные* ▸ *Анализ* ▸ *Поиск решения)*.

8. В появившемся диалоговом окне *Поиск решения* укажите адреса целевой ячейки, диапазон изменяемых ячеек и ограничения Целевую ячейку установите равной минимальному значению.



Диалоговое окно «Поиск решения»

9. В диалоговом окне параметры *Поиска решения* установите флажки *Линейная модель, Неотрицательные значения* и *Автоматическое масштабирование.*

10. В диалоговом окне *Поиск решения* нажмите кнопку *Выполнить*.

11. Получаем оптимальное решение задачи

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		Стоимость доставки ед. продукции						
2		Покупатели						
3	Склады	П1	П2	П3	П4			
4	№1	50	150	60	75			
5	№2	100	30	100	40			
6	№3	70	180	210	120			
7								
8								
9		Перевозки (кол-во продукции)						
10								
11		Покупатели				Всего	Имеется на складе	
12	Склады	П1	П2	П3	П4			
13	№1	0	0	1000	0	1000	= 1000	
14	№2	0	800	1700	500	3000	= 3000	
15	№3	1300	0	0	1200	2500	= 2500	
16								
17	Всего	1300	800	2700	1700			
18	Необходимо	= 1300	= 800	= 2700	= 1700			
19								
20		Затраты на перевозки						
21								
22		Покупатели						
23	Склады	П1	П2	П3	П4	Всего		
24	№1	0	0	60000	0	60000		
25	№2	0	24000	170000	20000	214000		
26	№3	91000	0	0	144000	235000		
27								
28	Всего	91000	24000	230000	164000	509000	Целевая функция	
29								

Оптимальное решение задачи

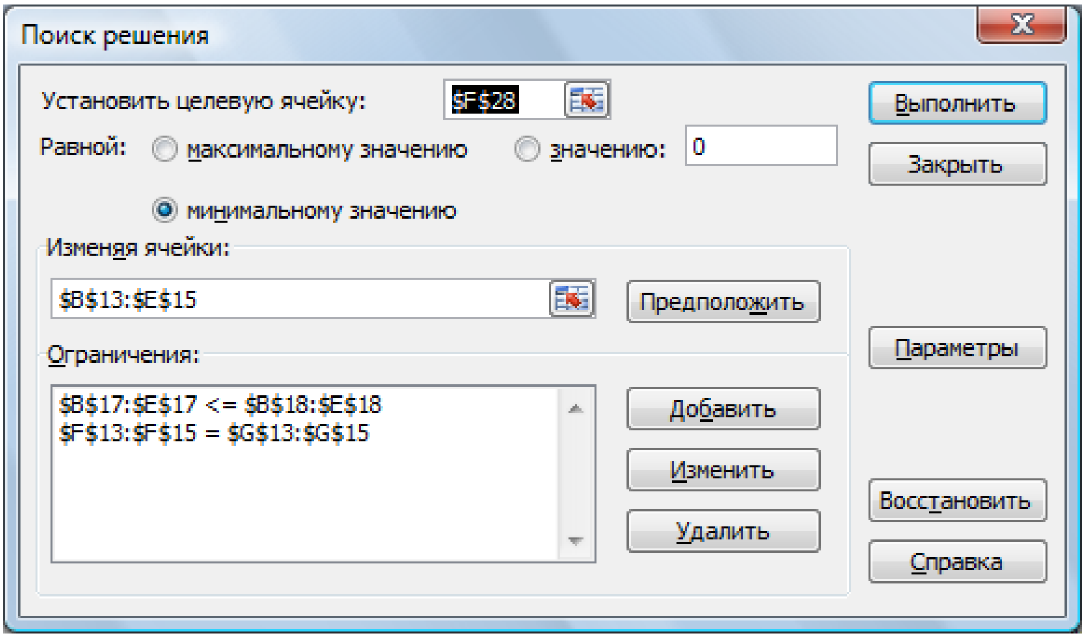
12. Скопируйте полученную табличную модель на *Лист 2* рабочей книги и переименуйте его в *Несбалансированная задача*.

13. Решим эту же задачу, немного изменив условие.

14. Пусть на складе №1 хранится не 1000 штук продукции, а 500. В таком случае на трех складах компании хранится 6000 штук продукции, покупатели по-прежнему заказывают 6500 штук. Перед нами транспортная задача с дефицитом.

15. Несбалансированная задача решается аналогично сбалансированной. Изменения коснуться только ограничений. Причем в ограничениях для складов покупателей знак «=» заменяется знаком « ≤ ».

16. После выполнения надстройки *Поиск решения* (рис. 52) получаем, что покупатель «Гелиос» недополучит 500 ед. продукции, а минимальные транспортные расходы составят 479 000.



Поиск решения

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		Стоимость доставки ед. продукции						
2		Покупатели						
3	Склады	«Урал»	«Купец»	«Гелиос»	«Меркурий»			
4	№1	50	150	60	75			
5	№2	100	30	100	40			
6	№3	70	180	210	120			
7								
8								
9		Перевозки (кол-во продукции)						
10								
11		Покупатели				Всего	Имеется на складе	
12	Склады	"Урал"	"Купец"	"Гелиос"	"Меркурий"			
13	№1	0	0	500	0	500	= 500	
14	№2	0	800	1700	500	3000	= 3000	
15	№3	1300	0	0	1200	2500	= 2500	
16								
17	Всего	1300	800	2200	1700			
18	Необходимо	<= 1300	<= 800	<= 2700	<= 1700			
19								
20		Затраты на перевозки						
21								
22		Покупатели						
23	Склады	"Урал"	"Купец"	"Гелиос"	"Меркурий"	Всего		
24	№1	0	0	30000	0	30000		
25	№2	0	24000	170000	20000	214000		
26	№3	91000	0	0	144000	235000		
27								
28	Всего	91000	24000	200000	164000	479000	Целевая функция	
29								

Оптимальное решение задачи

17. Покажите работу преподавателю.

Частным случаем транспортной задачи является *задача о назначениях*. В общем виде она формулируется следующим образом: имеется n различных работ и n рабочих. Известны стоимости выполнения каждого вида работ каждым работником. Необходимо так составить штатное расписание, чтобы все работы были выполнены, на выполнение каждой работы назначался только один работник, а затраты на заработную плату были минимальными. В данном случае задача является *сбалансированной*, так как количество работников равно количеству работ. Ограничения записываются в виде следующих равенств.

- $\mathbf{x_{11} + x_{12} + \ldots + x_{1n} = 1,}$

  $\mathbf{x_{21} + x_{22} + \ldots + x_{2n} = 1,}$

  …

  $\mathbf{x_{n1} + x_{n2} + \ldots + x_{nn} = 1}$ – ограничения для работников (каждый работник может выполнять только один вид работ).

- $\mathbf{x_{11} + x_{21} + \ldots + x_{n1} = 1,}$

  $\mathbf{x_{12} + x_{22} + \ldots + x_{n2} = 1,}$

  …

  $\mathbf{x_{1n} + x_{2n} + \ldots + x_{nn} = 1}$ – ограничения для работ (каждый вид работ может быть выполнен только одним работником).

.

$\mathbf{x_{ij}}$ – это двоичные переменные, которые могут принимать только два значения: 1, если работник i назначается на выполнение работы j и 0, если не назначается.

Решение задачи о назначениях рассмотрим на примере.

Пример 2. В лингвистическом центре работают 4 преподавателя по следующим направлениям: «Английский для начинающих», «Деловой английский», «Подготовка к ЕГЭ» и «Английский для путешествий». Стоимость академического часа работы каждого преподавателя по каждому курсу представлена в таблице. Составьте оптимальное распределение нагрузки среди сотрудников таким образом, чтобы все курсы были проведены, каждый преподаватель был занят только на одном виде работ, а затраты на заработную плату были минимальными.

№ п/п	ФИО преподавателя	Название курса			
		Английский для начинающих	Деловой английский	Подготовка к ЕГЭ	Английский для путешествий
1	Королев Д. А.	100	300	110	250
2	Воробьева А. С.	120	180	100	150
3	Соловьев Н. А.	200	200	80	170
4	Павлова Р. Г.	300	250	150	230

1. Построим математическую модель задачи: определим переменные, целевую функцию и ограничения.

Пусть:

- $\mathbf{x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24}, x_{31}, x_{32}, x_{33}, x_{34}}$ – двоичные переменные, которые могут принимать два значения: 1, если преподаватель i назначается на чтение курса j и 0, если не назначается;
- $\mathbf{z=100\ x_{11} + 300\ x_{12} + 110\ x_{13} + 250\ x_{14} + 120\ x_{21} + 180\ x_{22} +100\ x_{23} +150\ x_{24}+ +200\ x_{31}+200\ x_{32} + 80\ x_{33} + 170\ x_{34} +300\ x_{41}+250\ x_{42} + 150\ x_{43} + 230\ x_{44}}$ – целевая функция, общая стоимость работ;
- $\mathbf{x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14}=1,}$
  $\mathbf{x_{21} + x_{22} +x_{23}+ x_{24}=1,}$
  $\mathbf{x_{31} + x_{32} +x_{33}+ x_{34}=1,}$
  $\mathbf{x_{41} + x_{42} +x_{43}+ x_{44}=1,}$
  $\mathbf{x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41}=1,}$
  $\mathbf{x_{21} + x_{22} +x_{23}+ x_{24}=1,}$
  $\mathbf{x_{13} + x_{23} +x_{33}+ x_{43}=1,}$
  $\mathbf{x_{14} + x_{24} +x_{34}+ x_{44}=1}$ – ограничения (каждый преподаватель может быть задействован на чтении только одного курса и каждый курс должен быть проведен).

2. На основе математической модели на рабочем листе Excel создадим табличную модель

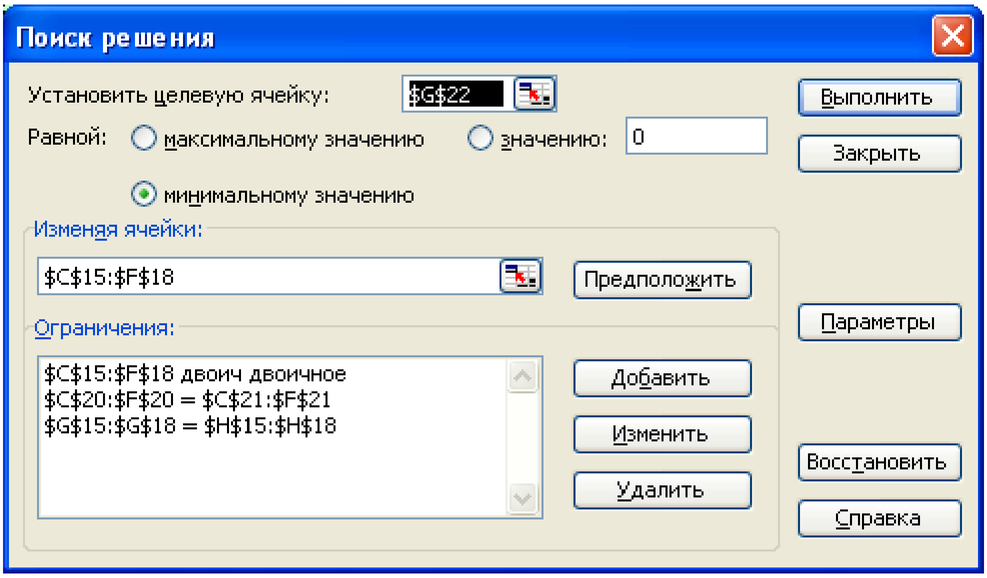
	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2		Стоимость академического часа работы преподавателей лингвистического центра						
3								
4			Название курса					
5	№ п/п	ФИО преподавателя	Английский для начинающих	Деловой английский	Подготовка к ЕГЭ	Английский для путешествий		
6	1	Королев Д. А.	100	300	110	250		
7	2	Воробьева А. С.	120	180	100	150		
8	3	Соловьев Н. А.	200	200	80	170		
9	4	Павлова Р. Г.	300	250	150	230		
10								
11		Распределение нагрузки среди преподавателей						
12								
13			Название курса					
14	№ п/п	ФИО преподавателя	Английский для начинающих	Деловой английский	Подготовка к ЕГЭ	Английский для путешествий	Всего	Необходимо
15	1	Королев Д. А.	1	1	1	1	4	= 1
16	2	Воробьева А. С.	1	1	1	1	4	= 1
17	3	Соловьев Н. А.	1	1	1	1	4	= 1
18	4	Павлова Р. Г.	1	1	1	1	4	= 1
19								
20		Всего	4	4	4	4		
21		Необходимо	= 1	= 1	= 1	= 1		
22					Целевая функция		2890	
23								

Задача о назначениях

3. Целевая функция в данном случае вычисляется по формуле =СУММПРОИЗВ(C6:F9;C15:F18).

4. Выделите целевую ячейку и запустите надстройку *Поиск решения (Данные ▸ Анализ ▸ Поиск решения).*

5. В появившемся диалоговом окне *Поиск решения* укажите адреса целевой ячейки, диапазон изменяемых ячеек и ограничения (рис. 55). Целевую ячейку установите равной минимальному значению. В диалоговом окне *Параметры поиска решения* установите флажки *Линейная модель и Автоматическое масштабирование.*



Поиск решения

6. В диалоговом окне *Поиск решения* нажмите кнопку *Выполнить*.

7. Получаем оптимальное решение задачи

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2		Стоимость академического часа работы преподавателей лингвистического центра						
3								
4			Название курса					
5	№ п/п	ФИО преподавателя	Английский для начинающих	Деловой английский	Подготовка к ЕГЭ	Английский для путешествий		
6	1	Королев Д. А.	100	300	110	250		
7	2	Воробьева А. С.	120	180	100	150		
8	3	Соловьев Н. А.	200	200	80	170		
9	4	Павлова Р. Г.	300	250	150	230		
10								
11		Распределение нагрузки среди преподавателей						
12								
13			Название курса					
14	№ п/п	ФИО преподавателя	Английский для начинающих	Деловой английский	Подготовка к ЕГЭ	Английский для путешествий	Всего	Необходимо
15	1	Королев Д. А.	1	0	0	0	1	= 1
16	2	Воробьева А. С.	0	0	0	1	1	= 1
17	3	Соловьев Н. А.	0	0	1	0	1	= 1
18	4	Павлова Р. Г.	0	1	0	0	1	= 1
19								
20		Всего	1	1	1	1		
21		Необходимо	= 1	= 1	= 1	= 1		
22					Целевая функция		580	
23								

Оптимальное решение задачи

Задания для самостоятельной работы

1. Фирма производит две модели А и В сборных книжных полок. Их производство ограничено наличием сырья (высококачественных досок) и временем машинной обработки. Для каждого изделия модели А требуется 3 $м^2$ досок, а для изделия модели В – 4 $м^2$. Фирма может получать от своих поставщиков до 1700 $м^2$ досок в неделю. Для каждого изделия модели А требуется 12 минут машинного времени, а для изделия модели В – 30 минут. В неделю можно использовать 160 часов машинного времени. Каждое изделие модели А приносит 2 $ прибыли, а каждое изделие модели В – 4 $. Сколько изделий каждой модели следует выпускать фирме в неделю, чтобы получать максимальную прибыль?
2. Фирма выпускает два набора удобрений для газонов: обычный и улучшенный. В обычный набор входят 3 фунта азотных, 4 фунта фосфорных и 1 фунт калийных удобрений, а в улучшенный – 2 фунта азотных, 6 фунтов фосфорных и 2 фунта калийных удобрений. Известно, что для некоторого газона требуется, по меньшей мере, 10 фунтов азотных, 20 фунтов фосфорных и 7 фунтов калийных удобрений. Обычный набор стоит 3 $, а улучшенный – 4 $. Сколько и каких наборов удобрений надо купить, чтобы обеспечить эффективное питание почвы и минимизировать стоимость?
3. Издательский дом «Живое слово» издаёт два журнала: «Следопыт» и «Путешественник», которые печатаются в трех типографиях: «Алмаз-Пресс», «Урал-Принт» и «Уникум-Пресс», где общее количество часов, отведенное для печати и производительность печати одной тысячи экземпляров, ограничены и представлены в следующей таблице:

Типография	Время печати одной тысячи экземпляров		Ресурс времени, отведенный типографией, час
	«Следопыт»	«Путешественник»	
Алмаз-Пресс	2	14	112
Урал-Принт	4	6	70
Уникум-Пресс	6	4	80
Оптовая цена, руб/шт	16	12	

Спрос на журнал «Следопыт» составляет 12 тысяч экземпляров, а на журнал «Путешественник» - не более 7,5 тысячи в месяц. Определите оптимальное количество издаваемых журналов, которое обеспечит максимальную выручку от продажи.

.

4. На кафедре работает 4 преподавателя-почасовика. Каждый из них может проводить определенные виды занятий. Почасовая оплата преподавателям по каждому виду работ представлена в таблице:

Преподаватели	Почасовая оплата курсов			
	Системный анализ	Информатика	Интеллектуальные информационные системы	Web-программирование
Алексеев И. М.	350	420	610	200
Ковалев Г. Н.	890	130	650	900
Семенова О. В.	430	520	600	720
Петров Г. П.	830	610	780	470

Составить план проведения учебных занятий так, чтобы все виды занятий были проведены, каждый преподаватель проводил занятия только по одному виду, а суммарная стоимость почасовой оплаты была минимальной.

5. Необходимо составить диету, состоящую из двух продуктов: А и В. Дневное питание этими продуктами должно давать не более 14 единиц жира, но и не менее 300 калорий. В одном килограмме продукта А содержится 15 единиц жира и 150 калорий, а в одном килограмме продукта В – 4 единицы жира и 200 калорий. При этом цена одного килограмма продукта А равна 15 $, а цена одного килограмма продукта В – 25 $. Какое количество продуктов в день необходимо употреблять для соблюдения диеты, чтобы вложенные средства были минимальными?
6. Компания хранит готовую продукцию на трех складах (первом, втором и третьем), расположенных в разных частях города. На этих складах хранится продукция в количествах 1000, 3000 и 2100 штук соответственно. Продукцию необходимо доставить четырем оптовым покупателям П1, П2, П3, П4 с минимальными затратами, заявки которых составляют 1300, 800, 2700 и 1700 штук соответственно. Склады оптовых покупателей также расположены в разных частях города. Стоимости (в рублях) доставки одной штуки продукции со складов компании на склады покупателей показаны в следующей таблице.

Склады компании	Оптовые покупатели			
	П1	П2	П3	П4
№1	50	150	60	75
№2	100	30	100	40
№3	70	180	210	120

7. Фабрика детских игрушек на одном сборочном участке собирает три вида игрушек: модели легкового автомобиля, гоночного автомобиля и грузовика. При сборке

каждого вида игрушки используется три вида операций (ручная сборка, «отверточная сборка» и проверка сборки). Ежедневный фонд рабочего времени на выполнение каждой операции ограничен величинами 490, 560 и 520 минут. Доход на одну игрушку каждого вида составляет соответственно 85, 100 и 125 руб. Время выполнения каждой операции в минутах, необходимое для сборки одной игрушки, показано в следующей таблице.

Операция	Модель легкового автомобиля	Модель гоночного автомобиля	Модель грузовика
Ручная сборка	2	3	3
«Отверточная» сборка	3	2	5
Проверка сборки	4	2	6

Количество производимых ежедневно моделей легковых автомобилей и грузовиков не должно быть меньше 20 и 15 штук соответственно.

Руководство фабрики решило добавить на этот сборочный участок производство новой игрушки, модели экскаватора, доходность которой прогнозируется на уровне 150 руб. Каждая модель экскаватора требует 3, 4 и 3минут выполнения операций трех видов. Фонд рабочего времени участка остается неизменным. Определите, выгодно ли фабрике начинать производство новых игрушек.

8. Завод производит электронные приборы трех видов (прибор А, прибор В и прибор С), используя при сборке микросхемы трех типов (тип 1, тип 2 и тип 3). Расход микросхем задается следующей таблицей.

Тип	Прибор А	Прибор В	Прибор С
1	2	1	1
2	1	1	4
3	2	2	1

Стоимость изготовленных приборов одинакова. Ежедневно на склад завода поступает 400 микросхем типа 1 и по 500 микросхем типов 2 и 3. Каково оптимальное соотношение дневного производства приборов различного вида, если производственные мощности завода позволяют использовать запас поступивших микросхем полностью. Решите эту же задачу, но с условием, что количество приборов каждого вида не должно быть меньше 90. Проанализируйте полученное решение.

9. Строительной фирме необходимо выполнить бетонные работы на четырех строящихся объектах. В фирме имеется 4 бригады бетонщиков, которые могут выполнить эту работу. Бригадиры каждой бригады побывали на объектах, оценили

объемы работ и рассчитали сроки, за которые они могут выполнить работы. Сроки (в рабочих днях) выполнения работ каждой бригадой приведены в следующей таблице.

Бригада	Объект			
	1	2	3	4
№1	30	40	50	60
№2	36	41	52	58
№3	28	44	49	57
№4	35	39	49	63

Распределите бригады по объектам таким образом, чтобы суммарный срок выполнения всех работ был минимальным.

10. Фирма производит два вида продукции: столы и стулья. Для изготовления одного стула требуется 3 кг древесины, а для изготовления одного стола – 7 кг. На изготовление одного стула уходит два часа рабочего времени, а на изготовление стола – 8 часов. Каждый стул приносит прибыль, равную 1 у. е., а каждый стол – 3 у. е. Сколько стульев и сколько столов должна изготовить эта фирма, если она располагает 420 кг древесины и 400 часами рабочего времени и хочет получить максимальную прибыль?