Лабораторная работа 1. Логика и исчисление высказываний

Цель: получить представление о методах и средствах формальной логики для решения практических задач.

Задачи:

1) определять простые и сложные высказывания, выявлять в сложных высказываниях логические связки;
2) осуществлять перевод с естественного языка на формальный и с формального на естественный язык;
3) определять значение истинности логической формулы, доказывать тождественную истинность или ложность формул, доказывать логические законы;
4) решать практические задачи с применением логических формул и таблиц истинности;
5) строить цепочки умозаключений с применением законов формальной логики.

Общие теоретические сведения

Условные обозначения логических связок

Таблица 1

Связка	*Операция*	*Обозначение*	*Правила чтения*
Не	Отрицание	$\neg A$	**Не** A
И	Конъюнкция	$A \wedge B$	A **и** B
Или	Дизъюнкция	$A \vee B$	A **или** B
Если…, то…	Импликация	$A \Rightarrow B$	**Если** A**, то** B
…, тогда и только тогда, когда…	Эквиваленция	$A \Leftrightarrow B$	A **тогда и только тогда, когда** B

Истинное высказывание условимся обозначать латинской буквой T (true), ложное высказывание F (false).

Чтобы определить значение истинности для сложной формулы, необходимо знать значения истинности для операций отрицания, конъюнкции, дизъюнкции, импликации, эквиваленции (см. табл. 2 - 6).

Таблица истинности для отрицания

Таблица 2

A	$\neg A$
T	F
F	T

Таблица истинности для конъюнкции

Таблица 3

A	B	$A \wedge B$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

Таблица истинности для дизъюнкции

Таблица 4

A	B	$A \vee B$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

Таблица истинности для импликации

Таблица 5

A	B	$A \Rightarrow B$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

Таблица истинности для эквиваленции

Таблица 6

A	B	$A \Leftrightarrow B$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

Формулы, имеющие все значения истинности при любых значениях переменных, называются *тождественно-истинными*. Тождественно-истинные формулы являются *законами логики*.

Логические законы доказываются с помощью таблиц истинности.

Практические задания

Примеры решений

I тип. Определение высказываний, выявление логических связок

Задание. Определить, является ли предложение высказыванием:

«С утра идет дождь».

Решение

а) Предложение является повествовательным. б) Мысль выражена утвердительно.

в) Относительно данного предложения можно однозначно сказать, является оно ложным или истинным.

Ответ: Да, предложение является высказыванием.

Задание. Определить, является ли предложение высказыванием:

«Реши эту задачу».

Решение

а) Предложение не является повествовательным (оно побудительное).

Ответ: Нет, предложение не является высказыванием.

II тип. Перевод с естественного языка на формальный

Задание. Представить высказывание в виде логической формулы: «Солнце светит тогда и только тогда, когда на небе нет туч».

Решение

а) Простых высказываний в данном предложении два:

1. *Солнце светит*,
2. *На небе есть тучи*.

Обозначим их латинскими буквами:

A – Солнце светит,

B – На небе есть тучи.

б) Логических связок в данном высказывании две: первая – *тогда и только тогда, когда*, вторая – *нет.* Первая соответствует операции эквиваленции ($\Leftrightarrow$), вторая – операции отрицания ($\neg$).

в) На основе пунктов а) и б) делаем вывод о том, что формула имеет следующий вид: $A \Leftrightarrow \neg B$.

Задание. Представить высказывание в виде логической формулы: «Неверно высказывание: книга интересная, если она дорогая, и ее скучно читать».

Решение

а) Простых высказываний в данном предложении три:

1. *Книга интересная*,
2. *Книга дорогая,*
3. *Книгу скучно читать*.

Обозначим высказывания латинскими буквами:

A – Книга интересная, B – Книга

дорогая,

C – Книгу скучно читать.

б) В данном высказывании можно заметить две особенности: 1) посылка и заключение «поменялись местами» друг с другом, 2) частица *то* в данном предложении пропущена, но можно легко определить ее местоположение – после слова *что.*

Логических связок в данном высказывании три: первая – *неверно высказывание*, вторая – *если, …то*, третья – *и.*

Поскольку отрицание стоит в начале предложения, данная операция относится ко всей формуле.

Первая логическая связка соответствует операции отрицания (¬), вторая операции импликации (=>), третья – операции конъюнкции (/\).

в) На основе пунктов а) и б) делаем вывод, что формула имеет следующий вид: $B \wedge C \Rightarrow \overline{A}$.

III тип. Нахождение значения истинности формулы, доказательство логических законов, доказательство тождественной истинности или ложности формул

Последовательность выполнения операций в логических формулах определяется старшинством операций. В порядке убывания старшинства логические операции расположены так: $\overline{x}$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$. Кроме того, на порядок операций влияют скобки, которые можно использовать в логических формулах.

Задание: вычислить значение логической формулы, предварительно указав порядок действий $\neg X \Leftrightarrow X \vee Y$;

Решение

$\overline{X}$ - первое действие;

$X \vee Y$ - второе действие;

$X \Leftrightarrow X \vee \overline{Y}$ третье действие.

	X	Y	$\neg X$	$X \vee Y$	$\neg X \Leftrightarrow X \vee Y$
1.	T	T	F	T	F
2.	T	F	F	T	F
3.	F	T	T	T	T
4.	F	F	T	F	F

Ответ: формула принимает истинное значение, когда X – истина,Y – ложь. Во всех остальных случаях формула принимает значение ложь.

IV тип. Решение задач с применением логических формул и таблиц истинности

Задача. Три студента: Андрей, Владимир и Сергей собирались в кинотеатр. Известно, Андрей пойдет тогда и только тогда, когда не пойдут одновременно Владимир и Сергей. Если пойдет Владимир, то пойдет Сергей. В итоге выяснилось, что Сергей пошел в кинотеатр. Выяснить, кто пошел с Сергеем.

Решение

а) Обозначим простые высказывания:

A – Андрей ходил в кинотеатр,

B – Владимир ходил в кинотеатр,

C – Сергей ходил в кинотеатр.

б) Представим известные факты в виде логических формул:

Андрей пойдет тогда и только тогда, когда не пойдут одновременно Владимир и Сергей – $A \Leftrightarrow \neg(B \wedge C)$.

Если пойдет Владимир, то пойдет Сергей – $B \Rightarrow C$

Сергей пошел в кинотеатр – C.

в) Из условия следует, что формулы $A \Leftrightarrow \neg(B \wedge C) = T$ и $B \Rightarrow C = T$ и $C = T$ (истинны). Составим таблицу истинности для данных высказываний и найдем значения переменных A и B в тех строках, где данные формулы принимают истинное значение (они выделены темным цветом):

A	B	C	$B \wedge C$	$\neg(B \wedge C)$	$A \Leftrightarrow \neg(B \wedge C)$	$B \Rightarrow C$
T	T	T	T	F	F	T
T	T	F	F	T	T	F
T	F	T	F	T	T	T
T	F	F	F	T	T	T
F	T	T	T	F	T	T
F	T	F	F	T	F	F
F	F	T	F	T	F	T
F	F	F	F	T	F	T

г) Так высказывания истинны в двух случаях: когда A – истинно или когда B – истинно, то в кинотеатр Сергей пошел либо с Андреем, либо с Владимиром (варианты, что пошли все трое или Сергей один – отклоняются).

Ответ: Сергей пошел с Андреем или с Владимиром.

V тип. Задачи на применение законов формальной логики

Задача. У каждой из трех одноклассниц Синельниковой, Красновой и Зелениной есть по одной ручке: у кого-то с зеленым стержнем, у другой с красным, у третьей – с синим.

Известно, что у каждой подружки ручка цветом, не соответствующим фамилии. Когда одноклассник попытался выяснить, у какой подружки какая ручка, Синельникова сказала, что у нее однозначно нет зеленой ручки. Какого цвета ручка у каждой из подружек?

Решение

а) Решим задачу, используя двухмерную таблицу, в столбцах перечислим цвета стержней: с – синий, з – зеленый, к – красный; в строках – фамилии: С – Синельникова, К – Краснова, З – Зеленина. На пересечении строк и столбцов будем ставить знак «+», если у школьницы есть стержень соответствующего цвета, знак «–» – если стержня нет.

Решение задачи с помощью двухмерной таблицы

Таблица 7.1

	с	к	з
С			
К			
З			

б) Из условия следует, что у Синельниковой нет синей и зеленой ручки, у Красновой нет красной, у Зелениной отсутствует зеленая ручка. Поставим в соответствующих ячейках таблицы знаки «–» (табл. 7.2.).

Таблица 7.2

Решение задачи с помощью двухмерной таблицы (продолжение)

	с	к	з
С	–		–
К		–	
З			–

в) У Синельниковой нет ни зеленой, ни синей ручки, следовательно, у нее может быть только красная ручка. Поэтому у других подружек уже не может быть красной ручки. Отобразим это в таблице 7.3.

Таблица 7.3

Решение задачи с помощью двухмерной таблицы (продолжение)

	с	к	з
С	–	+	–
К		–	
З		–	–

г) Из таблицы 7.3 очевидно, что синяя ручка может быть только у Зелениной, а зеленая ручка может быть только у Красновой. Получим итоговую таблицу (табл. 7.4.).

Решение задачи с помощью двухмерной таблицы (итог)

Таблица 7.4

	с	к	з
С	–	+	–
К	–	–	+
З	+	–	–

Ответ: у Синельниковой красная ручка, у Красновой – зеленая, у Зелениной – синяя.

Примечание 1. Задачу можно решить и простым перебором вариантов, но фиксирование результатов рассуждений в таблице делает решение более наглядным и позволяет не упустить ни одну версию.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Определить, является ли предложение высказыванием. Высказывания обозначить и определить их истинность:

а) Сегодня воскресенье.

б) Дисплей – это устройство ввода информации. а) Проверь домашнее задание.

в) Математика – это наука о количественных отношениях и пространственных формах действительного мира.

г) День был дождливым?

д) 19 делится на 5 без остатка. е) Какой красивый дом!

ж) Александр Сергеевич Пушкин – великий поэт серебряного века.

Задача 2. Представить высказывания в виде логических формул:

а) Если пойдешь гулять, то возьмешь с собой зонт или наденешь плащ. б) Человек голоден тогда и только тогда, когда он не умеет готовить.

Задача 3. Построить таблицы истинности для формул:

а) $\overline{C} \wedge A \Rightarrow \overline{B}$

б) $A \wedge \overline{C} \vee \overline{A} \wedge C$

в) $\overline{X} \vee \overline{Z} \Rightarrow Y$

Задача 4. Определить, являются ли формулы тождественно истинными:

а) $(A \vee B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge C \vee B \wedge C$

б) $A \Rightarrow B \Leftrightarrow \overline{A \wedge \overline{B}}$

в) $A \Rightarrow B \wedge A$——— –

Задача 5. У сороки было трое птенцов: *A, B, C*. Кого сорока угостила кашей, если известно, что если она угостит *A* и *C*, то и *B* получит свою порцию. Также известно, что *A* не угостит тогда и только тогда, когда не угостит *C*.

Задача 6. В картинной галерее украдено полотно. В момент кражи в галерее могли находиться три человека: охранник, смотритель и уборщица. В ходе допроса смотритель сказал: «Если в момент кражи в помещении был я, то не было уборщицы или был охранник». Затем следствие выяснило, что смотритель солгал. Кто украл полотно?

Задача 7. После угона четыре машины: «Жигули», «Волга», «Запорожец» и «Москвич» были перекрашены в один цвет. Известно, что до угона машины были разных цветов: желтого, зеленого, синего, красного. Показания свидетелей позволили выявить следующее. Во-первых, водитель «Жигулей» возил владельца машины желтого цвета, и это был не водитель «Волги». Во-вторых, пассажирами на синей машине видели водителей «Волги» и «Запорожца». В-третьих, водитель «Жигулей» не любит синий цвет, так же сильно, как водитель «Волги» не любит красный цвет. Какой цвет соответствовал каждой марке машины до угона?

Лабораторная работа 2. Множества.

Цель: овладеть навыками теоретико-множественного представления объектов реальной и абстрактной действительности.

Задачи:

1) научиться находить множества и их элементы в окружающей действительности и в абстрактных структурах;

2) осуществлять переход от одного способа задания множества к другому и распознавать возможность такого перехода;

3) определять мощность множеств;

4) определять отношения между множествами;

5) выполнять и определять операции над множествами;

6) доказывать свойства операций над множествами;

7) решать практические задачи с применением операций над множествами.

Общие теоретические сведения

Понятие «*множество*» является одним из основных понятий математики, не определяемых через другие. Это понятие можно рассмотреть на примерах.

Пример 1

множество яблок, растущих на яблоне;

множество студентов, обучающихся в АГПА;

множество денежных знаков, находящихся в обороте у населения Российской Федерации;

множество прямоугольников;

множество двусложных слов в русском языке;

множество букв в английском алфавите, или множество согласных букв в русском алфавите;

множество натуральных чисел; множество иррациональных чисел.

Определяющие признаки множества:

1) рассматривается некоторое собрание реально существующих или абстрактных объектов или явлений;

2) это собрание объектов или явлений может быть представлено как одно

целое;

3) природа объектов или явлений, входящих в множество, может быть любая, но объекты или явления одного множества должны быть одной природы;

4) все объекты множества должны отличаться друг от друга.

5) Множества обозначаются прописными буквами латинского алфавита: A, B, C, …, Z. Объекты, из которых образовано множество, называются ***элементами***. Элементы множества обозначаются строчными буквами латинского алфавита: a, b, c, …, z.

Принадлежность элемента к какому-либо множеству записывается с помощью символа $\in$. Математическое выражение $a \in A$ означает, что объект a принадлежит множеству A, а выражение $a \notin A$ означает, что объект a не принадлежит множеству A.

Способы задания множества:

1) через характеристическое свойство: $D = y\{P(y)\}$, где $P(y)$ – характеристическое свойство множества D;
2) перечислением всех элементов множества.

Элементы ***конечного*** множества можно перечислить, а элементы ***бесконечного*** множества даже теоретически нельзя собрать в законченную совокупность. Конечные множества можно задать как перечислением, так и с помощью характеристического свойства. Бесконечные множества задаются только с помощью характеристического свойства.

Мощность конечного множества – это количество элементов, которые принадлежат данному множеству, обозначается как m (A), что означает мощность множества A.

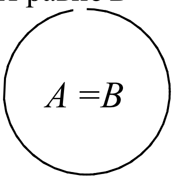
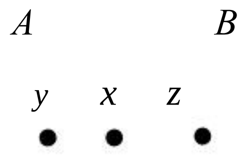
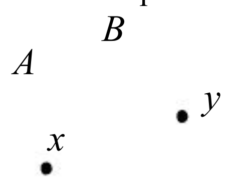
Пустое множество – это множество, не содержащее элементов. Мощность пустого равна 0**.**

Отношения между множествами представлены в таблице 1.

Таблица 1

Отношения между множествами

Отношение. Диаграмма Эйлера-Венна	Определение	Условная запись	Условия проверки
B строго включается в A B A • x B подмножество A	Если каждый элемент множества B является элементом множества A, и в множестве A есть хотя бы один элемент, не принадлежащий B, то говорят, что множество B *строго включается* в множество A	$B \subset A$	1) $(\forall x \in B)$ $x \in A$ 2) $(\exists y \in A)\, y \notin B$
B нестрого включается в A B A B	Если каждый элемент множества B является элементом	$B \subseteq A$	$(\forall x \in B)$ $x \in A$

подмножество A	множества A, то говорят, что множество B *нестрого включается* в множество A		
A равно B 	Если $B \subseteq A$ и $A \subseteq B$, то множества A и B называются *равными*. Обозначаются как $A = B$	$A = B$	1) $(\forall x \in B)$ $x \in A$ 2) $(\forall y \in A)$ $y \in B$
A и B пересекаются 	Если множества A и B имеют общие элементы, то такие множества называются *пересекающимися*	$B \cap A \neq \varnothing$	$(\exists x \in A)\, x \in B$
A и B не пересекаются 	Если два множества не имеют общих элементов, то они называются *непересекающимися*	$B \cap A = \varnothing$	1) $(\forall x \in A)\, x \notin B$ 2) $(\forall y \in B)\, y \notin A$

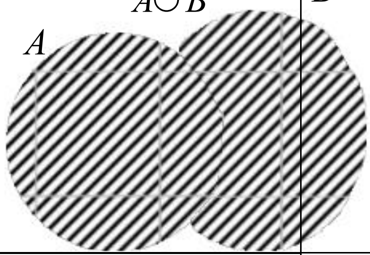
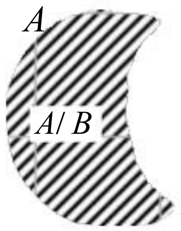
Из элементов нескольких множеств можно образовывать новые множества, такие преобразования называются *операциями над множествами*.

Основные операции над множествами представлены в таблице 10.

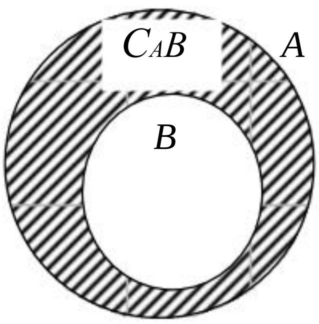
Таблица 10

Операции над множествами

Операция. Диаграмма Эйлера-Венна	Обозначение и характеристическо е свойство	Определение
Пересечение	$A \cap B =$	*Пересечением* множеств A и B

A  $A \cap B$	B $= \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$	называется множество, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат множеству A **и** множеству B
Объединение $A \cup B$ A 	B $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$	*Объединением* множеств A и B называется такое множество, все элементы которого принадлежат множеству A **или** множеству B
Разность A  A/B	B $A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$	*Разностью* множеств A и B называется множество, содержащее все элементы, которые принадлежат множеству A и не принадлежат B

В случае, когда B – подмножество A ($B \subset A$), разность $A \setminus B$ называют дополнением множества B до множества A и обозначают $C_A B$.



Множество, объединяющее несколько множеств, называется ***универсальным*** для данных множеств. Универсальное множество – неоднозначно. Например, рассматриваемые множества A – множество кошек, B – множество собак, C – множество коров. Для множеств A, B, C универсальным являются множества U_1 – множество домашних животных, U_2 – множество млекопитающих, U_3 – множество четвероногих.

Основные свойства операций над множествами

1. $A \cap B = B \cap A$ 1'. $A \cup B = B \cup A$

Коммутативное свойство операций пересечения и объединения соответственно.

2. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ 2'. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

Ассоциативное свойство операций пересечения и объединения соответственно.

3. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ 3'. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Дистрибутивное свойство операции пересечения относительно объединения и операции объединения относительно пересечения соответственно.

4. $A \cap (A \cup B) = A$ 4'. $A \cup (A \cap B) = A$

Закон поглощения.

5. $A \cap A = A$ 5'. $A \cup A = A$

Законы идемпотентности.

6. $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus B$.

7. $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$.

8. $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cap C)$.

9. $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

10. $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

Типы практических задач, для решения которых используется теория множеств

Разбиение множеств. Классификация

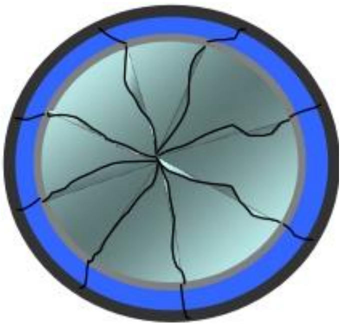
Классификация – действие распределения объектов по классам.

Любая классификация связана с разбиением некоторого множества объектов на подмножества. При этом считают, что множество разбито на классы $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$, если:

1) подмножества $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ попарно не пересекаются;

2) объединение подмножеств $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ совпадает с множеством X.

Если одно из условий не выполнено, то классификация считается неправильной.



Классификация относится к такой операции над множествами как разбиение множеств. Наглядно эту операцию можно представить в виде разбитой тарелки. Кусочки разбитой тарелки не пересекаются, и при соединении их вновь получается «целая» тарелка.

Переход от одного способа задания множества к другому

От характеристического способа задания множества к перечислению элементов целесообразно переходить для конкретизации, уточнения полученной информации. Переход к характеристическому способу задания множества обычно осуществляют с целью обобщения, сокращения количества информации при передаче информационного сообщения.

Принадлежность элемента к множеству

При выполнении различных тестов, при решении практических задач часто приходится отвечать на вопрос: «Какой элемент в данном ряде объектов является лишним». В данном случае используется проверка принадлежности элемента к какому-либо множеству.

В подобных задачах в первую очередь выясняется, к какому множеству принадлежат большинство элементов, затем проверяется принадлежность каждого элемента к выявленному множеству. Если элемент не принадлежит множеству, то он исключается из ряда предложенных объектов.

Отношения между множествами

1.Чтобы избежать двусмысленности, путаницы при изложении своих мыслей, часто приходится выяснять, *в каких отношениях находятся различные множества*.

2.Понятие подмножества является *обобщением понятия части и целого*.

3.При введении определений или описании понятий используются *родовые и видовые отношения между понятиями*.

Пусть a, b – понятия, $a \in A,\ b \in B$, A, B – соответственно объемы данных понятий (множество всех объектов, обозначаемых одним термином).

Если $A \subset B$, то a – видовое понятие по отношению к $в$, $в$ – родовое по отношению к a. Видо-родовые отношения понятий зависят от взаимного расположения множеств их объемов.

В случае, когда множества A и B пересекаются, об отношениях рода и вида для понятий a и $в$ говорить нельзя. Но при пересечении объемов понятий часто образуется новое слово или словосочетание (студент-спортсмен, мать-героиня, город-герой и т. д.).

Для объема любого определяемого понятия существует неопределяемое понятие (категория), в объем которого оно может быть включено. У категорий определения не может быть, они могут быть только описаны.

Подсчет количества элементов в объединении, пересечении и разности конечных множеств

Число элементов в объединении двух непересекающихся множеств.

Правило 1. Если в множестве *A* содержится *a* элементов, а в множестве *B* – b элементов и множества *A* и *B* не пересекаются, то в объединении множеств *A* и *B* содержится $a + b$ элементов, т. е. $m(A \cup B) = m(A) \quad m(B) = a \quad b$.

Число элементов в объединении n *непересекающихся множеств*

Правило 2. Множества A_1, A_2, …, A_n попарно не пересекаются, то $m(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n) = m(A_1) \quad m(A_2) \quad ... \quad m(A_n)$.

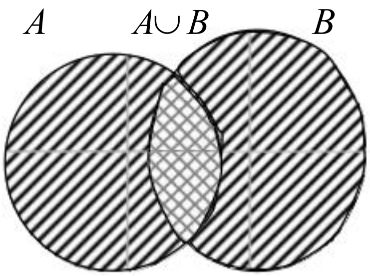
Число элементов разности двух множеств

Правило 3. Если в множестве *A* содержится *a* элементов, а в множестве B – b элементов и $B \subset A$, то во множестве $A \backslash B$ содержится a - b элементов, т. е. $m(A \setminus B) = m(A) \quad m(B) = a \quad b$.

Число элементов в объединении двух пересекающихся множеств

Правило 4. Если в множестве *A* содержится *a* элементов, а в множестве *B* – b элементов и множества *A* и *B* пересекаются и в пересечении содержится *c* элементов, то в объединении множеств *A* и *B* содержится $a + b$ - c элементов $m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B)$.

Данное правило обосновывается тем что, складывая элементы пересекающихся множеств *A* и *B*, мы дважды считаем элементы, принадлежащие их пересечению.



Практические задания

Примеры решений

I тип. <u>Способы задания множеств. Принадлежность элементов множеству. Мощность множеств</u>

Задача. Определить способ задания множества A = {а, б, в, г, д, е, ё, ж, з, и, й, к, л, м, н, о, п, р, с, т, у, ф, х, ц, ч, ш, щ, ь, ы, ъ, э, ю, я}. *Перейти к другому способу, если это возможно. Определить мощность множества. Определить, принадлежат ли элементы:* п, 1, L, л, д, g, s, 8, u, й, ж, i, ю, я, 1500 *данному множеству.*

Решение

а) Перечислены все элементы множества A, следовательно, множество задано перечислением. Любое множество можно задать с помощью характеристического свойства.

б) Общим свойством элементов данного множества A является то, что все они буквы русского алфавита. Следовательно, с помощью характеристического свойства множество представимо как

$A = \{x \mid x$ – буква русского алфавита$\}$.

в) Общее число элементов множества A, множества букв русского алфавита, равно 33, поэтому его мощность $m(A) = 33$.

г) Чтобы определить, принадлежит ли элемент множеству A, достаточно проверить, перечислен ли он как его элемент.

Ответ: множество задано перечислением, характеристическое свойство $A = \{x \mid x$ – буква русского алфавита$\}$, $m(A) = 33$, п $\in A$, $1 \notin A$, L $\notin A$, л $\in A$, д $\in A$, g $\notin A$, s $\notin A$, $8 \notin A$, u $\notin A$, й $\in A$, ж $\in A$, I $\notin A$, ю $\in A$, я $\in A$, $1500 \notin A$.

Задача. Определить способ задания множества C – множества прямых. Перейти к другому способу, если это возможно. Определить мощность множества. Определить, принадлежат ли горизонтальные прямые, окружность, кошки, вертикальные прямые, числа данному множеству.

Решение

а) Множество C задано характеристическим свойством неявно. Явная форма задания $C = \{w \mid w - \text{прямая}\}$.

б) Прямых существует бесконечно много, поэтому множество C является бесконечным и задать его перечислением нельзя.

в) Если a – горизонтальные прямые, b – окружность, c – кошки, d – вертикальные прямые, e – числа, то так как параллельные и перпендикулярные прямые являются прямыми, а все остальные объекты ими не являются, следовательно, $a \in C$, $b \notin C$, $c \notin C$, $d \in C$, $e \notin C$.

Ответ: Множество C задано характеристическим свойством, перечислением не задается, $a \in C$, $b \notin C$, $c \notin C$, $d \in C$, $e \notin C$, где a – горизонтальные прямые, b – окружность, c – кошки, d – вертикальные прямые, e – числа.

II тип. Отношения между множествами

Задача. Определить, о каком отношении между множествами идет речь. Записать отношения между множествами с помощью условной записи. Изобразить отношения между множествами с помощью кругов Эйлера-Венна:

а) A – множество научных дисциплин, за достижения в которых вручается Нобелевская премия, B – множество всех научных дисциплин.

б) E – множество бегемотов, F – множество гиппопотамов.

в) G – множество людей, H – множество жилых домов.

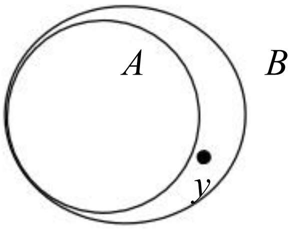
г) I – множество студентов, J – множество людей, увлекающихся классической музыкой.

Решение

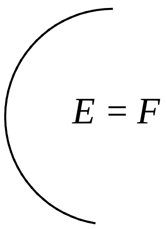
При решении воспользуемся определениями отношений, приведенных в таблице 9.

а) Известно, что за достижения в математике Нобелевская премия не вручается. Получается, что не каждый элемент множества B содержится в множестве A, тогда как каждый элемент множества A принадлежит множеству

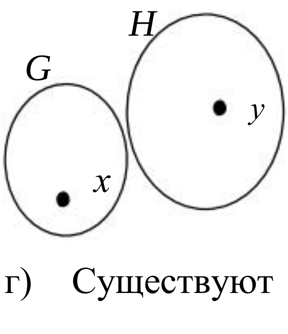
B. То есть 1) $(\forall x \in A) \quad x \in B$ и 2) $(\exists y \in B)\, y \notin A$. Исходя из определения отношения строго включения, приходим к выводу, что множество А строго включается в В. Условная запись $A \subset B$.



б) Каждый бегемот является гиппопотамом, и каждый гиппопотам является бегемотом, т. е. $(\forall x \in E) \quad x \in F$ и $(\forall y \in F) \quad y \in E$, следовательно, $E \subseteq F$ и $F \subseteq E$. По определению равенства множеств приходим к выводу, что множества E и F равны (совпадают). Условная запись $E = F$.

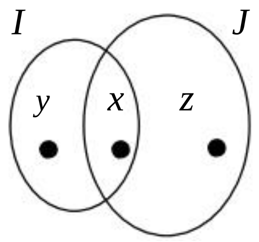


в) Ни один человек не является жилым домом, также ни один дом не является человеком (т. е. $(\forall x \in G)\, x \notin H$ и $(\forall y \in H)\, y \notin G$), следовательно, множества G и H не имеют общих элементов ($\exists\, \overline{z(z} \in B \wedge z \in A)$). Исходя из определения, можно сделать вывод, что множества G и H не пересекаются. Условная запись $G \cap H = \varnothing$.



г) Существуют люди, являющиеся одновременно студентами и увлекающиеся классической музыкой $\exists x(x \in I \wedge x \in J)$. Также есть студенты, не увлекающиеся классической музыкой $\exists y(y \in I \wedge y \notin J)$, и есть люди, увлекающиеся классической музыкой, но не являющиеся студентами

$\exists z(z \in J \wedge z \notin I)$. Получается, что множества I и J имеют общие элементы, и имеют элементы, принадлежащие одному множеству, но не принадлежащие другому, следовательно, по определению пересекающихся множеств I и J пересекаются. Условная запись $I \cap J \neq \varnothing$.



Задача. Сравнить множество A с множествами B, C, D. Если множества пересекаются, найти их пересечения. Найти универсальное множество для данных множеств. Изобразить отношения между множествами с помощью кругов Эйлера-Венна.

A = {красный, желтый, синий, зеленый}.

B = {красный, желтый}.

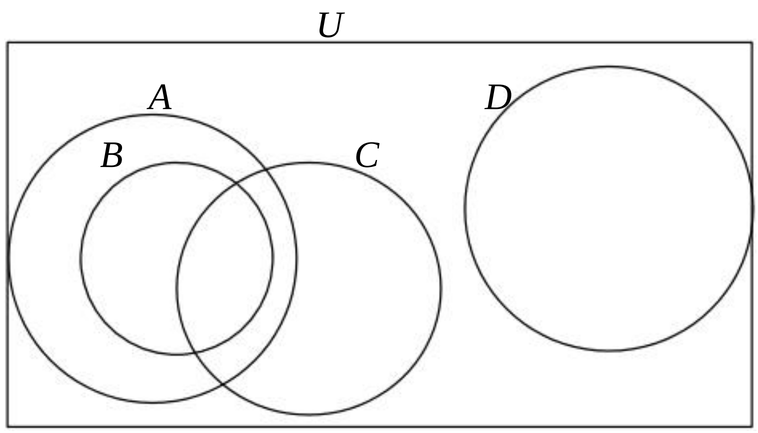
C = {желтый, синий, черный, оранжевый}.

D = {коричневый, голубой, розовый}.

Решение. Все элементы множества B содержатся во множестве A, но не все элементы множества A являются элементами множества, поэтому $B \subset A$.

$A \cap B$ = {красный, желтый}. $A \cap C$ = {желтый}. $A \cap D = \varnothing$.

U = {множество цветов}.



Задача. Сравнить множество A с множествами B, C, D. Сравнить множества B, C, D. Найти попарно пересечение множеств B, C, D. Найти универсальное множество для данных множеств. Изобразить отношения между множествами с помощью кругов Эйлера-Венна.

$A = \{a \mid a$ – студент АГПА$\}$.

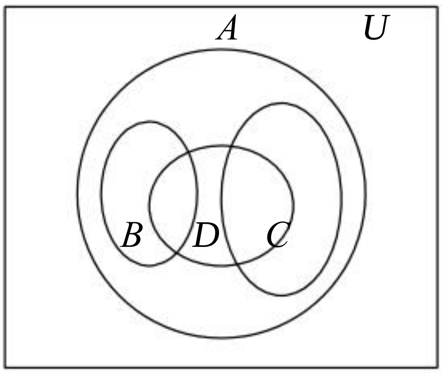
$B = \{b \mid b$ – студент - филолог АГПА$\}$.

$C = \{c \mid c$ – студент-историк АГПА$\}$.

$D = \{d \mid d$ – студент первого курса АГПА$\}$.

Решение

$B \subset A$, $C \subset A$, $D \subset A$, $B \not\cap C$, $B \cap C = \varnothing$. $B \cap D$ – студенты-филологи первого курса АГПА. $C \cap D$ – студенты-историки первого курса АГПА. U – множество всех студентов АГПА.

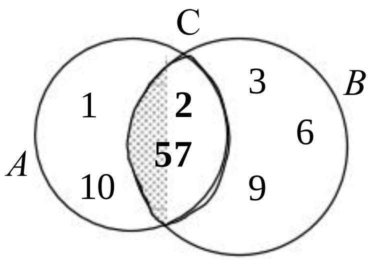


III тип. Операции над множествами

Задача. Найти множество, являющееся пересечением множеств $A = \{1, 2, 5, 7, 10\}$ *и* $B = \{2, 3, 5, 6, 7, 9\}$, *и мощность найденного множества. Построить диаграммы Эйлера-Венна.*

Решение

По определению операции пересечения, искомое множество C будет состоять из тех и только тех элементов, которые принадлежат и множеству A и множеству B. То есть $C = A \cap B = \{2, 5, 7\}$. $m(C) = 3$.



Ответ: $C = A \cap B = \{2, 5, 7\}$, $m(C) = 3$.

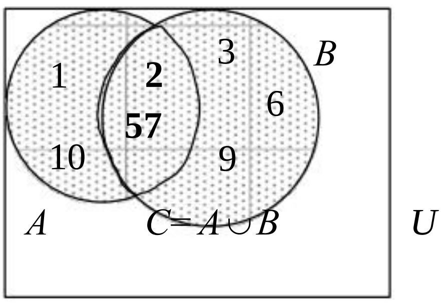
Задача. Найти множество, являющееся объединением множеств

$A = \{1, 2, 5, 7, 10\}$ *и* $B = \{2, 3, 5, 6, 7, 9\}$, *и мощность найденного множества. Найти универсальное множество для множеств A и B. Построить диаграммы Эйлера-Венна.*

Решение

По определению операции объединения, искомое множество C будет состоять из тех и только тех элементов, которые принадлежат множеству A или B. То есть $C = A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10\}$. $m(C) = 8$.

U – универсальное множество, то есть множество, объединяющее множества A и B. Например, это может быть множество первых 10 натуральных чисел, а именно $U = \{x \mid x \leq 10, \text{где } x \in N\}$.



Ответ: $C = A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10\}$, $m(C) = 8$,

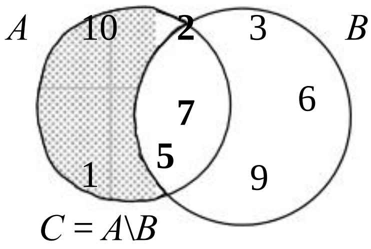
$U = \{x \mid x \leq 10, \text{где } x \in N\}$.

Задача. Найти множество, являющееся разностью множеств

$A = \{1, 2, 5, 7, 10\}$ *и* $B = \{2, 3, 5, 6, 7, 9\}$, *и мощность найденного множества. Построить диаграммы Эйлера-Венна.*

Решение

По определению разности, искомое множество C будет состоять из тех и только тех элементов, которые принадлежат множеству A и не принадлежат B. То есть $C = A \setminus B = \{1, 10\}$. $m(C) = 2$.



Ответ: $C = A \setminus B = \{1, 10\}$, $m(C) = 2$.

Задача. Даны множества $R = \{x \mid x$ – *учитель химии*$\}$, $E = \{y \mid y$ – *учитель биологии*$\}$. *Найти* $R \cap E$, $R \cup E$, $R \setminus E$, $E \setminus R$, U – *универсальное множество для множеств* R *и* E.

Решение

Опираясь на определения соответствующих операций над множествами, найдем пересечение, объединение и разность данных множеств.

$R \cap E = \{z \mid z$ – учитель химии и биологии$\}$ – учителя химии и биологии одновременно.

$R \cup E = \{w \mid w$ –учитель химии или биологии$\}$ – все учителя химии, биологии и учителя одновременно химии и биологии.

$R \setminus E = \{y \mid y$ – учитель химии$\}$ – только учителя химии.

$E \setminus R = \{t \mid t$ – учитель биологии$\}$ – только учителя биологии.

Используя определение универсального множества, найдем U.

$U = \{u \mid u$ – учитель$\}$ – все учителя, и действительно, заданное подобным образом множество U включает в себя (объединяет) и множество R, и множество E, т. е. $R \subset U$, $E \subset U$.

Ответ: $R \cap E$ – учителя химии и биологии одновременно, $R \cup E$ все учителя химии, биологии и учителя одновременно химии и биологии, $R \setminus E$ – только учителя химии, $E \setminus R$ – только учителя биологии, U – все учителя.

Задача. *Даны множества* $A = \{a, e, f, d, k, l\}$, $B = \{b, c, e, d, k, m\}$. *В результате какой операции над* A *и* B *получены множества*
$C = \{a, b, c, d, e, f, f, k, l, m\}$, $D = \{$*все буквы латинского алфавита*$\}$,
$E = \{b, c, m\}$, $F = \{e, d, k\}$, $G = \{a, f, l\}$?

Решение

Проанализируем, из каких элементов множеств A и B составлены множества C, D, E, F.

Во множество C включены элементы, принадлежащие и множеству A, и B, а также элементы, принадлежащие A и B одновременно, т. е. можно сказать, что к C отнесены элементы, принадлежащие множеству A или B. Исходя из определения операции объединения, приходим к выводу, что $C = A \cup B$.

Элементы множества A полностью содержатся во множестве D, элементы множества B полностью содержатся во множестве D, но не все элементы множества D являются элементами A и B. Следовательно, по определению строгого включения множеств $A \subset D$, $B \subset D$. Таким образом, по определению универсального множества D является универсальным множеством для A и B, как множество, объединяющее их.

Во множество E включены элементы, принадлежащие множеству B и не принадлежащие A. Исходя из определения разности множеств, приходим к выводу, что $E = B \backslash A$.

Во множество F включены элементы, принадлежащие множеству A и B одновременно. Исходя из определения операции пересечения, приходим к выводу, что $F = A \cap B$.

Во множество G включены элементы, принадлежащие множеству A и не принадлежащие B. Исходя из определения разности множеств, приходим к выводу, что $G = A \backslash B$.

Ответ: $C = A \cup B$, D – универсальное множество для A и B, $E = B \backslash A$,
$F = A \cap B$, $G = A \backslash B$.

IV тип. Доказательство свойств операций над множествами

Задача. Доказать дистрибутивное свойство операции пересечения относительно объединения $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Доказательство

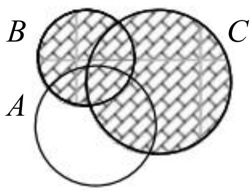
Существует два способа доказательства равенства множеств: аналитический и графический. Воспользуемся графическим способом, а именно, изобразим с помощью кругов Эйлера-Венна операции над множествами в левой и в правой частях равенства. Если полученные множества совпадают, то равенство верно, т. е. свойство доказано.

Таблица 11

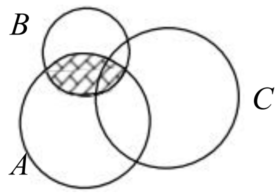
Графическое доказательство свойств множеств

Шаг Левая часть равенства Правая часть равенства

1.

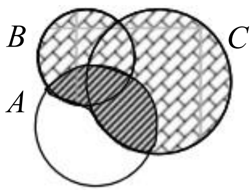


$B \cup C$

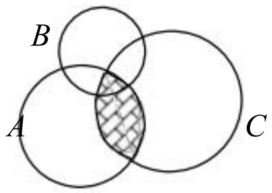


$A \cap B$

2.

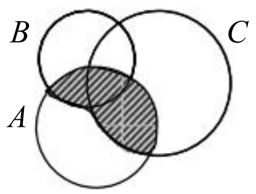


$A \cap (B \cup C)$



$A \cap C$

3.



$(A \cap B) \cup (A \cap C)$

Как видим, результат (диагональная штриховка на втором шаге) операций над множествами A, B, C из левой части равенства совпадает с результатом операций над этими же множествами (диагональная штриховка на третьем шаге). Следовательно, равенство верное, что и требовалось доказать.

V тип. Задачи на множества

Разбиение множеств. Классификация

Задача. Определить основание классификации. Проверить, является ли она правильной, если нет – найти, в чем ошибка:

а) меланхолик, флегматик, холерик;

б) файлы программ, служебные файлы и файлы данных;

в) естественные, искусственные, живые языки.

Решение

а) Меланхолик, флегматик, холерик – это темпераменты человека. Основание классификации – тип темперамента. Классификация неверная, так как она не полная: не хватает четвертого типа темперамента – сангвиника.

б) Файлы программ, служебные файлы и файлы данных – это типы файлов. Основание классификации – назначение файлов. Классификация правильная, так как она полная (нет файлов другого назначения и объединение этих типов файлов дает множество всех файлов) и множества файлов программ, служебных файлов и файлов данных попарно не пересекаются (например, служебный файл не может быть одновременно файлом данных и наоборот).

в) Естественные, искусственные – это классификация по происхождению языков. Живые языки относятся к другой классификации (по применению в настоящее время). Очевидно, что классификация неверная, так как она избыточна. И к тому же, множество живых языков пересекается с множествами естественных и искусственных языков (например, русский язык является естественным и одновременно живым).

Переход от одного способа задания множества к другому

Задача. Каким способом следует задать множества в следующих ситуациях:

а) Мама говорит ребенку: «Собирай исключительно съедобные грибы»;

б) Студентам перед началом летней педагогической практики сообщают: «Подготовьтесь к работе с детьми младшего школьного возраста».

в) Рекомендация врачей: «При температуре -1, -2, -3, -4, -5, -6, -7, -8, -9, -10 градусов голову рекомендуется защищать тонкой шерстяной шапочкой».

Решение

а) В данном случае множество задано характеристически, ребенку в лесу приходится задавать множество съедобных грибов перечислением: сыроежка, белый, подосиновик, подберезовик, масленок и т. д.

б) В данном случае множество так же задано характеристически, но студенты при подготовке к практике должны точно представлять, что речь идет о детях 6-, 7-, 8-, 9-, 10-летнего возраста (т. е. задают множество перечислением).

в) Множество задано перечислением, хотя для экономии времени и сокращения длины информационного сообщения множество проще было бы задать характеристическим свойством: «при температуре от -1 до -10».

Принадлежность элемента множеству

Задача. Исключите лишние элементы:

а) Булгаков, Есенин, Лермонтов, Пушкин, Толстой, Шекспир.

б) Прыжки в длину, в высоту, с десятиметровой вышки, тройной прыжок.

в) Клубника, арбуз, вишня, яблоко, смородина.

г) 22, 17, 180, 25006, 6, 84.

Решение

а) Представлены элементы множества A – русские писатели. Шекспир не принадлежит данному множеству.

б) Представлены элементы множества B – виды прыжков в легкой атлетике. Прыжки с десятиметровой вышки не принадлежат данному множеству.

в) Перечислены элементы множества C – ягодные культуры. Яблоко является фруктом, значит, оно не принадлежит данному множеству.

г) Общий признак у большинства чисел: они делятся на два, т. е. принадлежат множеству D – четные числа. 17 – не является четным числом, значит, исключается из данного множества.

Ответ: Шекспир, прыжки с десятиметровой вышки, яблоко, 17.

Подсчет количества элементов в объединении, пересечении и разности конечных множеств

Задача. Известно, что в некотором информационном сообщении содержится 578 согласных букв и 234 гласных (в сообщении отсутствуют ь и ъ). Сколько всего букв в сообщении.

Решение

Известно, что множества гласных и согласных букв не пересекаются, следовательно, по правилу 1, в сообщении 578+234 = 812 букв.

Ответ: 812.

Задача. Множество А - студенты АГПА; $m(A) = 6000$; В - преподаватели АГПА; $m(B)=340$; С – непреподавательский состав АГПА; $m(C) = 110$. Из скольких человек состоит коллектив АГПА?

Решение

Данные множества попарно не пересекаются, поэтому по правилу 2

$m(A) + m(B) + m(C) = 6000 + 340 + 110 = 6450$.

Ответ: 6450.

Задача. А – абитуриенты, поступавшие в АГПА в 2004 году. $m(A) = 2000$. В – студенты первокурсники АГПА в 2004/2005 году, $m(B) = 900$. Сколько абитуриентов, не поступивших в 2004 году в АГПА.

Решение

$B \subset A$, A/B – абитуриенты, не поступившие в АГПА в 2004 году. По правилу 3 $m(A/B) = 2000-900 = 1100$.

Ответ: 1100.

Задача. В школьной библиотеке содержатся книги с русскими текстами, книги с английскими текстами, некоторые книги содержат как английские, так и русские тексты. Известно, что из 590 книг в 500 есть тексты на *русском языке, и в 100 книгах – английские тексты. Сколько книг содержат тексты как на русском, так и на английском языке? Сколько книг содержат тексты только на русском языке? Сколько книг содержат тексты только на английском языке?*

Решение

Пусть A – множество книг, содержащие тексты на русском языке, B – на английском языке. Множества $A \cap B$ пересекаются, поэтому сумма книг на русском языке и книг на английском языке (500+100 = 600) больше общего числа книг (русско-английские книги подсчитаны в сумме дважды, т. к. подсчитаны как книги с русскими текстами, так и книги с английскими текстами). Чтобы найти количество книг, содержащих как русские, так и английские тексты, нужно из суммы книг на русском языке и книг на английском языке (600) вычесть общее количество книг в библиотеке. Т. е. 600 – 590 = 10. Таким образом, книг, содержащих как русские, так и английские тексты 10; книг, содержащих только русские тексты 500 – 10 = 490; книг, содержащих только английские тексты 100 – 10 = 90. Проверка: всего книг 490+10+100 = 590.

Ответ: книг, содержащих как русские, так и английские тексты 10; книг, содержащих только русские тексты 490; книг, содержащих только английские тексты 90.

Задача. В бухгалтерии мебельной фабрики было обнаружено расхождение в сведениях: за месяц общий объем изготовленных кроватей и кресел 780 единиц, но, по данным из кроватного цеха, кроватей выпущено 360, из кресельного цеха вышло 540 кресел. В чем причина расхождения данных, сколько на самом деле кресел и кроватей выпускают соответствующие цеха?

Решение

Один из цехов или оба цеха выпускают кресла-кровати. В отчете кресельный цех их представляет как кресла, а кроватный цех – как кровати. Пусть A – множество кроватей, B – множество кресел, $A \cap B$ – кресла-кровати. Тогда по правилу 4 нахождения числа элементов в объединении двух пересекающихся множеств $m(A \cup B)$ = $m(A)$ + $m(B)$ – $m(A \cap B)$ найдем мощность множества $A \cap B$, используя данные задачи. 780 = 360 + 540 - $m(A \cap B)$. $m(A \cap B)$ = 120, т. е. кресел-кроватей произведено 120. Тогда обычных кресел произведено 540 – 120 = 420, а обычных кроватей 360 – 120 = 240. Таким образом, полученные данные устраняют расхождение в бухгалтерских сводках всего 780 единиц продукции, из них 420 кресел, 240 кроватей и 120 кресло-кроватей (780 = 780).

Ответ: 660 кресел, 240 кроватей.

Задачи для самостоятельного решения

I тип

Задача 1. Определить способ задания множества A = {x | x – буква английского алфавита}. Перейти к другому способу задания множества, если это возможно. Определить мощность множества. Определить, принадлежат ли элементы данному множеству: g, ж, 256, ~, =, t,q, ю, т, -5.

II тип

Задача 2. Определить, о каком отношении между множествами идет речь. Записать отношения между множествами с помощью условных записей. Изобразить отношения между множествами с помощью кругов Эйлера-Венна.

а) A – множество людей, живущих в Европе, B – множество европейцев;

b) C – множество голубоглазых людей, D – кареглазых млекопитающих;

c) G – множество атмосферных осадков, H – множество автомобилей;

d) I – множество студентов, J – множество спортсменов.

III тип

Задача 3. Найти множество, являющееся пересечением множеств A={д, е, ф, ж, в, г, п, с} и B={а, б, г, и, к, л. ж о} и мощность найденного множества. Построить диаграммы Эйлера-Венна.

Задача 4. Даны множества A = {10, 26, 17, 34, 56, 84} и B = {2, 4, 28, 46}. В результате каких операций над множествами A и B получены множества C={10, 26, 17, 34, 56, 84, 2, 4, 28, 46}, D – все натуральные числа, E={},

F={10, 26, 17, 34, 56, 84},G = {2, 4, 28, 46}.

IV тип

Задача 5 . Доказать следующие свойства операций над множествами, записать названия свойств:

а) $A \cup B = B \cup A$;

б) $A \cap B = B \cap A$;

в) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

Задача 6. Доказать следующие свойства разности множеств:

а) $(A \backslash B) \backslash C = (A \backslash C) \backslash B$;

б) $(A \cup B) \backslash C = (A \backslash C) \cup (B \backslash C)$;

в) $(A \backslash B) \cap C = (A \cap C) \backslash (B \cap C)$;

V тип

Задача 7. Исключите лишние элементы:

а) Белка, утка, лебедь, пеликан

б) Я, п, д, t, ъ,э

в) Бег, плавание, езда на велосипеде, лыжи г) 126, 843, 711, 163, 540

Задача 8. В видеотеке имеется 1000 фильмов российского производства и 2000 фильмов американского производства. А всего в видеотеке 2350 фильмов. Сколько фильмов только российского, только американского и совместного производства имеется в видеотеке?

Лабораторная работа 3.
Системы счисления

Цель: овладеть навыками оперирования числами в различных системах счисления.

Задача научиться:

1) осуществлять перевод из десятичной системы счисления в любую q-ичную;

2) осуществлять перевод из любой q-ичной системы счисления в десятичную;

3) осуществлять прямой перевод из системы счисления с основанием 2^n в другую систему с основанием 2^k;

4) выполнять операции сложения и вычитания чисел в различных системах счисления;

5) по результатам арифметических действий распознавать систему счисления, в которой произведено действие.

Общие теоретические сведения

Система счисления (*с. с.*) – язык для наименования, записи чисел и выполнения действий над ними.

Базис системы счисления – алфавит с. с., состоящий из знаков, называемых *цифрами*. Количество цифр (знаков) в базисе с. с. называется *основанием системы счисления*.

В *позиционных системах* один и тот же знак может обозначать различные числа в зависимости от места (позиции), занимаемого этим знаком в записи числа. В *непозиционных системах* каждый знак всегда обозначает одно и то же число, независимо от места (позиции), занимаемого этим знаком в записи числа. Примеры различных позиционных систем счисления приведены в таблице 1.

Таблица 1

Примеры позиционных систем счисления

Название системы счисления	Основание, количество цифр в базисе	Базис (алфавит) системы счисления
Двоичная	2	{0, 1}
Троичная	3	{0, 1, 2}
Четверичная	4	{0, 1, 2, 3}
Восьмеричная	8	{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}
Десятичная	10	{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}
Шестнадцатиричная	16	{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F}
q-ичная	*q*	{0, 1, 2, …, q-1}

Запись *числа* выполняется в форме слова, составленного из алфавита с. с.: $x_q = (a_{n-1}a_{n-2}\ldots a_1a_0)_q = a_{n-1} \bullet q_{n-1} + a_{n-2} \bullet q_{n-2} + \ldots + a_1 \bullet q_1 + a_0 \bullet q_0$, где q - основание с. с., в которой записано число x, n – число разрядов, занимаемых числом x, a_n, a_{n-1}, …, a_2, a_1 – цифры числа, стоящие в соответствующих *разрядах* n-1, n-2, …, 1, 0.

Форма записи числа в виде многочлена $x_q = a_{n-1} \bullet q_{n-1} + a_{n-2} \bullet q_{n-2} + \ldots + a_1 \bullet q_1 + a_0 \bullet q_0$ называется развернутой формой записи числа.

Дробные числа имеют следующую развернутую форму:

$x_q = (a_{n-1}a_{n-2}\ldots a_1a_0, b_1b_2\ldots b_m)_q = a_{n-1} \bullet q_{n-1} + a_{n-2} \bullet q_{n-2} + \ldots + a_1 \bullet q_1 + a_0 \bullet q_0 + b_1 \bullet q_{-1} + b_2 \bullet q_{-2} + \ldots b_m \bullet q_{-m}$, где $b_1b_2\ldots b_m$ – цифры, стоящие после запятой, обозначающие дробную часть числа, m – количество знаков после запятой.

Примечание: Если в числе не указано основание системы счисления, то считается, что оно представлено в десятичной системе.

Правило перевода из q-ичной в десятичную систему счисления

Для перевода числа из любой q-ичной системы счисления в десятичную достаточно записать число в развернутой форме, и затем все действия выполнить по правилам, принятым в десятичной с. с.

Правило перевода из десятичной в q-ичную систему счисления целых чисел

1. Основание новой системы счисления выразить в десятичной с. с. и все последующие действия производить в десятичной с. с.
2. Последовательно выполнять деление данного числа и получаемых неполных частных на основании новой системы счисления до тех пор, пока не получим неполное частное, меньшее делителя.
3. Полученные остатки, являющиеся цифрами числа в новой системе счисления, привести в соответствие с алфавитом новой системы счисления.
4. Составить число в новой системе счисления: первая цифра – последнее неполное частное, вторая цифра – последний остаток, третья цифра – предпоследний остаток и т. д., записывая остатки в обратном порядке (их получения).

Правило перевода из десятичной в q-ичную систему счисления дробных чисел

1. Основание новой системы счисления выразить в десятичной с. с. и все последующие действия производить в десятичной с. с.
2. Последовательно умножать данное число и получаемые дробные части произведений на основание новой с. с. до тех пор, пока дробная часть произведения не станет равной нулю или не будет достигнута требуемая точность представления числа в новой системе счисления.
3. Полученные целые части произведений, являющиеся цифрами числа в новой с. с., привести в соответствие с алфавитом новой с. с.
4. Составить дробную часть числа в новой системе счисления, начиная с целой части первого произведения.

Правило перевода целого числа из двоичной системы счисления в систему счисления с основанием $q = 2^n$

1. Число в двоичной системе разбить справа налево на группы по n цифр в каждой.
2. Если в последней левой группе окажется меньше n разрядов, то ее надо дополнить слева нулями до нужного числа разрядов.
3. Рассмотреть каждую группу как n-разрядное двоичное число и записать ее соответствующей цифрой в системе счисления с основанием $q = 2^n$.

Правило перевода числа, записанного в системе счисления с основанием $q = 2^n$ в двоичную систему счисления

Каждую цифру числа заменить ее n-разрядным эквивалентом в двоичной системе счисления.

Правило сложения чисел в q-ичной системе счисления

(*алгоритм аль-Хорезми*)

Например:

$$\begin{array}{r} + \begin{array}{r}(a_4\, a_3\, a_2\, a_1\, a_0)_q \\ (b_3\, b_2\, b_1\, b_0)_q \end{array} \\ \hline (c_4\, c_3\, c_2\, c_1\, c_0)_q \end{array}$$

1. Записать второе слагаемое под первым так, чтобы соответствующие разряды находились друг под другом.
2. Сложить цифры первого разряда ($b_0 + a_0$). Если сумма (c_0) меньше q, то записать ее в разряд единиц ответа и перейти к следующему разряду.
3. Если сумма (d_0) единиц больше или равна q, то представить ее в виде $d_0 = 1 \bullet q + c_0$, где c_0 – цифра соответствующей q-ой с. с.; c_0 – записать в первый разряд ответа, а 1 добавить к цифрам, складываемым в следующем разряде (по аналогии с фразой, знакомой еще с начальной школы «c_0 – пишем, 1 – в уме»). Чтобы не забыть прибавить единицу, ее можно записать над a_1.

$$\begin{array}{r} + \begin{array}{r}\overset{}{(a_4\, a_3\, a_2\, \overset{\mathbf{1}}{a_1}\, a_0)_q} \\ (b_3\, b_2\, b_1\, b_0)_q \end{array} \\ \hline (c_4\, c_3\, c_2\, c_1\, c_0)_q \end{array}$$

4. Повторить аналогичные действия со вторым разрядом, затем третьим и т. д., вплоть до сложения цифр старших разрядов. Если их сумма больше или равна q, то в старший разряд ответа добавляем 1.

Правило вычитания чисел в q-ичной системе счисления

(*алгоритм аль-Хорезми*)

Например:

$$\begin{array}{r} - \begin{array}{r}(a_4\, a_3\, a_2\, a_1\, a_0)_q \\ (b_3\, b_2\, b_1\, b_0)_q \end{array} \\ \hline (c_4\, c_3\, c_2\, c_1\, c_0)_q \end{array}$$

1. Записать вычитаемое под уменьшаемым так, чтобы соответствующие разряды находились друг под другом.
2. Если цифра в первом разряде вычитаемого (a_0) не превосходит соответствующей цифры уменьшаемого (b_0), вычитаем ее из цифры уменьшаемого, записываем разность (c_0) в первый (правый) разряд искомого числа, после чего переходим к следующему разряду.
3. Если цифра в первом разряде вычитаемого (a_0) больше соответствующей цифры уменьшаемого (b_0), т. е. $b_0 > a_0$, и $a_0 \neq 0$, то нужно уменьшить цифру второго разряда уменьшаемого (a_1) на 1, одновременно a_0 увеличить на q и уже из этого числа ($a_0 + q$) вычитаем b_0 и полученную разность (c_0) записать как цифру первого разряда (правого) искомого числа, далее перейти ко второму разряду. Чтобы не забыть об уменьшении a_1 на 1, сверху над ним можно поставить точку.

$$\begin{array}{r} (a_4\, a_3\, a_2\, \dot{a}_1\, a_0)_q \\ -\quad (b_3\, b_2\, b_1\, b_0)_q \\ \hline (c_4\, c_3\, c_2\, c_1\, c_0)_q \end{array}$$

4. Если цифра в первом разряде вычитаемого (a_0) больше соответствующей цифры уменьшаемого (b_0), т. е. $b_0 > a_0$, и $a_0 = 0$, и, например, $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, то первую отличную от нуля цифры в уменьшаемом (в данном случае, $a_3 \neq 0$) нужно уменьшить на 1. Все цифры в младших разрядах, которые равнялись 0, кроме первого, записать как цифру q-1 ($a_1 = q$-1, $a_2 = q$-1). Первый разряд представить как q ($a_0 = q$), вычесть из него b_0. Полученный результат (c_0) записать в первый разряд искомого числа. Чтобы не забыть об увеличении a_1 и a_2 до q-1, сверху над ними можно поставить точки.

$$\begin{array}{r} -(a_4\, a_3\; \dot{0}\; \dot{0}\quad 0)_q \\ (b_3\, b_2\, b_1\, b_0)_q \\ \hline (c_4\, c_3\, c_2\, c_1\, c_0)_q \end{array}$$

5. В следующем разряде повторить процесс.

6. Вычитание заканчивается, когда производится вычитание из старшего разряда уменьшаемого.

Двоичное представление информации в электронно-вычислительных машинах

В современных вычислительных установках используется двоичная система счисления для кодирования информации.

Бит – минимальная единица хранения информации, представляющая одноразрядное двоичное число: 0 или 1.

Байт – восемь расположенных подряд битов памяти (восьмиразрядное двоичное число).

Машинное слово – наибольшая последовательность бит, которую процессор может обрабатывать как единое целое (длина слова может быть 8, 16, 32 бита и т. д.).

Внутреннее представление числа – запись числа в двоичной системе счисления, соответствующее его представлению в ЭВМ.

Знаковый разряд – первый слева бит (разряд) во внутреннем представлении числа, обозначающий положительное (если значение бита = 0) или отрицательное (если значение бита = 1) число.

Правило получения внутреннего представления в ЭВМ целого положительного числа N, хранящегося в k-разрядном машинном слове

1.Перевести число *N* в двоичную систему счисления.

2.Полученный результат дополнить слева незначащими нулями до *k* разрядов.

Правило получения внутреннего представления в ЭВМ целого отрицательного числа (-N), хранящегося в k-разрядном машинном слове

1.Получить внутреннее представление положительного числа *N*.

2.Получить обратный код этого числа заменой 0 на 1 и 1 на 0.

3.К полученному результату прибавить 1.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Перевести целое число из десятичной системы в q-ичную:

а) $q = 8$; число 5987_{10};

б) q=2; число 256_{10};

в) q=4; число 448_{10};

г) q=7; число 5671_{10};

д) q=9; число 79112_{10};

е) q=16; число 89942_{10}.

Задача 2. Перевести дробное число из десятичной системы в q-ичную:

а) $q = 4$; число $0{,}986_{10}$;

б) q=2; число $0{,}56_{10}$;

в) q=3; число $0{,}128_{10}$;

г) q=5; число $0{,}14_{10}$;

д) q=6; число $0{,}648_{10}$;

е) q=8; число $0{,}791_{10}$.

Задача 3. Перевести из p-ичной системы счисления в q-ичную через двоичную:

а) $999_{16} \rightarrow x_8$;

б) $566_8 \rightarrow x_4$;

в) $75_8 \rightarrow x_2$;

г) $186_{16} \rightarrow x_2$;

д) $10011_2 \rightarrow x_{16}$;

Задача 4. Выполнить действие:

а) $A0BC93_{16} + 69FE45_{16}$;

б) $1100101_2 + 10011_2$;

в) $332_4 + 31_4$;

г) $4571_8 + 477_8$;

д) $5662_7 + 1246_7$;

е) $21121_3 + 1221_3$.

Задача 5. Выполнить действие:

Лабораторная работа № 4

Цель: овладеть навыками подсчета количества различных комбинаций, подчиненных тем или иным условиям.

Задачи научиться:

1) распознавать и решать задачи на правила суммы и произведения;
2) находить число перестановок, размещений, сочетаний без повторений;
3) находить число перестановок, размещений, сочетаний с повторениями;
4) выбирать то или иное комбинаторное правило в практических задачах.

Общие теоретические сведения

Решение комбинаторных задач связано с выбором из некоторого множества подмножеств, обладающих определенными свойствами, и упорядочением множеств. Область математики, которая исследует решение комбинаторных задач, называется *комбинаторикой*. Все задачи, рассматриваемые комбинаторикой, требуют ответа на вопрос «сколько?» или «сколькими способами?».

Правило суммы. Если элемент a из одного множества можно выбрать m способами, а элемент b из другого множества – k способами, то выбор «либо a, либо b» можно осуществить $m + k$ способами, при условии, что данные множества не пересекаются.

Правило произведения. Если элемент a из одного множества можно выбрать m способами, а элемент b из другого множества – k способами, то выбор пары «a и b» можно осуществить $m \cdot k$ способами.

Перестановка *n* элементов из *n* элементов. Дано множество, состоящее из n элементов. *Перестановкой* называется упорядоченное множество, составленное из данных элементов. Например, для множества $\{a, b, c\}$ существуют следующие варианты перестановок: $\{a, b, c\}$, $\{a, c, b\}$, $\{b, a, c\}$, $\{b, c, a\}$, $\{c, a, b\}$, $\{c, b, a\}$.

Число всевозможных перестановок из n элементов обозначается P_n и находится по формуле $P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!$

Число $n!$ читается как «n факториал». Считается, что $1! = 1$, $0! = 1$.

Размещение без повторений из n элементов по k элементам

Дано множество, состоящее из n элементов. Размещением без повторений из n элементов по k называется перестановка из k элементов, выбранных из n-элементного множества один раз. Например, для множества $\{a, b, c\}$ существуют следующие варианты размещений без повторений по 2 элементам: $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, a\}$, $\{b, c\}$, $\{c, a\}$, $\{c, b\}$.

Число всевозможных размещений без повторений k из n элементов обозначается A_n^k и находится по формуле

$$A_n^k = \underbrace{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-(k-1))}_{k\ \text{множителей}} \text{ или } A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Размещение с повторениями из n элементов по k элементам

Дано множество, состоящее из n элементов. Размещением с повторениями из n элементов по k называется перестановка из k элементов, выбранных из n-элементного множества, причем каждый элемент может быть выбран несколько раз.

Например, для множества $\{a, b, c\}$ существуют следующие варианты размещений с повторениями по 2 элементам: $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, a\}$, $\{b, c\}$, $\{c, a\}$, $\{c, b\}$, $\{a, a\}$, $\{b, b\}$, $\{c, c\}$.

Число всевозможных размещений с повторениями k из n элементов обозначается $\overline{A}_n^k$ и находится по формуле $\overline{A}_n^k = n^k$.

Сочетание без повторений из n элементов по k элементам

Дано множество, состоящее из n элементов. Сочетанием без повторений из n элементов по k элементам называется неупорядоченное подмножество данного множества, состоящее из k элементов.

Например, для множества $\{a, b, c\}$ существуют следующие варианты сочетаний без повторений по 2 элементам: $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{c, b\}$.

Число всевозможных сочетаний без повторения k из n элементов обозначается C_n^k и находится по формуле $C_n^k = \dfrac{A_n^k}{k!} = \dfrac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$.

Сочетание с повторениями из *n* элементов по *k* элементам

Дано множество, состоящее из n элементов. Сочетанием с повторениями из n элементов по k называется неупорядоченное подмножество данного множества, состоящее из k элементов, причем элементы могут повторяться. Например, для множества $\{a, b, c\}$ существуют следующие варианты сочетаний без повторений по 2 элементам: $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{c, b\}$, $\{a, a\}$, $\{b, b\}$, $\{c, c\}$.

Число всевозможных сочетаний с повторениями k из n элементов обозначается $\tilde{C}_n^k$ и находится по формуле $\tilde{C}_n^k = C_{n+k-1}^k = \dfrac{(n - k - 1)!}{k! \cdot (n-1)!}$.

При решении комбинаторных задач в первую очередь необходимо определить, является ли эта задача комбинаторной, т. е. можно ли сформулировать задачу в форме вопроса «сколькими способами?». Затем определить, какое правило нужно применить для этого.

1. Нужно определить, о скольких множествах идет речь:
   a. если два множества и более, то возможны два варианта:
      i. объединение множеств (когда элементы множества объединяются с помощью союза «или»), тогда применяется правило суммы. Задача решена;
      ii. пересечение множеств (когда элементы множества объединяются с помощью союза «и»), тогда применяется правило произведения. Задача решена;
   b. если одно множество, то для определения формулы нужно обратиться к пункту 2.
2. Определяем, сколько элементов множества участвуют в задаче:
   a. если n элементов из n без повторов, применяется формула перестановки P_n. Задача решена;
   b. если k элементов из n, то воспользуемся таблицей 16 для определения формулы. Задача решена.

Таблица 16

Определение комбинаторной формулы

Название формулы	Порядок	Повторы	Формула
Размещение без повторений из n элементов по k элементам	существен	отсутствуют	$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$
Размещение с повторениями из n элементов по k элементам	существен	разрешены	$\overline{A}_n^k = n^k$
Сочетание без повторений из n элементов по k элементам	не существен	отсутствуют	$C_n^k = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$
Сочетание с повторениями из n элементов по k элементам	не существен	разрешены	$\widetilde{C}_n^k = C_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$

Практические задания

Примеры решений

I тип. Правила суммы и произведения

Задача. На столе лежат 4 учебника по литературе и 7 по русскому языку. Сколькими способами можно выбрать один учебник?

Решение

В данной задаче речь идет о выборе одного элемента из двух множеств: A – учебники по литературе, B – учебники по русскому языку. Учебник можно выбрать по литературе **или** по русскому языку. Так как множества объединены с помощью союза «или», то воспользуемся правилом суммы. Мощность множеств A и B равны соответственно $m(A) = 4$ и $m(B) = 7$, т. е. учебник по литературе можно выбрать 4 способами, а по русскому языку – 7. Таким образом, общее число способов $4 + 7 = 11$.

Ответ: 11.

Задача. На столе лежат 4 учебника по литературе и 7 по русскому языку. Сколькими способами можно выбрать пару, состоящую из учебника по литературе и учебника по русскому языку?

Решение Четырехзначное число состоит из четырех цифр: $\overline{abcd}$. Первую цифру – число тысяч (множество A), можно выбрать из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, т. е. множество

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\},$$
$$B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\},$$
$$C = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\},$$
$$D = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}.$$

Таким образом, задачу можно переформулировать: сколькими способами (N) из элементов множеств A, B, C, D можно составить четверку упорядоченных элементов? Согласно правилу произведения $N = 9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9000$.

Ответ: 9000.

II тип. Перестановки, размещения, сочетания без повторений

Задача. На Ассамблее ООН должны выступить: В. Путин, Дж. Буш, К. Аннан. Порядок выступления лидеров имеет существенное значение для мировой политики. Сколько существует способов выстроить порядок выступлений?

Решение

1 способ (перебор всех возможных вариантов)

Возможны следующие варианты перестановок:

Путин, Буш, Аннан;

Путин, Аннан, Буш;

Буш, Путин, Аннан;

Буш, Аннан, Путин;

Аннан, Буш, Путин;

Аннан, Путин, Буш.

Итак, всего 6 вариантов расстановки выступающих.

Решение

1 способ (перебор возможных способов)

Пронумеруем учебники по литературе и по русскому языку. Составим таблицу 17, характеризующую возможные выборы пар учебников (переберем все возможные варианты).

Таблица 17

Русский язык / Литература	1	2	3	4	5	6	7
1	(1; 1)	(1; 2)	(1; 3)	(1; 4)	(1; 5)	(1; 6)	(1; 7)
2	(2; 1)	(2; 2)	(2; 3)	(2; 4)	(2; 5)	(2; 6)	(2; 7)
3	(3; 1)	(3; 2)	(3; 3)	(3; 4)	(3; 5)	(3; 6)	(3; 7)
4	(4; 1)	(4; 2)	(4; 3)	(4; 4)	(4; 5)	(4; 6)	(4; 7)

Первый элемент в паре – это учебник по русскому языку, второй – по литературе. В таблице 17 представлены все возможные варианты пар, которые можно составить из учебника по русскому языку и литературе. Подсчитаем их количество: 4 строки умножим на 7 столбцов, получим 28 пар. То есть пару, состоящую из учебников по русскому языку и литературе, можно выбрать 28 способами.

2 способ (правило произведения)

В задаче речь идет о двух множествах, выбрать нужно учебник по литературе **и** русскому языку. То есть элементы из этих множеств объединяются союзом «и». Применим правило произведения. Мощность множеств A и B равны соответственно $m(A) = 4$ и $m(B) = 7$, т. е. учебник по литературе можно выбрать 4 способами, а по русскому языку – 7. Таким образом, общее число способов выбрать пару учебников по разным предметам $4 \cdot 7 = 28$.

Ответ: 28.

Задача. Сколько существует четырехзначных чисел?

2 способ (правило подсчета перестановок)

В задаче речь идет об одном трехэлементном множестве. По условию нужно переставить 3 элемента из 3 без повторов, поэтому применим формулу числа перестановки P_3. $P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.

Ответ: 6.

Задача. На Ассамблее ООН необходимо выступить только двум лидерам из трех. Сколько существует способов выстроить порядок выступлений в данном случае?

Решение

1 способ (перебор всех возможных вариантов)

Путин, Буш;

Путин, Аннан;

Буш, Аннан;

Буш, Путин;

Аннан, Путин;

Аннан, Буш.

Итого 6 способов.

2 способ (правило подсчета размещений)

В задаче речь идет об одном трехэлементном множестве. По условию нужно разместить 2 элемента из 3 без повторов, поэтому применим правило размещения (порядок в задаче существенен) без повторения, а именно, $A_3^2 = 3 \cdot 2 = 6$.

Ответ: 6.

Задача. Сколькими способами из десяти различных букв можно записать шестибуквенные слова, при условии, что буквы в слове не повторяются?

Решение

В задаче речь идет об одном десятиэлементном множестве. По условию нужно разместить 6 элементов из 10 без повторов, поэтому применим правило размещения (порядок в задаче существенен) без повторения, а именно, $A_{10}^6 = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 151\ 200$.

Ответ: 151 200.

Задача. *На Ассамблее ООН необходимо выступить только двум лидерам из трех. Сколько существует способов выстроить порядок выступлений в случае, если порядок выступлений не играет серьезной роли?*

Решение

1 способ (перебор всех возможных вариантов)

Так как порядок выступлений не существенен, то получим следующие различные сочетания:

{Путин, Буш} = {Буш, Путин};

{Путин, Аннан} = {Аннан, Путин};

{Буш, Аннан} = {Аннан, Буш}.

Итого 3 способа.

2 способ (правило подсчета сочетаний)

В задаче речь идет об одном трехэлементном множестве. По условию нужно разместить 2 элемента из 3 без повторов, поэтому применим правило подсчета сочетаний (порядок в задаче не существенен) без повторения, а именно, $C_3^2 = \frac{3!}{2!(3-2)!} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 1} = 3$.

Ответ: 3.

Задача. Из четырех коробок конфет разных сортов нужно выбрать две коробки в подарок. Сколькими способами это можно осуществить?

Решение

В задаче речь идет об одном четырехэлементном множестве. По условию нужно разместить 2 элемента из 4 без повторов, порядок, в котором будут выбраны конфеты для подарка, не существенен. Следовательно, применим правило подсчета сочетаний (порядок не существенен) без повторения, а именно, $C_4^2 = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = 6$.

Ответ: 6.

III тип. Размещения, сочетания с повторениями

Задача. На Ассамблее ООН должны быть заслушаны ровно два доклада на разные темы. Всего три кандидата на выступление: В. Путин, Дж. Буш, К. Аннан, причем каждый из кандидатов может выступить с обсуждением каждой из тем, в том числе и обеих. Порядок выступления лидеров имеет существенное значения для мировой политики. Сколько существует способов выстроить порядок выступлений?

Решение

1 способ (перебор всех возможных вариантов)

Возможны следующие варианты:

Путин, Буш;

Путин, Аннан;

Буш, Аннан;

Буш, Путин;

Аннан, Путин;

Аннан, Буш;

Путин, Путин;

Буш, Буш;

Аннан, Аннан.

Итого 9 способов.

2 способ (правило подсчета размещений с повторениями)

В задаче речь идет об одном трехэлементном множестве. По условию нужно разместить 2 элемента из 3 с повторениями, поэтому применим правило размещения (порядок в задаче существенен) с повторениями, а именно, $\tilde{A}_3^2 = 3^2 = 9$.

Ответ: 9.

Задача. На Ассамблее ООН должны быть заслушаны ровно два доклада на разные темы. Всего три кандидата на выступление: В. Путин, Дж. Буш, К. Аннан, причем каждый из кандидатов может выступить с обсуждением каждой из тем, в том числе и обеих. Сколько существует способов выстроить

Цель: овладеть навыками определения вероятности случайных событий.

Задачи научиться:

1) отличать достоверное, невозможное, противоположное, совместные и несовместные, зависимые и независимые события;

2) определять пространство элементарных событий, количество общих и благоприятствующих исходов;

3) находить вероятность по классическому, статистическому и геометрическому определению;

4) находить вероятность суммы и произведения событий;

5) применять комбинаторику для подсчета вероятностей;

6) решать задачи по формулам Байеса и полной вероятности;

Ответ: 6.

Задачи для самостоятельного решения

1. В урне 15 красных шаров и 12 белых. Сколькими способами можно достать 1 шар?

2. До своего факультета студент может дойти по любой из четырех лестниц. Сколькими способами студент может подняться до факультета и

Лабораторная работа №5. Теория вероятности.

7) использовать схему испытаний Бернулли и предельную теорему Пуассона.

Общие теоретические сведения

Теория вероятностей – раздел математики, в котором изучаются закономерности, присущие массовым случайным явлениям.

Случайное событие – исход наблюдения, эксперимента или опыта, который при реализации некоторого комплекса условий может произойти, а может и не произойти.

Элементарный исход – один из возможных вариантов результата опыта.

Пример. Проводится опыт (испытание) – подкидывается игральный кубик. Результат данного опыта является случайным событием, например, выпадает цифра 3. Элементарными исходами являются: выпадение 1, 2, 3, 4, 5 или 6.

Пространство элементарных исходов опыта – множество, состоящее из всех элементарных исходов данного опыта.

Принятое обозначение $\{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$.

Пусть в результате некоторого опыта может наступить или не наступить событие A. Пространство элементарных исходов опыта $\{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$. Если наступление некоторого исхода из подмножества данного множества: w_{i1} или w_{i2} или … или w_{im} приводит к появлению события A, то w_{i1}, w_{i2} … w_{im} называются исходами, *благоприятствующими* появлению события A.

Равновозможные исходы – исходы, которые имеют одинаковый шанс произойти или не произойти.

Несовместные исходы – исходы, которые одновременно произойти не могут.

Событие называют *достоверным*, если оно непременно должно произойти. Событие называют *невозможным*, если оно заведомо не наступит. Событием, *противоположным* некоторому A, называют событие, состоящее в том, что A не наступило. События A и B называются *несовместными*, если наступление одного из них исключает возможность наступления другого. Говорят, что событие B *следует* из события A, если событие B происходит всегда, когда произошло событие A. Два события A и B называются *равными*, если из A следует B и из B следует A. События называются *независимыми*, если появление одного события не влечет появление другого.

События A_1, A_2, ..., A_n образуют *полную* группу событий, если хотя бы одно из них непременно должно произойти (при каждом осуществлении комплекса условий).

Суммой двух событий A и B называется событие $A + B$, состоящее в том, что произошло событие A **или** событие B.

Произведением двух событий A и B называется событие AB, заключающееся в совместном наступлении событий A **и** B.

Основные свойства сложения и произведения событий

Пусть A, B – некоторые события, тогда:

1. $A + B$; AB вновь являются событиями.
2. $A + B = B + A$; $AB = BA$ (коммутативный закон).
3. $A + (B + C) =(A + B) + C$; $A(BC) =(AB)C$ (ассоциативный закон).
4. Из события A следует сумма этого события с любым событием B:

$$A \subset A + B.$$

5. Из события AB следуют событие A и событие B:

$$AB \subset A, AB \subset B.$$

$A(B + C) = AB + AC$ (дистрибутивный закон).

Классическое определение вероятности. Пусть некоторый опыт имеет n равновозможных и несовместных исходов. *Вероятностью* $P(A)$ события A называется отношение числа благоприятных исходов $m(A)$ к общему числу n несовместных равновозможных исходов:

$$P(A) = \frac{m(A)}{n}.$$

Свойства вероятности

1. Для любого случайного события $0 \le P(A) \le 1$.
2. Пусть A_1, A_2, A_3,…, A_k – все события, которые могут произойти в результате опыта. Тогда $P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \ldots + P(A_k) = 1$.
3. Пусть A – некоторое событие, тогда верно равенство $P(A) + P(\overline{A}) = 1$.

Правило суммы вероятностей. Вероятность суммы несовместных событий есть сумма вероятностей этих событий: $P(A + B) = P(A) + P(B)$.

Правило произведения вероятностей независимых событий. Вероятность произведения событий есть произведение вероятностей этих событий: $P(A \bullet B) = P(A) \bullet P(B)$.

События A и B называются *зависимыми*, если появление одного из них изменяет вероятность появления другого.

Условной вероятностью $P(B/A)$ называется вероятность события B, вычисленная в предположении, что событие A уже произошло.

Правило произведения вероятностей зависимых событий. Вероятность произведения двух зависимых событий A и B равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, в предположении, что первое уже произошло, т.е. $P(AB)= P(A) \bullet P(B/A)$.

Вероятность суммы совместных событий. Вероятность суммы совместных событий есть сумма вероятностей этих событий без вероятности из совместного наступления: $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \bullet B)$.

Формула полной вероятности. Пусть B_1, B_2, …, B_n – полная система несовместных событий.

$$P(A) = P(B_1)P(A/B_1) + P(B_2)P(A/B_2) + \ldots + P(B_n)P(A/B_n) = \sum_{k=1}^{n} P(B_k)P(A/B_k).$$

Формула Байеса: $P(B_k/A) = \dfrac{P(B_k)P(A/B_k)}{P(A)} = \dfrac{P(B_k)P(A/B_k)}{\sum_{k=1}^{n} P(B_k)P(A/B_k)}$.

Пусть в результате некоторого случайного испытания может произойти или не произойти определенное событие A. Если событие произошло, испытание называется *успешным*, а событие – *успехом*. Испытание повторяется n раз. При этом соблюдаются следующие условия:

вероятность успеха $P(A) = p$ в каждом испытании одна и та же;

результат любого испытания не зависит от исходов предыдущих испытаний.

Противоположное событие $\overline{A}$ событию A называется *неудача*, и его вероятность обозначается q, причем $q = 1 - p$, так как в данной схеме подразумевается, что опыт может иметь только два исхода: успех или неудача.

Такая последовательность испытаний с двумя исходами (успех/неудача) называется *последовательностью независимых испытаний Бернулли* или *схемой Бернулли*. Вероятность того, что в схеме Бернулли из n независимых испытаний произошло ровно k успехов, находится по формуле Бернулли: $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$.

Следствия из формулы Бернулли

1. $P_n(n) = p^n$, $P_n(0) = q^n$.

2. $P_n(0) + P_n(1) + P_n(2) + \ldots + P_n(n) = 1$.

Предельная теорема Пуассона

Рассмотрим случай, когда вероятность p наступления некоторого события A достаточно малая величина. Например, рождение близнецов, достижение столетнего возраста, опечатка в книге и т. д. По формуле Бернулли $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$. В рассматриваемом случае $n \to \infty$, а $p \to 0$. Пусть величина $\lambda = np$ остается ограниченной: $\lambda <$ const, k – фиксировано. При указанных условиях справедлива теорема Пуассона $P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$.

Пользуясь теоремой Пуассона, мы можем при определенных условиях заменять вероятность $P_n(k)$ приближенно равным ей выражением $\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$. Для данного выражения составлены таблицы, с их помощью можно для заданных k

и λ найти соответствующее число $\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$. Число $\lambda = np$ – среднее число успехов.

Геометрическое определение вероятности. *Пространство элементарных исходов* Ω – произвольное конечное множество на прямой, плоскости или n-мерном арифметическом пространстве. *События* – всевозможные измеримые подмножества A множества Ω. Вероятность события A – отношение лебеговой меры множества A и пространства элементарных исходов: $P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$.

Лебегова мера множества – это обобщение понятия длины отрезка, площади фигуры, объема тела. Например, для плоскости геометрическое определение вероятности будет выглядеть следующим образом.

Пусть D – некоторая конечная область плоскости. В эту область бросается точка, причем попадание ее в любую точку области D считается равновероятным. Тогда геометрической вероятностью попадания точки в любую область D_1, лежащую в D, назовем отношение площади области D_1 к площади области D. $P(D_1) = \frac{S(D_1)}{S(D)}$, где $S(D_1)$, $S(D)$ – соответственно площади областей D_1, D.

Статистическое определение вероятности. Пусть A – случайное событие по отношению к некоторому опыту. Предположим, что опыт произведен N раз и при этом событие A наступило в N_A случаях. Отношение $\nu = \frac{N_A}{N}$ называется *частотой наступления события* A в рассматриваемой серии опыта. С увеличением числа опытов частота стабилизируется, приближается к некоторой постоянной $p(A)$.

Определение. *Статистической вероятностью случайного события* $p(A)$ называют связанное с данным событием постоянное число, вокруг которого колеблется частота наступления этого события в длинных сериях опытов.

Количество информации

Количественная зависимость между вероятностью события (P) и количеством информации в сообщении о нем (I) выражается формулой:

$$I = \log_2(\frac{1}{P}) = -\log_2 P.$$

Практические задания

Примеры решений

I тип. Общие понятия теории вероятности. Классическая вероятность. Геометрическая и статистическая вероятность

Задача. Подкидывается игральный кубик.

а) *описать пространство элементарных исходов;*

б) *указать невозможное и достоверное события для данного опыта;*

в) *найти исходы, благоприятствующие появлению события А – выпало четное число;*

г) *найти вероятность наступления события А;*

д) *найти событие, противоположное событию А и его вероятность.*

Решение

а) В данном опыте возможны следующие исходы: «выпадение 1», «выпадение 2», «выпадение 3», «выпадение 4», «выпадение 5», «выпадение 6», т. е. пространство элементарных исходов – это множество $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

б) Невозможным событием для данного опыта является, например, выпадение семерки. Достоверным событием является событие A – выпадение одного из шести очков: 1 или 2, или 3, или 4, или 5, или 6.

в) Событие A – выпало четное число, означает, что выпало 2 или 4, или 6, то есть исходами, благоприятствующими событию A, будут $\{2, 4, 6\}$.

г) Число благоприятствующих исходов для события A три, всего исходов 6, следовательно, по классическому определению вероятности

$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

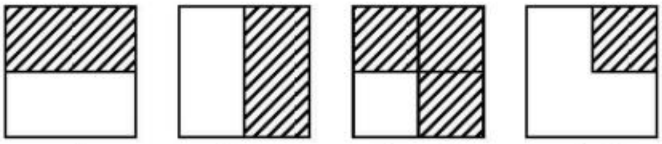
д) Событие, противоположное событию A, есть событие $\overline{A}$ – не выпало четное число, т. е. выпало нечетное число. Число благоприятствующих исходов для события $\overline{A}$ три {1, 3, 5}, всего исходов 6, итак, по классическому определению вероятности $P(\overline{A}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Задача. Опыт заключается в том, что на квадратный лист случайным образом кидается шарик. Пусть A – шарик попадает в верхнюю часть листа, B – шарик попадает в правую часть листа.

Найти события $A + B$ и $A \bullet B$.

Решение

Событие $A + B$ – шарик попадает в верхнюю или в правую часть листа. Событие $A \bullet B$ – шарик попадает в правую верхнюю четверть листа. Графически это можно изобразить следующим образом (см. рис.):



A B $A + B$ $A \bullet B$

Задача. На 33 карточках написаны буквы русского алфавита. Какова вероятность, что на случайно извлеченной карточке будет гласная буква (A), согласная (B), ни гласная и ни согласная буква (C)? Какова вероятность, что на случайно извлеченной карточке не будет гласная буква ($\overline{A}$),

Решение

Общее число исходов 33. Исходов, благоприятствующих событию A, десять (все гласные буквы), событию B – двадцать один (все согласные буквы), событию C – два (твердый и мягкий знаки). Итак, по классическому определению вероятности: $P(A) = 10/33$, $P(B) = 21/33$, $P(C) = 2/33$.

Вероятность события $\overline{A}$ – на карточке не будет гласной буквы, можно найти, опираясь на свойство вероятности $P(A) + P(\overline{A}) = 1$, то есть

$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 10/33 = 23/33$.

Ответ: $P(A) = 10/33$, $P(B) = 21/33$, $P(C) = 2/33$, $P(\overline{A}) = 23/33$.

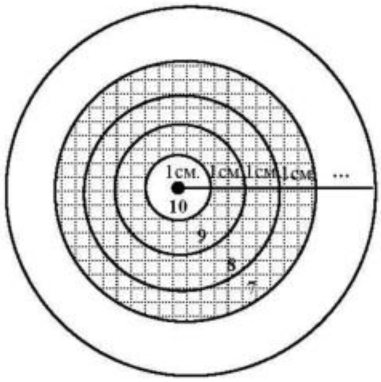
Задача. Радиус мишени 10 см. Какова вероятность, что стрелок попадет в область от 10 до 7, если круги мишени отстоят друг от друга на 1 см?

Решение

Задача на геометрическое определение вероятности.

Пространство элементарных исходов Ω – вся область мишени, ее площадь вычисляется по формуле площади круга $S = \pi R^2 = \pi \cdot 10^2 = 100\pi$.

Благоприятствующей областью для искомого события будет круг радиусом 4 см (см. рис.).



$S_1 = \pi R_1{}^2 = \pi \cdot 4^2 = 16\pi$. Итак, по геометрическому определению вероятности $P = \dfrac{16\pi}{100\pi} = 0{,}16$.

Ответ: 0,16.

Задача. В течение 100 лет у нескольких поколений одной семьи на 35 случаев рождения детей в 7 случаях рождались двойняшки. Какова вероятность, что в следующий раз у представителя данной семьи родятся двойняшки? Не родятся двойняшки?

Решение

Частота появления события колеблется около 7/35. По статистическому определению, вероятность появления двойняшек $P(A) = 7/35$. Вероятность не появления двойняшек $P(\overline{A}) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - 7/35 = 28/35$.

Ответ: 7/35; 28/35.

II тип. Правила суммы и произведения вероятностей. Формулы полной вероятности и Байеса

Задача. 20 билетов студент знает полностью, в 10 билетах он не знает по одному из двух вопросов; 7 билетов он не знает вообще. Считается, что студент получит положительную оценку, когда ответит хотя бы на один из двух вопросов в билете. Какова вероятность того, что студент получит положительную оценку?

Решение

Событие A – студент вытягивает билет, который знает; $P(A)$=20/37.

B – вытягивает билет, который он знает наполовину; $P(B)$=10/37.

$A + B$ – вытягивает билет, который он знает наполовину или который он знает полностью. A и B – несовместные события, так как студент не может одновременно вытянуть билет, который знает и который знает наполовину, следовательно, $P(A + B) = P(A) + P(B)$ = 20/37+10/37.

Задача. Один брат выучил 12 билетов из 25, другой – 15. Какова вероятность, что экзамен сдаст хотя бы один брат?

Решение

Пусть A – первый брат сдаст экзамен. B – второй брат сдаст экзамен. Искомое событие $C = A + B$, так как сдача экзамена хотя бы одним братом означает, что сдает первый или второй (то есть имеем дело с суммой событий). События совместны, так как сдать экзамен могут и оба вместе. Применим формулу для подсчета вероятности суммы совместных событий: $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \bullet B)$. $P(A)$ = 12/25, $P(B)$ = 15/25 = 3/5. События А и В независимы, следовательно, $P(A \bullet B) = P(A) \bullet P(B)$ = 12/25 • 3/5 = 36/125.

$P(A + B)$ = 12/25 + 15/25 + 36/125 = 99/125.

Ответ: 99/125.

Задача. Вероятность того, что один студент вытянет счастливый билет (событие А) 0,45, для другого студента – 0,55 (В). Найти вероятность, что, сдавая экзамен в разные дни (А, В – независимые): оба студента вытянут счастливые билеты (С), один из студентов вытянет счастливый билет (D), ни *один из них не вытянет счастливый билет (E), хотя бы один вытянет счастливый билет (F).*

Решение

Представим события C, D, E, F через события A и B.

Событие C – оба вытянут счастливые билеты состоит из событий A – первый студент вытянет счастливый билет и B – второй студент вытянет счастливый билет, т. е. $C = A \bullet B$.

Событие D – один из студентов вытянет счастливый билет состоит из следующих событий: A – первый студент вытянет счастливый билет **и** $\overline{B}$ – второй студент не вытянет счастливый билет **или** $\overline{A}$ – второй студент вытянет счастливый билет **и** B – первый студент не вытянет счастливый билет. То есть, $D = A \bullet \overline{B} + \overline{A} \bullet B$.

Событие E – ни один не вытянет счастливый билет, состоит из событий $\overline{A}$ – первый студент не вытянет счастливый билет **и** $\overline{B}$ – второй студент не вытянет счастливый билет, т. е. $E = \overline{A} \cdot \overline{B}$.

Событие F – хотя бы один не вытянет счастливый билет, состоит из события $\overline{E}$ – неверно, что ни один не вытянет счастливый билет, т. е. $F = \overline{E} = \overline{\overline{A} \cdot \overline{B}}$.

События A и B независимы, следовательно, и события $\overline{B}$, $\overline{A}$ независимы. При подсчете вероятности событий можно применять правило произведения независимых событий.

$P(C) = P(A \bullet B) = P(A) \bullet P(B) = 0{,}45 \bullet 0{,}55 = 0{,}2475.$

$P(D) = P(A \bullet \overline{B} + \overline{A} \bullet B) = P(A \bullet \overline{B}) + P(\overline{A} \bullet B) = P(A) \bullet P(\overline{B}) + P(\overline{A}) \bullet P(B) = P(A) \bullet (1 - P(B)) + (1 - P(A)) \bullet P(B) = 0{,}45 \bullet 0{,}45 + 0{,}55 \bullet 0{,}55 = 0{,}2025 + 0{,}3025 = 0{,}505$ (События $A \bullet \overline{B}$ и $\overline{A} \bullet B$ несовместны).

$P(E) = P(\overline{A} \bullet \overline{B}) = P(\overline{A}) \bullet P(\overline{B}) = (1 - P(B)) \bullet (1 - P(A)) = 0{,}55 \bullet 0{,}45 = 0{,}2475.$

$P(F) = P(\overline{E}) = 1 - P(E) = 1 - 0{,}2475 = 0{,}7525.$

Задача. Из 29 билетов 13 – счастливые. Какова вероятность того, что первый студент вытянет счастливый билет, а второй следом за ним несчастливый?

Решение

Пусть B – первый студент вытянул счастливый билет, A – второй студент вытянул несчастливый билет. Тогда событие $A{\bullet}B$ – первый студент вытянул счастливый билет, а второй – несчастливый. A и B – зависимые события. $P(B) = \frac{13}{29}$, при условии, что первый билет был счастливый, вероятность вытянуть несчастливый билет $P(A/B) = \frac{16}{29-1} = \frac{16}{28} = \frac{4}{7}$. Тогда по формуле для произведения зависимых событий $P(AB) = P(A/B)P(B) = \frac{4}{7} \cdot \frac{13}{29} = \frac{52}{203}$.

Задача. В аудитории занимались 3 группы. В первой группе 5 отличников, во второй – 7, в третьей – 3.

а) *Какова вероятность, что случайно оставленная зачетка принадлежит отличнику, если в первой группе 22 студента, во второй – 20, в третьей – 25?*

б) *Найти вероятность того, что потерянная зачетка отличника принадлежит студенту первой группы? Второй группы? Третьей группы?*

Решение

а) Очевидно, что вероятность искомого события будет изменяться в зависимости от того, студент какой группы потерял зачетку.

Пусть A – оставленная зачетка принадлежит отличнику, B_1 – зачетка принадлежит студенту первой группы, B_2 – зачетка принадлежит студенту второй группы, B_3 – зачетка принадлежит студенту третьей группы.

B_1, B_2, B_3 – независимые события. События A/B_1, A/B_2, A/B_3 означают, что зачетка принадлежит отличнику, при условии, что зачетка принадлежит студенту первой, второй, третьей группы соответственно. Следовательно, событие $A = A \cdot B_1 + A \cdot B_2 + A \cdot B_3$, что означает, что событие A наступит в случае, если зачетка принадлежит студенту первой группы и зачетка отличника, или если зачетка принадлежит студенту второй группы и зачетка отличника, или если зачетка принадлежит студенту третьей группы и зачетка отличника.

Поэтому $P(A) = P(B_1)P(A/B_1) + P(B_2)P(A/B_2) + P(B_3)P(A/B_3)$, так как произведение событий A и B_i находится по формуле условной вероятности.

$P(B_1) = \frac{22}{67}$, $P(B_2) = \frac{20}{67}$, $P(B_3) = \frac{25}{67}$. $P(A/B_1) = \frac{5}{22}$; $P(A/B_2) = \frac{7}{20}$;

$P(A/B_3) = \frac{3}{25}$.

Таким образом, по формуле полной вероятности $P(A) = \frac{22}{67} \cdot \frac{5}{22} + \frac{20}{67} \cdot \frac{7}{20} + \frac{25}{67} \cdot \frac{3}{25} = \frac{15}{67}$.

б) События B_1, B_2, B_3 – попарно несовместны.

По формуле Байеса, $P(B_1/A) = \frac{P(B_1A)}{P(A)} = \frac{P(B_1)P(A/B_1)}{P(A)}$. $P(B_1) = \frac{22}{67}$, $P(A/B_1) = \frac{5}{22}$, $P(A) = \frac{15}{67}$ (как было найдено ранее), поэтому $P(B_1/A) = \frac{\frac{22}{67} \cdot \frac{5}{22}}{\frac{15}{67}} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$. Аналогичным образом можно найти вероятность события, что потерянная зачетка отличника принадлежит студенту второй группы и третьей группы:

$$P(B_2/A) = \frac{P(B_2A)}{P(A)} = \frac{P(B_2)P(A/B_2)}{P(A)} = \frac{\frac{20}{67} \cdot \frac{7}{20}}{\frac{15}{67}} = \frac{7}{15}.$$

$$P(B_3/A) = \frac{P(B_3A)}{P(A)} = \frac{P(B_3)P(A/B_3)}{P(A)} = \frac{\frac{25}{67} \cdot \frac{3}{25}}{\frac{15}{67}} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}.$$

III тип. Комбинаторные задачи на вероятность

Задача. Набирая номер телефона, абонент забыл первые 3 цифры. Какова вероятность правильного набора абонентом цифр наугад?

Решение

Данную задачу можно разбить на 2 части:

1) Определить, сколькими способами можно составить трехзначное число (первые 3 цифры телефона);
2) Определить вероятность набора абонентом верного номера наугад.

Трехзначное число состоит из трех цифр: $\overline{abc}$. Первую цифру – число тысячных (множество a), можно выбрать из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, т. е. множество

$$a = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\},$$

$$b = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\},$$

$$c = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}.$$

Таким образом, задачу можно переформулировать: сколькими способами (N) из элементов множеств a, b, c можно составить тройку упорядоченных элементов? Согласно правилу произведения $N = 9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$.

Из 900 номеров только один является верным, следовательно, вероятность набора верного номера наугад $P(A) = 1/900$.

Ответ: 1/900.

Задача. Написано слово МИР! Буквы (символы) записали на отдельных карточках и перемешали. Какова вероятность того, что наудачу извлеченные по порядку буквы снова составят слово МИР!

Решение

Всего имеется 4 карточки: М, И, Р, !. Из них нужно составить определенное слово из 3 букв и одного знака, т.е. нужно найти количество перестановок 4 символов по 4 местам. $P_4 = 4! = 24$.

При данных перестановках только один вариант расставления имеющихся символов подойдет по условию. Следовательно, вероятность наудачу составить нужное слово $P(A) = 1/24$.

Ответ: 1/24.

Задача. В урне лежат 8 занумерованных шаров. Наугад берут 4 шара. Какова вероятность того, что 3 шара окажутся с нечетными номерами?

Решение

Всего нужно вытащить 4 шара из 8. Это можно сделать $C_8^4 = \frac{8*7*6*5}{1*2*3*4} = 70$ способами. Из 4 шаров 3 с нечетными номерами можно получить $C_4^3 = \frac{4*3*2}{1*2*3} = 4$ способами. Значит вероятность того, что если из 8 пронумерованных шаров извлечь 4 и 3 из них будут с нечетными номерами $P(A) = 4/70 = 2/35$.

Ответ: 2/35.

IV тип. Подсчет количества информации в сообщении

Задача. В пруду 50000 рыб (8000 карасей, 2000 щук, 40000 пескарей).Какое сообщение наиболее информативно: о том, что рыбак поймал карася, щуку или пескаря?

Решение

Для начала определим вероятность поймать каждую рыбу. Вероятность поймать карася $P(A)= 8000/50000 = 4/25 = 0,16$. Вероятность поймать щуку $P(A)= 2000/50000 = 2/50 = 0,04$. Вероятность поймать пескаря $P(A)= 40000/50000 = 4/5 = 0,8$.

Зная вероятность поймать каждую рыбу, можно определить количество информации в сообщениях.

Количество информации в сообщении о том, что рыбак поймал карася $I = log_2\ (1/0,16) = log_2\ (100/16) = log_2\ (6,25) = 2,64$. Количество информации в сообщении о том, что рыбак поймал щуку $I = log_2(1/0,04) = log_2\ (100/4) = log_2(25) = 4,64$. Количество информации в сообщении о том, что рыбак поймал пескаря $I = log_2\ (1/0,8) = log_2\ (10/8) = log_2\ (1,25) = 0,32$.

На этом основании можно сделать вывод, что наиболее информативно сообщение о поимке щуки.

Ответ: наиболее информативно сообщение о поимке щуки.

Задача. Определить количество информации в слове МАМА, если по данным словаря русского языка частота появления символа: М – 0,026; А – 0,062.

Решение

В данной задаче частота появления символов – вероятность их появления, которую используют при подсчете количества информации. Следовательно, количество информации в слове МАМА $I = log_2(1/0.026) + log_2(1/0.062) + log_2(1/0.026) + log_2(1/0.062) = 2*log_2(1/0.026) + 2*log_2(1/0.062) = 2*log_2(1000/26) + 2*log_2(1000/62) \sim 2*log_2(38,46) + 2*log_2(16,13) = log_2(38,46)^2 + log_2(16,13)^2 \sim log_2(1479) + log_2(260) = =log_2(1479 * 260) = log_2(384540) \sim 18.$

Ответ: количество информации в слове МАМА ~ 18 бит.

Задачи для самостоятельного решения

1. В коробке 6 конфет с вишневой начинкой, 9 с шоколадной. Какова вероятность того, что наудачу извлеченная из коробки конфета окажется с вишневой начинкой (A)? С шоколадной ($\overline{A}$)?

2. Два работника приходят каждое утро в магазин, чтобы открыть его для покупателей. Первый работник не опоздает к открытию с вероятностью 0,51, второй – с вероятностью 0,38. Какова вероятность того, что магазин откроется вовремя?

3. Студенту на контрольной работе предложили 8 конвертов с заданиями. Из них 6 конвертов содержат простые задания, остальные – сложные. Какова вероятность того, что, случайным образом выбирая конверты, студент сначала возьмет конверт с простым, а затем со сложным заданием?

4. Имеется 2 карточки с буквой К, 2 карточки с буквой А и одна карточка с буквой З. Какова вероятность случайным образом составить из этих карточек слово КАЗАК?

5. Определить количество информации в слове КОНФЕТТИ, если, по данным словаря русского языка, частота появления символа: Н – 0,053; Ф – 0,002; К – 0,028; Т – 0,053; О – 0,09; И – 0,062; Е – 0,072.

Лабораторная работа №6. Математическая статистика.

Цель: овладеть навыками первичной статистической обработки данных.

Задачи научиться:

1) находить по данному эмпирическому ряду ранжированный и дискретный вариационные ряды, а также строить интервальный закон распределения и выполнять обратную задачу;

2) по данным выборки строить таблицы и полигоны абсолютных, относительных и накопленных частот, а также, наоборот, по таблицам и

графикам восстанавливать выборку до вида ранжированного вариационного ряда;

3) выбирать наиболее подходящую и вычислять средние степенные и структурные величины;

4) по эмпирическим данным выборки находить показатели ее вариации.

Общие теоретические сведения

Математическая статистика – наука, изучающая массовые явления для выявления закономерностей и получения некоторых обобщенных показателей, кратко характеризующих полученные данные.

Под *статистическими данными* понимается любая числовая информация, характеризующая некоторую совокупность объектов, обладающих теми или иными общими признаками.

Все множество исследуемых объектов называется *генеральной совокупностью* (ГС). Общее свойство объектов генеральной совокупности называется *признаком* генеральной совокупности.

Выборка (В) (выборочная совокупность) – подмножество генеральной совокупности, где каждый ее элемент выбирается случайным образом.

Объем совокупности (генеральной или выборочной) – количество элементов в ней.

N – объем генеральной совокупности, n – объем выборки. Из определений ГС и В следует, что $N > n$ (как правило, $N > 1000$, $10 \leq n \leq 100$).

Случайная величина – величина, которая в результате опыта принимает то или иное заранее неизвестное числовое значение. Каждой случайной величине X соответствует некоторое множество чисел. Это – множество значений, которые может принимать величина X.

Дискретная случайная величина – случайная величина, принимающая отдельные значения x_i с вероятностями p_i. Причем, если $x_1, x_2, \ldots$ – возможные значения величины X, а $p_1, p_2, \ldots$ – их вероятности, то $p_1 + p_2 + \ldots = 1$.

Непрерывная случайная величина – случайная величина, которая принимает любые значения из некоторого промежутка на множестве действительных чисел.

Пусть x_1, x_2, …, x_n – совокупность случайных значений случайной величины X, т. е. выборка, тогда данную совокупность x_i называют *эмпирическим рядом*.

Эмпирический ряд x_1, x_2, …, x_n представленный, в порядке возрастания с перечислением повторяющихся значений, называется *ранжированным вариационным рядом*: $y_1, y_2, \ldots, y_n$ (где $y_1 \le y_2 \le \ldots \le y_n$).

Эмпирический ряд x_1, x_2, …, x_n, представленный в порядке возрастания без повторяющихся значений, называется *дискретным вариационным рядом*: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ (где $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_m$).

Каждое значение $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ называется *вариантой* выборки.

Значения эмпирического ряда x_1, x_2, …, x_n располагаются в пределах отрезка $[x_{\min}, x_{\max}]$, где $x_{\min}$ – минимальное значение из эмпирического ряда, $x_{\max}$ – максимальное значение из эмпирического ряда. Ранжированный вариационный ряд, разбитый на интервалы длиной h, в пределах данного отрезка называется *интервальным законом распределения*. Величину оптимального интервала можно определить по формуле Стэрджеса: $h = \dfrac{x_{\max} - x_{\min}}{1 + 3{,}32 * \lg n}$.

Табличное и графическое представление первичной обработки выборки

Пусть $p_i^* = \dfrac{k_i}{n}$ – относительная частота появления числа α_i в данной серии опытов, где k_i – количество опытов, в которых наступало событие $X = \alpha_i$, тогда получим *таблицу относительных частот*.

Таблица относительных частот

α_i	α_1	α_2	α_3	…	α_m
p_i^*	p_1^*	p_2^*	p_3^*	…	p_m^*

Полигоном относительных частот называют кривую, отрезки которой соединяют точки $(\alpha_1; p_1^*)$, $(\alpha_2; p_2^*)$, …, $(\alpha_m; p_m^*)$.

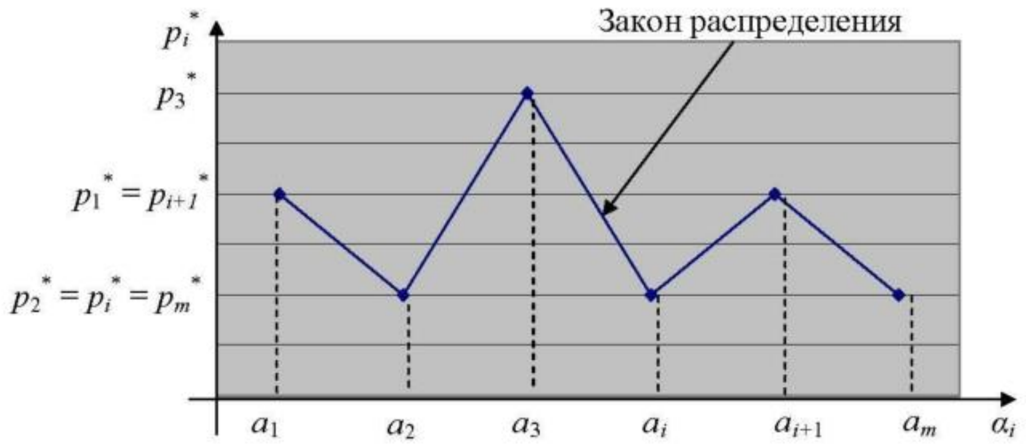


Рис. 1. Полигон относительных частот

Таблица и полигон относительных частот задают *эмпирический закон распределения*.

Таблицей абсолютных частот называется таблица, сопоставляющая *m*, количество опытов в которых наступало событие $X = \alpha_i$, со значением α_i.

Таблица абсолютных частот

α_i	α_1	α_2	α_3	…	α_m
p_i	p_1	p_2	p_3	…	p_m

Полигоном абсолютных частот называют ломаную, отрезки которой соединяют точки $(\alpha_1; p_1)$, $(\alpha_2; p_2)$, …, $(\alpha_m; p_m)$.

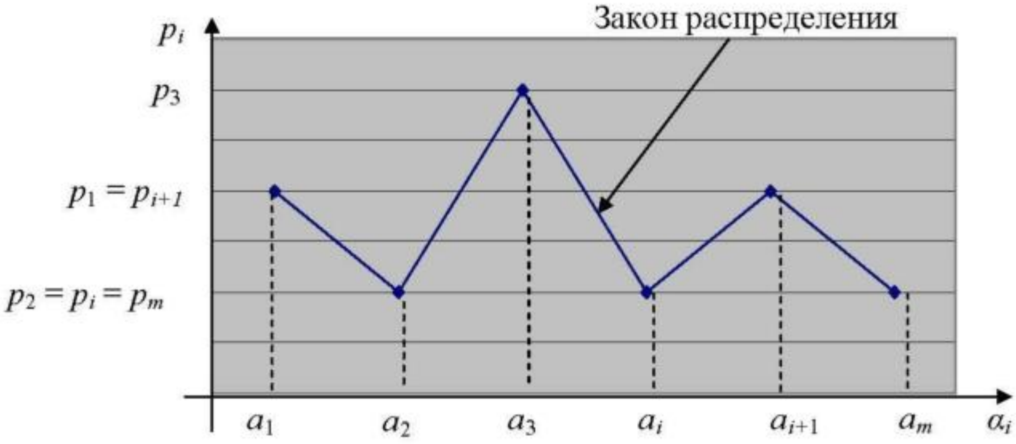


Рис. 2. Полигон абсолютных частот

Таблица и полигон абсолютных частот задают *эмпирический закон распределения*.

Графики абсолютных и относительных частот не отличаются, разница лишь в том, что полигон абсолютных частот в n раз выше полигона относительных. Поэтому при графическом или табличном представлении первичной обработки выборки можно использовать один из эмпирических законов (либо относительных, либо абсолютных частот).

При составлении таблицы и полигона *накопленных частот* каждому значению случайной величины α_i ставят в соответствие накопленную относительную частоту. Так для α_1 относительная частота $\breve{p}_1 = p_1$, для α_2 относительная частота $\breve{p}_2 = p_1 + p_2, \ldots, \breve{p}_m = p_1 + p_2 + \ldots + p_m$.

Причем $\breve{p}_m = p_1 + p_2 + \ldots + p_m = 1$.

Таблица накопленных частот

α_i	α_1	α_2	α_3	…	α_m
$\breve{p}_i$	$\breve{p}_1 = p_1$	$\breve{p}_2 = p_1 + p_2$	$\breve{p}_3 = p_1 + p_2 + p_3$	…	1

Полигоном накопленных относительных частот называют ломанную, отрезки которой соединяют точки $(\alpha_1;\ \breve{p}_1), (\alpha_2;\ \breve{p}_2), \ldots, (\alpha_m;\ \breve{p}_m)$.

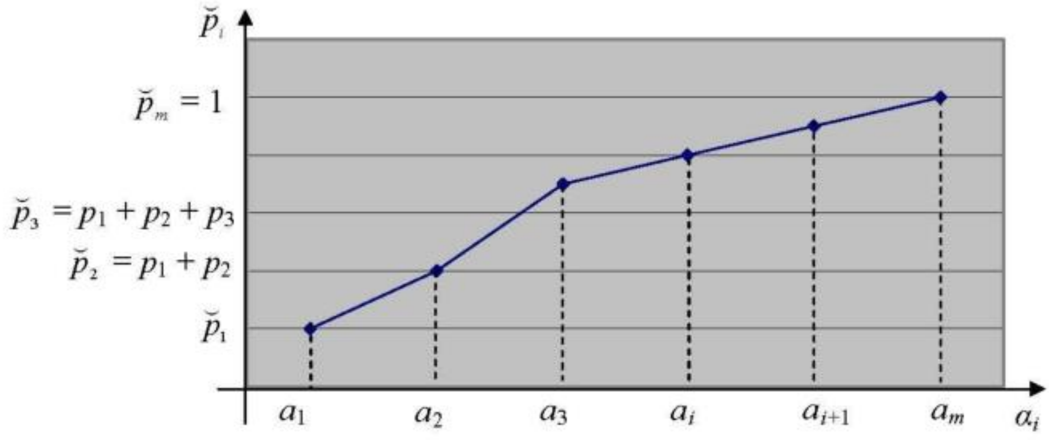


Рис. 3. Полигон накопленных относительных частот

Для непрерывных случайных величин, а также для дискретных выборок большого объема используется интервальный закон распределения.

Для построения такого закона весь диапазон изменения величины X разбивается на интервалы длиной h и находится частота попадания в i-интервал $\tilde{p}_i = \frac{m_i}{n}$, где m_i – количество полученных значений величины X, приходящихся на i-й интервал.

Табличный интервальный закон

Интервал	$c_1; c_2$	$c_2; c_3$	…	$c_l; c_{l+1}$
$\tilde{p}_i$	$\tilde{p}_1$	$\tilde{p}_2$	…	$\tilde{p}_l$

Интервальный закон распределения часто изображается графически в виде *гистограммы*. Гистограммой относительных частот называют ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длины h, а высоты равны отношению $\tilde{p}_i/h$ (плотность относительной частоты). Площадь частичного i-го прямоугольника равна $\tilde{p}_i$ – относительной частоте. Площадь гистограммы относительных частот равна сумме всех относительных частот, т. е. единице.

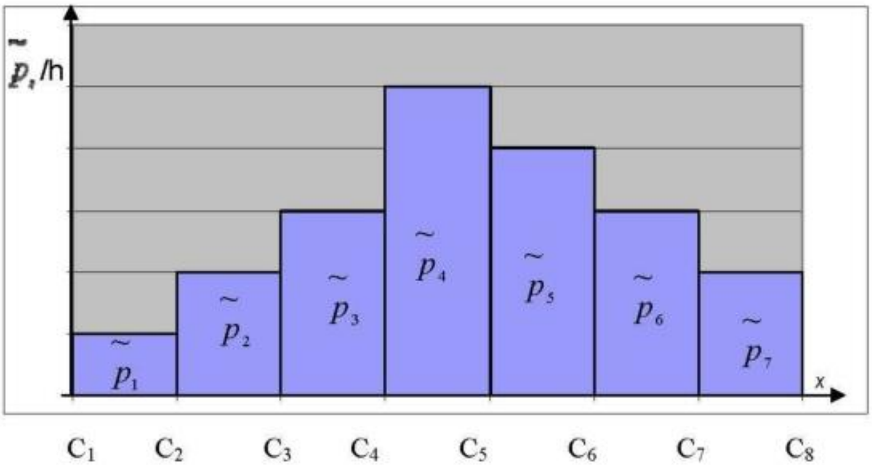


Рис. 4. Гистограмма относительных частот

Средние величины

Средние величины используются для характеристики эмпирического ряда (выборки). Средние величины подразделяют на степенные и структурные. К степенным средним величинам относят: арифметическую, геометрическую, гармоническую, квадратическую средние величины. К структурным – моду и медиану.

Средняя степенная отражает величину, варьирующуюся (изменяющуюся) в расчете на единицу всей выборки.

Принято различать простые и взвешенные средние величины. *Простая средняя* величина применяется в тех случаях, когда каждое значение случайной величины встречается один или одинаковое число раз. Когда отдельные значения исследуемой выборки встречаются не один, а много, причем неодинаковое число раз, в этих случаях рассчитывают среднюю *взвешенную величину*. То есть простую среднюю целесообразно искать в случае, когда задан эмпирический ряд, а взвешенную – когда представлена таблица абсолютных частот.

Простая средняя арифметическая ($\overline{x_a}$) – простая сумма всех значений выборки, деленная на общее количество этих значений

$$\overline{x_a} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i .$$

Взвешенная средняя арифметическая ($\overline{x_{ap}}$) – средняя из вариант (a_i) выборки, которые повторяются различное количество раз или имеют разный вес

$$\overline{x_{ap}} = \frac{\sum_{i=1}^{m} a_i p_i}{\sum_{i=1}^{m} p_i},$$ где p_i – абсолютная частота появления значения a_i.

Средняя гармоническая взвешенная ($\bar{x}_{grp}$) вычисляется, когда нет информации о частоте (p_i) вариант выборки (a_i), а известно их произведение $a_i\, p_i = w_i$.

$$\bar{x}_{grp} = \frac{\sum_{i=1}^{m} w_i}{\sum_{i=1}^{m} \frac{w_i}{a_i}}.$$

Средняя гармоническая простая ($\bar{x}_{gr}$) применяется в тех случаях, когда произведения $a_i\, p_i$ одинаковы или равны единице ($w_1 = w_2 = \ldots = w_m$ или $w_i = 1$)

$$\bar{x}_{gr} = \frac{1 - 1 - \ldots - 1}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_m}} = \frac{m}{\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{a_i}}.$$

При определении коэффициента среднего темпа роста, когда необходимо сохранить неизменным произведение каждой величины признака, применяют среднюю простую геометрическую ($\bar{x}_{gm}$) и взвешенную геометрическую ($\bar{x}_{gmp}$).

$$\bar{x}_{gm} = \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} .$$

$$\bar{x}_{gmp} = \sqrt[\sum_{i=1}^{m} p_i]{a_1^{p_1} a_2^{p_2} \ldots a_m^{p_m}} = \sqrt[\sum_{i=1}^{m} p_i]{\prod_{i=1}^{m} a_i^{p_i}} .$$

Средняя квадратичная применяется, когда осреднению подлежат величины, выраженные в виде квадратных функций, например, средние диаметры колес, труб, деревьев, средние стороны квадратов и др.

$$\overline{x}_{kv} = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n}}$$ *– простая квадратичная*

$$\overline{x}_{kvp} = \sqrt{\frac{a_1^2 p_1 + a_2^2 p_2 + ... + a_n^2 p_m}{p_1 + p_2 + ... + p_m}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i}}$$ *– взвешенная квадратичная*

Между величинами степенных средних, рассчитанных по одной и той же совокупности единиц статистического наблюдения и одному и тому же признаку, существует следующее соотношение: $\overline{x}_{gr} < \overline{x}_{gm} < \overline{x}_a < \overline{x}_{kv}$.

Структурные средние величины используются для характеристики центральной тенденции варьирующейся (изменяющейся) случайной величины, уровень случайной величины.

Медиана (Ме) – значение случайной величины в ранжированном вариационном ряду, делящая его на две равные части.

Мода (Мо) – называют наиболее часто встречающееся значение случайной величины в эмпирическом ряду (в выборке).

Показатели вариации

Вариация – различия (изменчивость) в значениях признака данной генеральной совокупности.

Показатель вариации – числовая характеристика колебания значений случайной величины. Различают абсолютные (размах, среднее линейное отклонение, дисперсия, среднеквадратическое отклонение) и относительные (коэффициенты осцилляции, линейный, вариации) показатели вариации.

Абсолютные показатели вариации измеряются в тех же величинах, что и признак (кроме дисперсии, которая измеряется в квадратных величинах).

Размах вариации (R) показывает, в каких пределах колеблется размер признака, образующего эмпирический ряд:

$$R = x_{\max} - x_{\min}.$$

Среднее линейное ($\overline{d}$) отклонение представляет среднюю арифметическую абсолютных значений отклонений отдельных значений случайной величины от их средней арифметической величины:

$$\overline{d} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left| x_i - \overline{x}_a \right|}{n}$$ – среднее линейное (от простой средней арифметической)

или

$$\overline{d}_p = \frac{\sum_{i=1}^{m} \left| a_i - \overline{a}_{ap} \right| \cdot p_i}{\sum_{i=1}^{m} p_i}$$ – среднее взвешенное линейное

(от взвешенной средней арифметической), где

x_i – i-е значение случайной величины из эмпирического ряда,

x_a – простая средняя арифметическая величина,

n – количество элементов в выборке,

a_i – i-е значение варианты из дискретного вариационного ряда,

x_{ap} – взвешенная средняя арифметическая величина,

m – количество вариант в дискретном вариационном ряду,

p_i – частота, с которой встречается i-я варианта в дискретном вариационном ряду.

Дисперсия (D) – средний квадрат отклонений отдельных значений признака от их средней арифметической величины:

$$D = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \overline{x}_a \right)^2}{n}$$ – простая или

$$D_p = \frac{\sum_{i=1}^{m} \left(a_i - \overline{a}_{ap}\right)^2 \cdot p_i}{\sum_{i=1}^{m} p_i}$$ – взвешенная.

Среднее квадратическое отклонение (σ) – обобщающая характеристика размеров вариации признака в совокупности:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \overline{x}_a\right)^2}{n}}$$ – простое или

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{m} \left(a_i - \overline{a}_{ap}\right)^2 \cdot p_i}{\sum_{i=1}^{m} p_i}}$$ – взвешенное.

Очевидно, что достаточно найти либо дисперсию, либо среднее квадратическое отклонение, так как $c = \sqrt{D}$.

Относительные показатели вариации выражаются в процентах.

Коэффициент осцилляции $V_R = \frac{R}{\overline{x}_a} \cdot 100$.

Линейный коэффициент вариации $V_d = \frac{d}{\overline{x}_a} \cdot 100$.

Коэффициент вариации $V_\sigma = \frac{c}{\overline{x}_a} \cdot 100$.

Примечание. Под первичной обработкой данных будем понимать построение:

ж) ранжированного вариационного ряда;

з) таблицы относительных или абсолютных частот;

и) таблицы накопленных частот;

к) таблицы интервального закона распределения;

л) полигона относительных или абсолютных частот;

м) полигона накопленных частот;

н) гистограммы;

а также вычисление:

о) средней степенной величины, наиболее уместной для условий выборки;

п) моды и медианы;

р) абсолютных и относительных показателей вариации.

Практические задания

Примеры решений

I тип. Общие понятия статистики. Табличное и графическое представление первичной обработки выборки.

Задача. В университете среди 1000 человек дневного отделения нужно выяснить средний рост студента.Получена выборка: 165, 172, 159, 167, 165, 185, 164, 165, 180, 172, 156, 170, 166, 167, 167, 165.

а) *Из условия задачи указать: генеральную совокупность, признак, выборку, случайную величину, эмпирический ряд.*

б) *Найти объемы генеральной совокупности и выборки.*

в) *Определить вид случайной величины: дискретная или непрерывная.*

Решение

а) Все множество исследуемых объектов – это рост 1000 студентов, следовательно, всей генеральной совокупностью будет вся тысяча значений роста этих людей.

Общее свойство исследуемых объектов – рост, выраженный в сантиметрах, поэтому признак генеральной совокупности рост студентов.

Выборка – те значения роста случайно выбранных студентов, которые перечислены в условии.

Значения роста студента, которые принимает случайная величина в нашей выборке, представлены в условии. Все значения случайной величины можно получить, исследовав всю генеральную совокупность.

Эмпирический ряд представлен в условии перечислением роста выбранных студентов.

Таким образом, выборку можно называть эмпирическим рядом, а значения, перечисленные в ней – значения случайной величины.

б) Объем генеральной совокупности $N = 1000$. Объем выборки получим, пересчитав все значения роста, данные в условии: $n = 16$.

в) Данная случайная величина – рост, выраженный в сантиметрах, является дискретной величиной, так как не может принимать любое значение на числовой прямой (например, не может быть рост отрицательным числом, нулем, или 157,6666666666…).

Задача. По выборке предыдущей задачи построить:

ранжированный, дискретный и интервальный вариационные ряды;

табличный закон распределения абсолютных, относительных и накопленных частот, а также интервальный закон распределения;

полигоны абсолютных, относительных и накопленных частот, гистограмму.

Решение

в) Ранжированный вариационный ряд – это упорядоченная выборка: 156, 159, 164, 165, 165, 165, 165, 166, 167, 167, 167, 170, 172, 172, 180, 185.

Дискретный вариационный ряд – это ранжированный ряд без повторов: 156, 159, 164, 165, 166, 167, 170, 172, 180, 185.

Интервальный вариационный ряд – ряд, разбитый на интервалы. Для определения размера интервала воспользуемся формулой Стэрджеса:

$$h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{1 + 3{,}32 * \lg n},$$

в данной задаче $x_{\max} = 185$, $x_{\min} = 156$, n = 16. Тогда

$$h = \frac{185 - 156}{1 + 3{,}32 * \lg 16} = \frac{29}{1 + 3{,}32 * 1{,}46} \approx 5.$$

Построим интервальный ряд:

156-161; 161-166; 166-171; 171-176; 176-181; 181-186.

г) Табличный закон распределения абсолютных частот.

В верхней строке помещаем упорядоченные значения признака без повторов (т. е. дискретный вариационный ряд), называемые вариантами и обозначаемые a_i. Во второй строке поставим в соответствие варианте из первой – число ее повторов в выборке, т. е. абсолютную частоту p_i. Итак, таблица абсолютных частот имеет вид:

Значение признака (a_i)	156	159	164	165	166	167	170	172	180	185
Абсолютная частота (p_i)	1	1	1	4	1	3	1	2	1	1

Табличный закон распределения относительных частот

В верхней строке помещаем упорядоченные значения признака без повторов (т. е. дискретный вариационный ряд), называемые вариантами и обозначаемые a_i. Во второй строке поставим в соответствие варианте из первой – число, ее повторов в выборке, деленное на общее число элементов выборки, т. е. относительную частоту p_i^*. Итак, таблица относительных частот имеет вид:

Значение признака (a_i)	156	159	164	165	166	167	170	172	180	185
Относительная частота (p_i)	1/16	1/16	1/16	4/16	1/16	3/16	1/16	2/16	1/16	1/16

Табличный закон распределения накопленных частот

В верхней строке помещаем дискретный вариационный ряд. Во второй строке поставим в соответствие варианте из первой – число, ее накопленную относительную частоту $\breve{p}_i$. Например, для 156 накопленная частота $\frac{1}{16}$, а для 159 – $\frac{1}{16}+\frac{1}{16}=\frac{2}{16}$, для 164 – $\frac{2}{16}+\frac{1}{16}=\frac{3}{16}$ и т. д., т. е. к относительной частоте каждого значения признака нужно добавить накопленные частоты предыдущих вариант.

Итак, таблица накопленных частот имеет вид:

Значение признака (a_i)	156	159	164	165	166	167	170	172	180	185
Накопленная частота ($\breve{p}_i$)	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{8}{16}$	$\frac{11}{16}$	$\frac{12}{16}$	$\frac{14}{16}$	$\frac{15}{16}$	$\frac{16}{16}$

Так как для максимального значения признака получили 1, то накопленные частоты найдены верно.

Интервальный закон распределения

В пункте а) данной задачи был найден интервальный вариационный ряд, для построения таблицы интервального закона распределения осталось поставить в соответствие интервалу количество значений выборки, попавших в него, (учитывая повторяющиеся значения) деленное на общее число элементов:

Интервал	156-161	161-166	166-171	171-176	176-181	181-186
Относительная частота ($\tilde{p}_i$)	$\frac{2}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$

166 попадает на границу интервала, отнесем частоту этого значения в правый интервал (следующий справа).

в) полигоны абсолютных, относительных и накопленных частот, гистограмму.

Используя данные соответствующих таблиц из пункта б), построим графики (см. рис. 5-9), в которых по оси ординат отложим значения вариант (первая строка таблиц), а по оси абсцисс – соответствующие данным значениям частоты (вторая строка таблиц).

Рис. 5

Рис. 6

Рис. 7

Рис. 8

Задача. По полигону накопленных частот восстановить внешний вид эмпирических данных до ранжированного вариационного ряда.

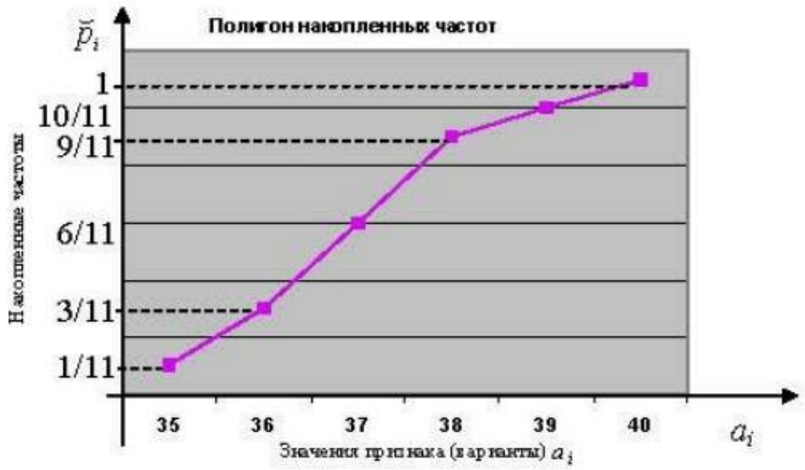


Рис. 9

Решение

По полигону составим таблицу накопленных частот.

Значение признака (a_i)	35	36	37	38	39	40
Накопленная частота ($\breve{p}_i$)	$\frac{1}{11}$	$\frac{3}{11}$	$\frac{6}{11}$	$\frac{9}{11}$	$\frac{10}{11}$	1

Найдем относительную частоту для вариант, для этого из накопленной частоты каждой варианты отнимем накопленную частоту предыдущего значения признака.

Значение признака (a_i)	35	36	37	38	39	40
Относительная частота ($\breve{p}_i$)	$\frac{1}{11}$-0	$\frac{3}{11}-\frac{1}{11}$	$\frac{6}{11}-\frac{3}{11}$	$\frac{9}{11}-\frac{6}{11}$	$\frac{10}{11}-\frac{9}{11}$	1-$\frac{10}{11}$

Получим таблицу относительных частот.

Значение признака (a_i)	35	36	37	38	39	40
Относительная частота ($\tilde{p}_i$)	$\frac{1}{11}$	$\frac{2}{11}$	$\frac{3}{11}$	$\frac{3}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{11}$

Верхние значения (числитель) дроби относительной частоты представляют собой абсолютную частоту, получим таблицу абсолютных частот.

Значение признака (a_i)	35	36	37	38	39	40
Абсолютная частота (p_i)	1	2	3	3	1	1

Осталось записать ранжированный вариационный ряд с учетом частоты каждой варианты: 35; 36; 36; 37; 37; 37; 38; 38; 38; 39; 40.

Ответ: 35; 36; 36; 37; 37; 37; 38; 38; 38; 39; 40.

II тип. Средние величины

Задача. Найти наиболее подходящую среднюю величину (арифметическую, геометрическую, гармоническую, квадратическую среднюю; простую или взвешенную). Найти моду и медиану по следующим данным:

а) Выборка по возрасту учащихся, посещающих туристический кружок в школе: 12; 13; 10; 18; 10; 15; 11; 14; 19; 13; 12; 15; 13; 10; 16; 14;

б) Выборка по возрасту учащихся, посещающих театральный кружок в школе:

a_i	*9*	*10*	*12*	*14*	*16*	*17*
p_i	*2*	*3*	*5*	*4*	*1*	*1*

в) Исследовалась скорость бега одного спортсмена на 100 метров в течение года, получили выборку:

a_i	11,2	11,3	11,4	11,5	11,6	11,7	11,9
$a_i\,p_i = w_i$	11,2	22,6	34,2	46	23,2	11,7	11,9

г) В течение рабочего дня выборочно были сняты показания амперметра с одного станка получились следующие результаты:

a_i	0,2	0,3	0,4	0,6
$a_i\,p_i = w_i$	12	12	12	12

д) За девять учебных четвертей у учащегося наблюдались следующие коэффициенты прироста скорости чтения:

1,2; 1,1; 1,3; 1,2; 1,4; 1,1; 1,2; 1,2; 1,4.

е) Коэффициент успевающих учеников класса за 10 недель имел следующие значения:

a_i	*0,75*	*0,95*	*1*	*1,1*	*1,2*	*1,25*
p_i	*1*	*2*	*4*	*1*	*1*	*1*

ж) При измерении площадей квадратных садовых участков получена выборка из длин сторон участков: 2; 1; 3; 3; 4; 5; 2; 1.

Решение

а) Что известно об эмпирических данных?

Во-первых, они заданы неупорядоченной выборкой.

Во-вторых, данные представлены значением признака, а не произведением вариант на частоту, то есть гармоническая средняя в данном случае не подходит.

В-третьих, возраст учащихся не является квадратной величиной, поэтому квадратическая средняя также не носит информационного значения.

В-четвертых, по условию прослеживается, что выборка производилась для установления среднего возраста студентов, а не выявления тенденции увеличения (уменьшения) возрастной категории со временем. Следовательно, не имеет смысла находить среднюю геометрическую.

Итак, более уместно в данных условиях находить среднюю арифметическую, причем, так как эмпирические данные заданы выборкой, то в этом случае проще находить простую среднюю арифметическую величину.

Воспользуемся формулой для нахождения простой средней арифметической величины (n = 16):

$$\overline{x_a} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{16}(12+ 13+ 10+ 18+ 10+ 15+ 11+ 14+ 19+ 13+ 12+ 15+ +13+ 10+$$

$$+16+ 14)=\frac{1}{16} \bullet 215 \approx 13.$$

Ответ: средний возраст учащихся в кружке 13.

б) Проведя рассуждения аналогичные предыдущему пункту с учетом того, что эмпирические данные заданы таблицей абсолютных частот, приходим к выводу, что наиболее характеризующей средней при этих условиях будет средняя арифметическая взвешенная. Воспользуемся формулой:

$$\overline{x_{ap}} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{m} a_i p_i}{\sum\limits_{i=1}^{m} p_i} = \frac{9\cdot 2 - 10\cdot 3 - 12\cdot 5 - 14\cdot 4 - 16\cdot 1 - 17\cdot 1}{2 + 3 - 5 - 4 + 1 - 1} = \frac{197}{16} = 12.$$

Ответ: средний возраст учащихся в кружке 12.

в) Что известно об эмпирических данных?

Во-первых, данные представлены произведением вариант на частоту, то есть в данном случае есть смысл искать среднюю гармоническую.

Во-вторых, произведения w_i не одинаковые и не равны единице, значит, используем взвешенную среднюю гармоническую.

Итак, по формуле средней гармонической взвешенной:

$$\overline{x}_{grp} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{m} w_i}{\sum\limits_{i=1}^{m} \frac{w_i}{a_i}} = \frac{11{,}2 - 22{,}6 + 34{,}2 - 46 - 23{,}2 - 11{,}7 + 11{,}9}{\frac{11{,}2}{11{,}2} + \frac{22{,}6}{11{,}3} + \frac{34{,}2}{11{,}4} + \frac{46}{11{,}5} + \frac{23{,}2}{11{,}6} + \frac{11{,}7}{11{,}7} + \frac{11{,}9}{11{,}9}} = \frac{161}{14} \approx 11{,}5.$$

Ответ: средний результат спортсмена за год 11,5.

г) Что известно об эмпирических данных?

Во-первых, данные представлены произведением вариант на частоту, то есть в данном случае есть смысл искать среднюю гармоническую.

Во-вторых, произведения w_i одинаковые, значит, используем простую среднюю гармоническую:

$$\bar{x}_{gr} = \frac{m}{\sum\limits_{i=1}^{m} \frac{1}{a_i}} = \frac{4}{\frac{1}{0,2}+\frac{1}{0,3}+\frac{1}{0,4}+\frac{1}{0,6}} = \frac{4}{12,5} = 0,32.$$

Ответ: средний показатель амперметра 0,32.

д) В условии речь идет об определении коэффициента среднего темпа роста, поэтому воспользуемся средней геометрической. Так как данные представлены выборкой, то используем простую среднюю геометрическую:

$$\bar{x}_{gm} = \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} = \sqrt[9]{1,2 \cdot 1,1 \cdot 1,3 \cdot 1,2 \cdot 1,4 \cdot 1,1 \cdot 1,2 \cdot 1,2 \cdot 1,4} = \sqrt[9]{7,67} \approx 1,25.$$

Ответ: средний прирост скорости чтения ученика 1,25.

е) В условии речь идет об определении коэффициента среднего темпа роста, поэтому воспользуемся средней геометрической. Так как данные представлены частотным рядом, то используем взвешенную среднюю геометрическую:

$$\bar{x}_{gmp} = \sqrt[\sum\limits_{i=1}^{m} p_i]{a_1^{p_1} a_2^{p_2} \ldots a_m^{p_m}} = \sqrt[\sum\limits_{i=1}^{m} p_i]{\prod_{i=1}^{m} a_i^{p_i}} =$$

$$= \sqrt[1+2+4+1+1+1]{0,75^1 \cdot 0,95^2 \cdot 1^4 \cdot 1,1^1 \cdot 1,2^1 \cdot 1,25^1} =$$

$$= \sqrt[10]{0,75 \cdot 0,9 \cdot 1 \cdot 1,1 \cdot 1,2 \cdot 1,25} = \sqrt[10]{1,11} \approx 1,01.$$

Ответ: средний коэффициент прироста успевающих учеников 1,01.

ж) В данном случае можно воспользоваться простой средней арифметической, а также простой средней квадратической. Но так как выборка осуществлялась с целью измерения площадей, то воспользуемся второй величиной:

$$\overline{x}_{kv} = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n}} =$$

$$= \sqrt{\frac{2^2 + 1^2 + 3^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 2^2 + 1^2}{8}} \approx 2{,}9.$$

Ответ: средняя сторона участка 2,9.

Задача. По таблице найти моду и медиану:

a_i	11,2	11,3	11,4	11,5	11,6	11,7	11,9
$a_i\,p_i = w_i$	11,2	22,6	34,2	46	23,2	11,7	11,9

Решение

Чтобы найти моду, необходимо знать частоты p_i вариант a_i. Найдем частоты $p_i = \dfrac{w_i}{a_i}$, результаты представим в таблице абсолютных частот.

a_i	11,2	11,3	11,4	11,5	11,6	11,7	11,9
p_i	1	2	3	4	2	1	1

Наиболее часто встречающееся значение 11,5. Итак, $Mo = 11{,}5$.

Чтобы найти медиану, необходимо построить по имеющимся данным ранжированный вариационный ряд. Представим варианты из таблицы в порядке возрастания с учетом их частоты:

11,2; 11,3; 11,3; 11,4; 11,4; 11,4; <u>11,5; 11,5;</u> 11,5; 11,5; 11,6; 11,6; 11,7; 11,9.

Всего в ряду 14 значений, серединой являются седьмое слева и седьмое справа значения: 11,5 и 11,5. Их среднее арифметическое и будет медианой, т. е. Me = $\dfrac{11{,}5 - 11{,}5}{2} = 11{,}5$.

Ответ: мода 11,5, медиана 11,5.

III тип. <u>Показатели вариации</u>

Задача. Найти показатели вариации для выборки:

2; 4; 6; 1; 0; 4; 7; 6; 4; 2; 1.

Решение

д) Упорядочим выборку: 0, 1, 1, 2, 2, 4, 4, 4, 6, 6, 7.

е) Найдем размах вариации $R = x_{\max} - x_{\min} = 7 - 0 = 7$.

ж) Найдем простое среднее арифметическое:

$$\overline{x_a} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{11} \cdot (0+1+1+2+2+4+4+4+6+6+7) = \frac{37}{11} \approx 3{,}4 \approx 3.$$

з) Найдем простое среднее линейное отклонение:

$$\overline{d} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left|x_i - \overline{x}_a\right|}{n} =$$

$$= \frac{|0-3|+|1-3|+|1-3|+|2-3|+|2-3|+|4-3|+|4-3|+|4-3|+|6-3|+|6-3|+|7-3|}{11} =$$

$$= \frac{3 - 2 - 2 - 1 - 1 + 1 - 1 - 1 - 3 - 3 - 4}{11} = \frac{22}{11} = 2.$$

и) Найдем простую дисперсию:

$$D = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}_a\right)^2}{n} = \frac{|0-3|^2+|1-3|^2+|1-3|^2+|2-3|^2+|2-3|^2+|4-3|^2}{11} +$$

$$+ \frac{|4-3|^2+|4-3|^2+|6-3|^2+|6-3|^2+|7-3|^2}{11} =$$

$$= \frac{9 - 4 + 4 - 1 + 1 - 1 - 1 + 1 - 9 + 9 - 16}{11} = \frac{56}{11} \approx 5.$$

к) Найдем среднее квадратическое отклонение:

$$c = \sqrt{D} = \sqrt{5} \approx 2{,}2 \approx 2.$$

л) Коэффициент осцилляции $V_R = \frac{R}{\overline{x}_a} \cdot 100 = \frac{7}{3} \cdot 100 = 233\%.$

м) Линейный коэффициент вариации $V_d = \frac{d}{\overline{x}_a} \cdot 100 = \frac{2}{3} \cdot 100 = 66\%.$

н) Коэффициент вариации $V_\sigma = \frac{c}{\overline{x}_a} \cdot 100 = \frac{2}{3} \cdot 100 = 66\%.$

Примечание. В данной выборке несколько значений повторяются, поэтому удобно находить взвешенные абсолютные показатели вариации. Причем для рационального оформления решения и уменьшения расчетов можно

Построить полигоны абсолютных, относительных и накопленных частот, а также гистограмму для выборки: 5,9; 6,8; 4,8; 7,9; 6,8; 5,6; 5,1; 3,4; 2,9; 6,8; 4,8; 2,8.

Найти арифметическую, геометрическую, гармоническую, квадратическую среднюю (взвешенные или простые) и сравнить их для данных:

a_i	137	138	141	143	145	150	152	156
p_i	2	3	1	1	2	1	2	1

Найти моду и медиану по ряду: 0,25; 0,33; 0,34; 3,5; 0,38; 0,42; 0,45.

Найти показатели вариации для выборки:

108, 106, 119, 117, 106, 119, 104, 106.

Произвести первичную обработку данных:

В течение года результаты метания копья спортсменки Васиной фиксировались на карточках. За год набралось 800 карточек. Выяснить основные статистические характеристики результатов метания копья Васиной, используя следующую выборку: 46, 53, 49, 60, 67, 49, 57, 53, 49, 60, 67.

$\sum_{i=1} p_i$ 11 11

Взвешенная дисперсия:

$$D_p = \frac{\sum_{i=1}^{m} \left(a_i - \overline{a}_{ap}\right)^2 \cdot p_i}{\sum_{i=1}^{m} p_i} = \frac{9 - 4 \cdot 2 - 1 \cdot 2 - 1 \cdot 3 - 9 \cdot 2 - 16}{11} = \frac{56}{11} \approx 5 .$$

Задачи для самостоятельного решения

Построить полигоны абсолютных, относительных и накопленных частот, а также гистограмму для выборки: 5,9; 6,8; 4,8; 7,9; 6,8; 5,6; 5,1; 3,4; 2,9; 6,8; 4,8; 2,8.

Найти арифметическую, геометрическую, гармоническую, квадратическую среднюю (взвешенные или простые) и сравнить их для данных:

a_i	137	138	141	143	145	150	152	156
p_i	2	3	1	1	2	1	2	1

Найти моду и медиану по ряду: 0,25; 0,33; 0,34; 3,5; 0,38; 0,42; 0,45.

Найти показатели вариации для выборки:

108, 106, 119, 117, 106, 119, 104, 106.

Произвести первичную обработку данных:

В течение года результаты метания копья спортсменки Васиной фиксировались на карточках. За год набралось 800 карточек. Выяснить основные статистические характеристики результатов метания копья Васиной, используя следующую выборку: 46, 53, 49, 60, 67, 49, 57, 53, 49, 60, 67.

Лабораторная работа № 7. Основы алгоритмизации

Основные теоретические сведения

1.1 Этапы решения задач на ЭВМ.

Решение задачи разбивается на этапы:

1. Постановка задачи
2. Формализация (математическая постановка)
3. Выбор (или разработка) метода решения
4. Разработка алгоритма
5. Составление программы
6. Отладка программы
7. Вычисление и обработка результатов

1. При постановке задачи выясняется конечная цель и вырабатывается общий подход к решению задачи. Выясняется сколько решений имеет задача и имеет ли их вообще. Изучаются общие свойства рассматриваемого физического явления или объекта, анализируются возможности данной системы программирования.
2. На этом этапе все объекты задачи описываются на языке математики, выбирается форма хранения данных, составляются все необходимые формулы.
3. Выбор существующего или разработка нового метода решения (очень важен и, в то же время личностный этап).
4. На этом этапе метод решения записывается применительно к данной задаче на одном из алгоритмических языков (чаще на графическом).
5. Переводим решение задачи на язык, понятный машине.

1.2. Алгоритм. Свойства алгоритмов.

Алгоритм - это определенным образом организованная последовательность действий, за конечное число шагов приводящая к решению задачи.
Свойства алгоритмов:

1. Определенность
2. Дискретность
3. Целенаправленность
4. Конечность
5. Массовость

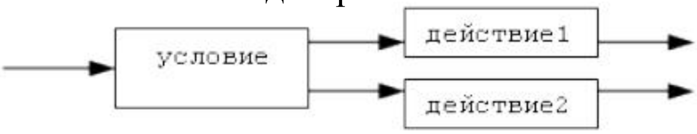
Порядок выполнения алгоритма:

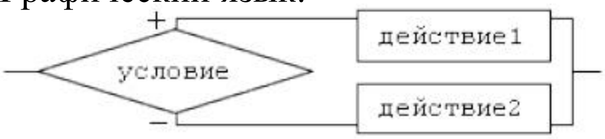
1. Действия в алгоритме выполняются в порядке их записи
2. Нельзя менять местами никакие два действия алгоритма
3. Нельзя не закончив одного действия переходить к следующему

Для записи алгоритмов используются специальные языки:

1. Естественный язык (словесная запись)
2. Формулы

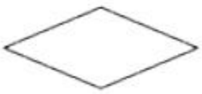
3. Псевдокод
4. Структурограммы
5. Синтаксические диаграммы
6. Графический (язык блок-схем)
1. Естественный язык:
2. **<u>если</u>** условие **<u>то</u>** действие1 **<u>иначе</u>** действие2
3. Структурограмма:
4. 

5. Синтаксическая диаграмма:
6. 

7. Графический язык:
8. 

Составление алгоритмов графическим способом подчиняется двум ГОСТам:

1. ГОСТ 19.002-80, соответствует международному стандарту ИСО 2636-73. Регламентирует правила составления блок-схем.
2. ГОСТ 19.003-80, соответствует международному стандарту ИСО 1028-73. Регламентирует использование графических примитивов.

Название	**Символ (рисунок)**	**Выполняемая функция (пояснение)**
1. Блок вычислений		Выполняет вычислительное действие или группу действий
2. Логический блок		Выбор направления выполнения алгоритма в зависимости от условия
3. Блоки ввода/вывода		Ввод или вывод данных вне зависимости от физического носителя
		Вывод данных на печатающее устройство
4. Начало/конец (вход/выход)		Начало или конец программы, вход или выход в подпрограмму
5. Предопределенный		Вычисления по стандартной или

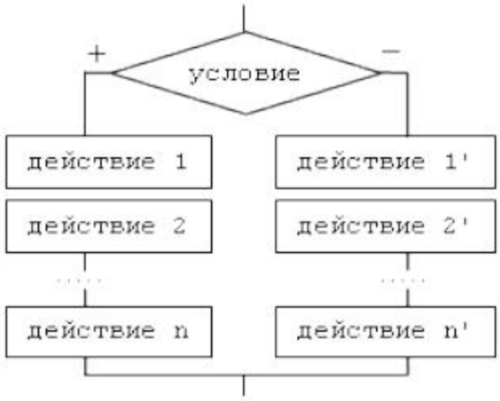
процесс		пользовательской подпрограмме
6. Блок модификации		Выполнение действий, изменяющих пункты алгоритма
7. Соединитель		Указание связи между прерванными линиями в пределах одной страницы
8. Межстраничный соединитель		Указание связи между частями схемы, расположенной на разных страницах

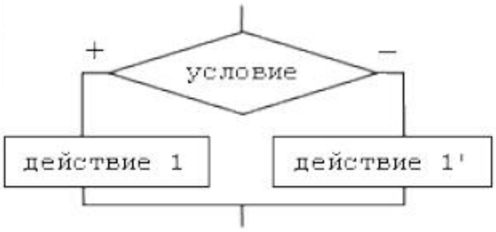
Правила построения блок-схем:

1. Блок-схема выстраивается в одном направлении либо сверху вниз, либо слева направо
2. Все повороты соединительных линий выполняются под углом 90 градусов

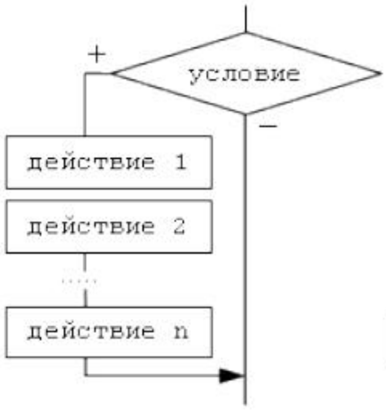
1.3. Алгоритмическая конструкция ветвления.

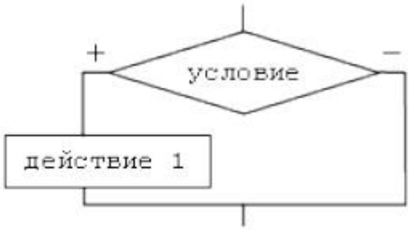
Ветвление - управляющая структура, организующая выполнение лишь одного из двух указанных действий в зависимости от справедливости некоторого условия.
Условие - вопрос, имеющий два варианта ответа: да или нет.
Запись ветвления выполняется в двух формах: полной и неполной.
Полная форма:





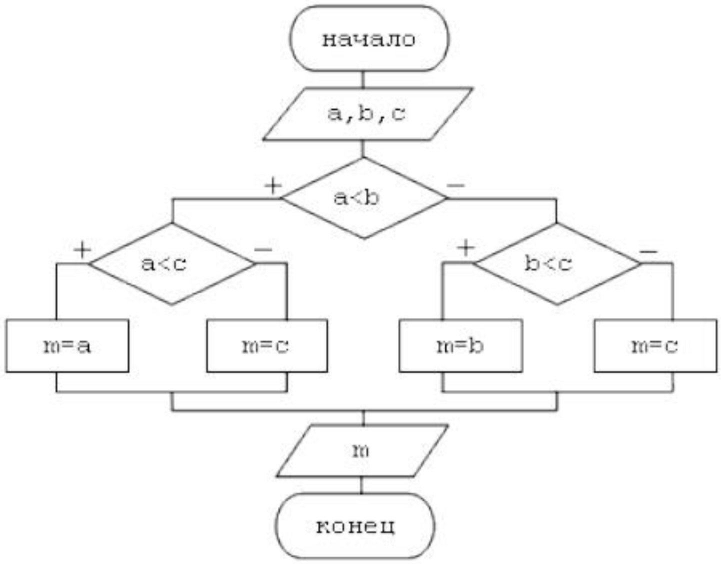
Неполная форма:



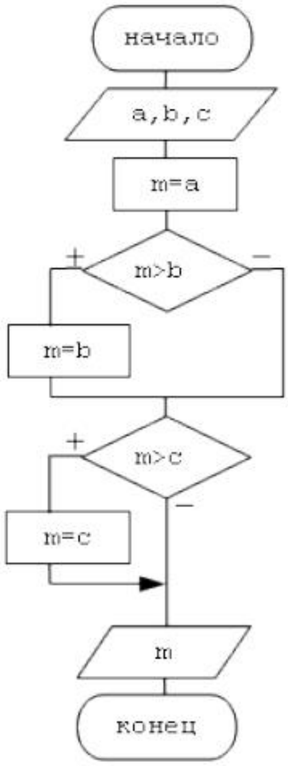


Пример: найти наименьшее из трех чисел.

1 вариант решения:

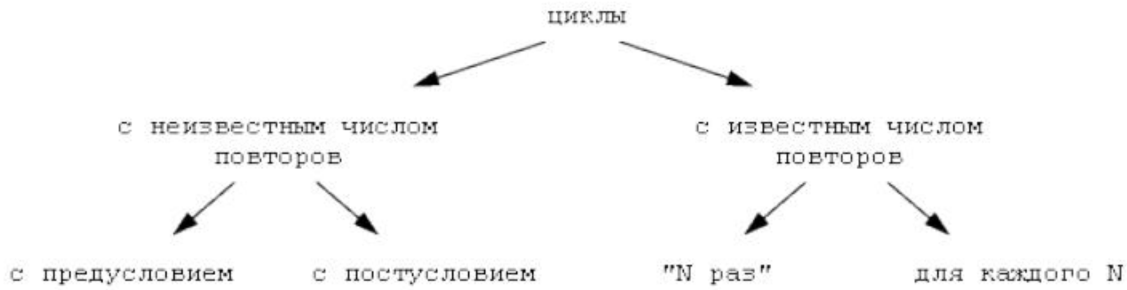


2 вариант решения:

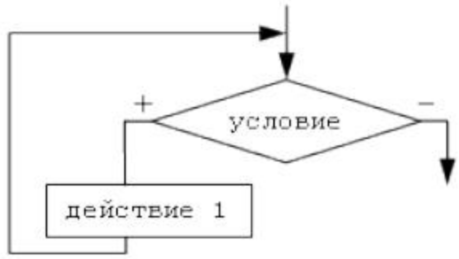


1.4. Алгоритмическая конструкция цикла.

Цикл - управляющая структура, организующая многократное выполнение указанного действия.



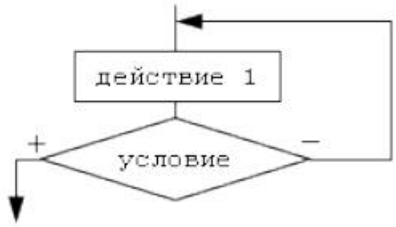
Цикл "пока":



Выполнение цикла "пока" начинается с проверки условия, поэтому такую разновидность циклов называют циклы с предусловием. Переход к выполнению действия осуществляется только в том случае, если условие выполняется, в противном случае происходит выход из цикла. Можно сказать что условие цикла "пока" - это условие входа в цикл. В частном случае может оказаться что действие не выполнялось ни разу. Условие цикла необходимо подобрать так, чтобы действия выполняемые в цикле привели к нарушению его истинности, иначе произойдет зацикливание.

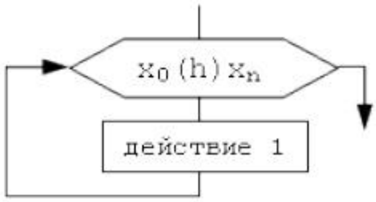
Зацикливание - бесконечное повторение выполняемых действий.

Цикл "до":



Исполнение цикла начинается с выполнения действия. Таким образом тело цикла будет реализовано хотя бы один раз. После этого происходит проверка условия. Поэтому цикл "до" называют циклом с постусловием. Если условие не выполняется, то происходит возврат к выполнению действий. Если условие истинно, то осуществляется выход из цикла. Таким образом условие цикла "до" - это условие выхода. Для предотвращения зацикливания необходимо предусмотреть действия, приводящие к истинности условия.

Цикл с параметром, или **цикл со счетчиком**, или **арифметический цикл** - это цикл с заранее известным числом повторов.

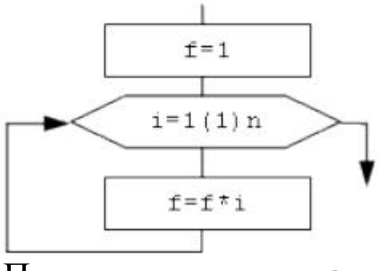


В блоке модификации указывается закон изменения переменной параметра.
Xo - начальное значение параметра
h - шаг
Xn - последнее значение параметра
Для создания циклов с параметром необходимо использовать правила:

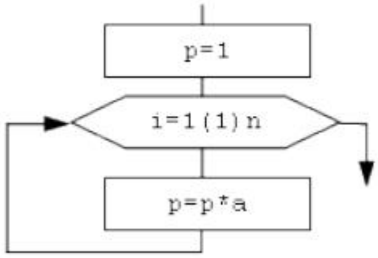
1. Параметр цикла, его начальное и конечное значения и шаг должны быть одного типа
2. Запрещено изменять в теле цикла значения начальное, текущее и конечное для параметра
3. Запрещено входить в цикл минуя блок модификации
4. Если начальное значение больше конечного, то шаг - число отрицательное
5. После выхода из цикла значение переменной параметра неопределенно и не может использоваться в дальнейших вычислениях
6. Из цикла можно выйти не закончив его, тогда переменная параметр сохраняет свое последнее значение

1.5. Использование циклов с параметром для обработки массивов.

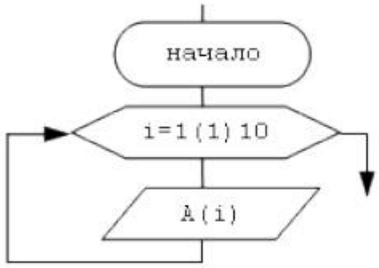
Массив - упорядоченная структура, предназначенная для хранения однотипных данных.
Упорядочение элементов в массиве происходит по их индексам.
Индекс - порядковый номер элемента.
Массив задается именем (заглавные латинские буквы), типом данных и размерностью.
Размерность - максимально возможное количество элементов в массиве. В один момент времени можно обратиться только к одному элементу массива. Для этого указывается имя массива и в скобках индекс элемента.
Массивы делятся на одномерные (линейные) и двумерные.
Прообразом в математике для одномерного массива является вектор. Для двумерного - матрица.
Пример: вычислить n!



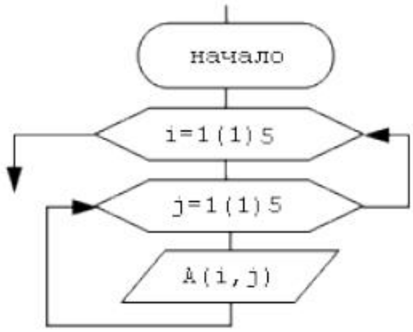
Пример: вычислить a^n



Пример: ввести элементы массива:
а)одномерного, размерности 10



б)двумерного, 5x5



Примеры заданий:

Тип 1. Определите значение переменной с после выполнения следующего фрагмента программы.

a := 5;
a := a + 6;
b := –a;
c := a – 2*b;

1) c = –11   2) c = 15   3) c = 27   4) c = 33

Решение:

1) для решения нужно использовать «ручную прокрутку» программы, то есть, выполнить вручную все действия

2) наиболее удобно и наглядно это получается при использовании таблицы, где в первом столбце записаны операторы программы, а в остальных показаны изменения переменных при выполнении этих операторов

3) здесь используются три переменные: a, b, c; до выполнения программы их значения анм неизвестны, поэтому ставим в таблице знаки вопроса:

	a	b	c
	?	?	?

4) после выполнения оператора a := 5; изменяется значение переменной a:

	a	b	c
	?	?	?
a := 5;	5		

5) оператор a := a + 6; означает «вычислить значение выражения a + 6 используя текущее значение a (равное 5), и записать результат обратно в переменную a»; таким образом, новое значение равно 5 + 6 = 11:

	a	b	c
	?	?	?
a := 5;	5		
a := a + 6;	11		

6) следующий оператор, a := a + 6, изменяет значение переменной b, записывая в нее –a; учитывая, что в a записано число 11, находим, что b будет равно –11:

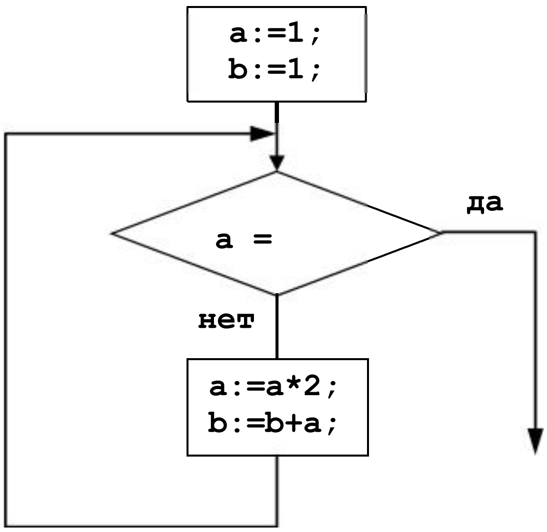
	a	b	c
	?	?	?
a := 5;	5		
a := a + 6;	11		
b := –a;		–11	

7) последняя команда, c := a – 2*b, изменяет значение переменной c; при текущих значениях a = 11 и b = –11 результат выражения равен 11 – 2*(–11) = 33, это число и будет записано в переменную c:

	a	b	c
	?	?	?
a := 5;	5		
a := a + 6;	11		
b := –a;		–11	
c := a – 2*b;			33

таким образом, правильный ответ – 4.

Тип 2. Запишите значение переменной b после выполнения фрагмента алгоритма:



Решение (вариант 1, ручная прокрутка):

1) по схеме видим, что алгоритм содержит цикл (есть петля, контур)

2) ручную прокрутку удобнее всего выполнять в виде таблицы, в первом столбце будем записывать выполняемые команды, во втором и третьем – изменение значений переменных

3) a и b

4) после выполнения первого блока получаем

	a	b
a:=1;	1	?
b:=1;		1

знак вопроса означает, что после выполнения первого оператора значение b не определено

5) затем выполняется проверка условия; поскольку a не равно 256, ответ на вопрос «a = 256?» будет «нет»:

	a	b
a:=1;	1	?
b:=1;		1
a = 256?	нет	

6) далее алгоритм уходит на выполнение тела цикла; здесь сначала меняется переменная a, а потом – b, причем нужно помнить, что для

вычисления b используется новое значение a, равное 2, поэтому новое значение b равно 1 + 2 = 3:

	a	b
a:=1;	1	?
b:=1;		1
a = 256?	нет	
a:=a*2;	2	
b:=b+a;		3

7) после этого по стрелке переходим на проверку условия; поскольку a = 2, ответ на вопрос «a = 256?» снова будет «нет», и выполняется очередной шаг цикла:

	a	b
a:=1;	1	?
b:=1;		1
a = 256?	нет	
a:=a*2;	2	
b:=b+a;		3
a = 256?	нет	
a:=a*2;	4	
b:=b+a;		7

8) аналогично можно выполнить вручную все шаги цикла, результаты последнего из них выглядят так:

	a	b
a:=a*2;	256	
b:=b+a;		511
a = 256?	да	

как только значение a стало равно 256, цикл завершает работу

9) таким образом, верный ответ – 511 .

Задачи для самостоятельного решения

Тип 1

1) Определите значение целочисленных переменных a и b после выполнения фрагмента программы:

```
a := 3 + 8*4;
b := (a div 10) + 14;
a := (b mod 10) + 2;
```

1) a = 0, b = 18 2) a = 11, b = 19 3) a = 10, b = 18 4) a = 9, b = 17

2) Определите значение целочисленных переменных a и b после выполнения фрагмента программы:

```
a := 1819;
b := (a div 100)*10+9;
a := (10*b–a) mod 100;
```

1) a = 81, b = 199 2) a = 81, b = 189 3) a = 71, b = 199 4) a = 71, b = 189

3) Определите значение целочисленных переменных a и b после выполнения фрагмента программы:

```
a := 42;
b := 14;
a := a div b;
b := a*b;
a := b div a;
```

1) a = 42, b = 14 2) a = 1, b = 42 3) a = 0, b = 588 4) a = 14, b = 42

4) Определите значение целочисленных переменных x, y и t после выполнения фрагмента программы:

```
x := 5;
y := 7;
t := x;
x := y mod x;
y := t;
```

1) x=2, y=5, t=5 2) x=7, y=5, t=5 3) x=2, y=2, t=2 4) x=5, y=5, t=5

5) Определите значение целочисленных переменных a и b после выполнения фрагмента программы:

```
a :=6*12 + 3;
b :=(a div 10)+ 5;
a :=(b mod 10)+ 1;
```

1) a = 1, b = 10 2) a = 3, b = 12 3) a = 4, b = 16 4) a = 10, b = 20

6) Определите значение целочисленных переменных x и y после выполнения фрагмента программы:

```
x := 336
У := 8;
x := x div y;
y := x mod y;
```

1) x = 42, y = 2 2) x = 36, y = 12 3) x = 2, y = 24 4) x = 24, y = 4

7) Определите значение целочисленных переменных a и b после выполнения фрагмента программы:

```
a :=1686;
b :=(a div 10) mod 5;
a := a - 200*b;
```

1) a = 126, b = 5 2) a = 526, b = 5 3) a = 1086, b = 3 4) a = 1286, b = 3

8) Определите значение целочисленных переменных x и y после выполнения фрагмента программы:

```
x := 11;
y := 5;
t := y;
y := x mod y;
x := t;
y := y + 2*t;
```

1) x = 11, y = 5 2) x = 5, y = 11 3) x = 10, y = 5 4) x = 5, y = 10

9) Определите значение целочисленных переменных x и y после выполнения фрагмента программы:

```
x := 19;
y := 3;
z := y*2;
y := x mod y;
x := x - z;
y := y + z;
```

1) x = 10, y = 9 2) x = 13, y = 7 3) x = 16, y = 8 4) x = 18, y = 2

10) Определите значение целочисленных переменных x, y и z после выполнения фрагмента программы:

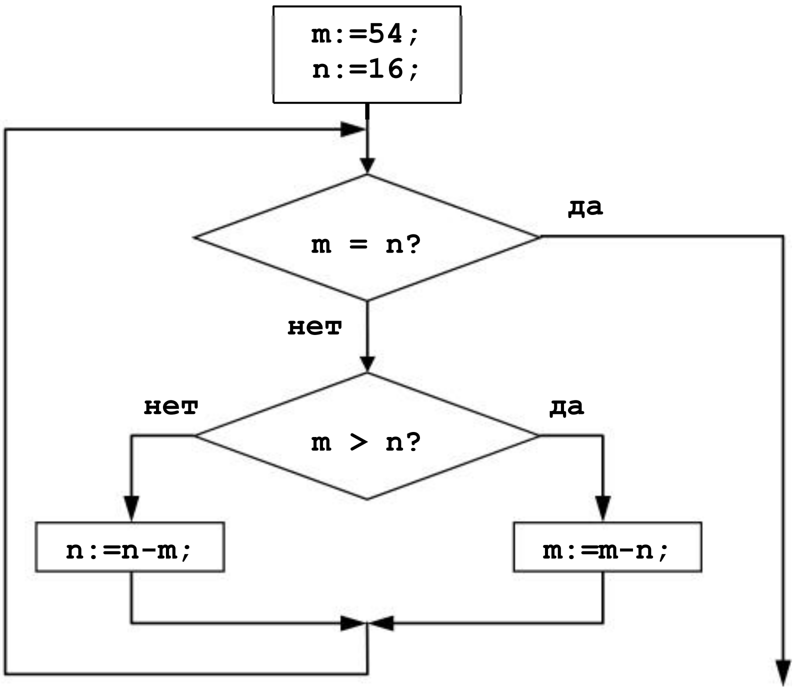
```
x := 13;
y := 3;
z := x;
x := z div y;
y := x;
```

1) x = 13, y = 4, z = 4 2) x = 13, y = 13, z = 13

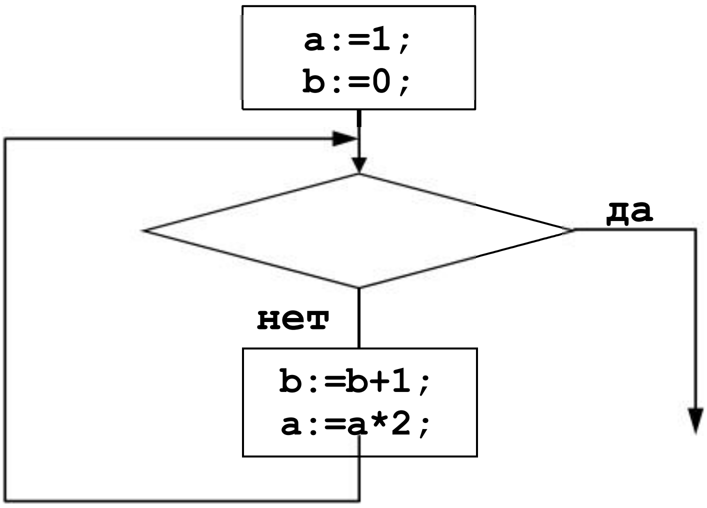
3) x = 4, y = 4, z = 13 4) x = 4, y = 3, z = 13

Тип 2

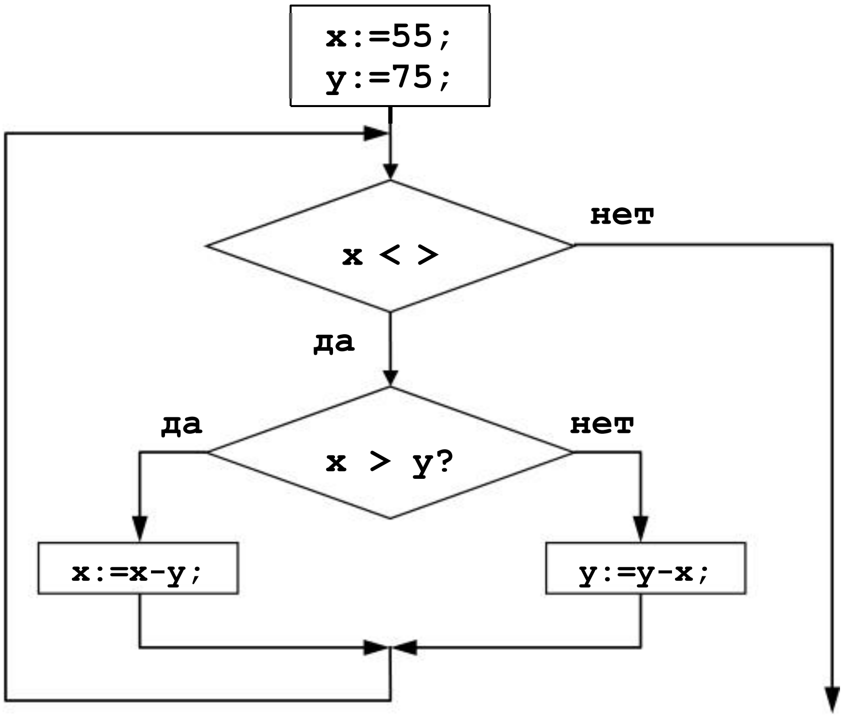
11) Определите значение переменной m после выполнения фрагмента алгоритма.



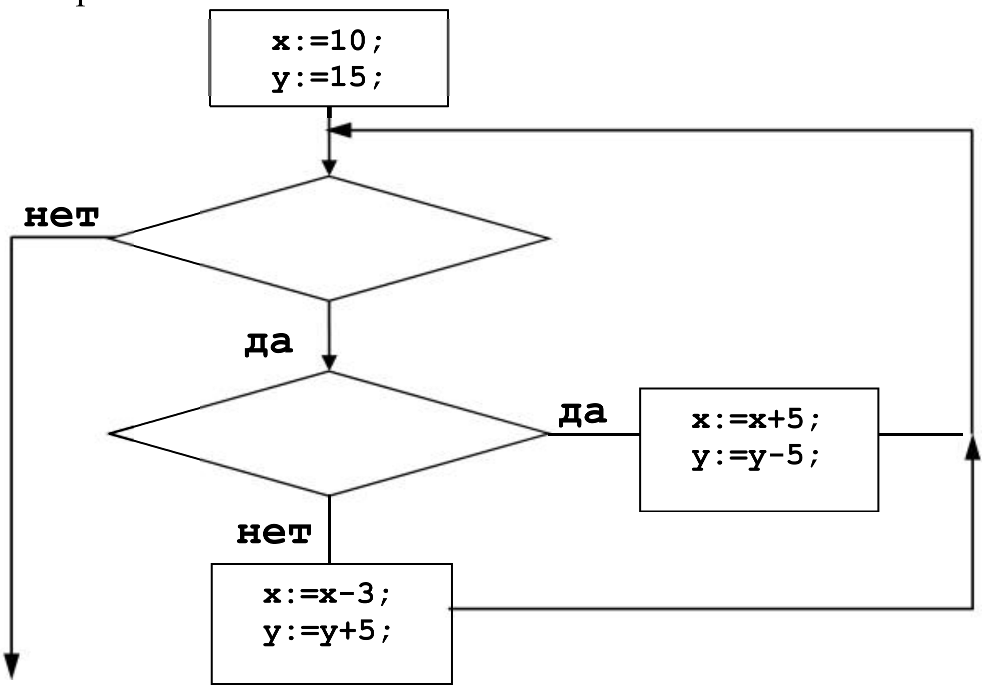
12) Определите значение переменной а после выполнения фрагмента алгоритма.



13) Определите значение переменной x после выполнения фрагмента алгоритма.



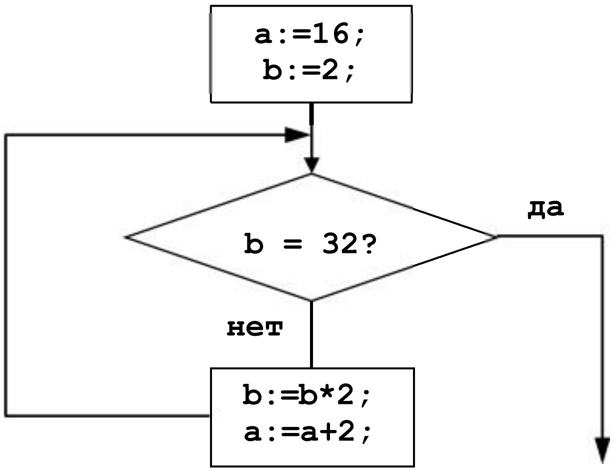
14) Определите значения переменных x и y после выполнения фрагмента алгоритма.



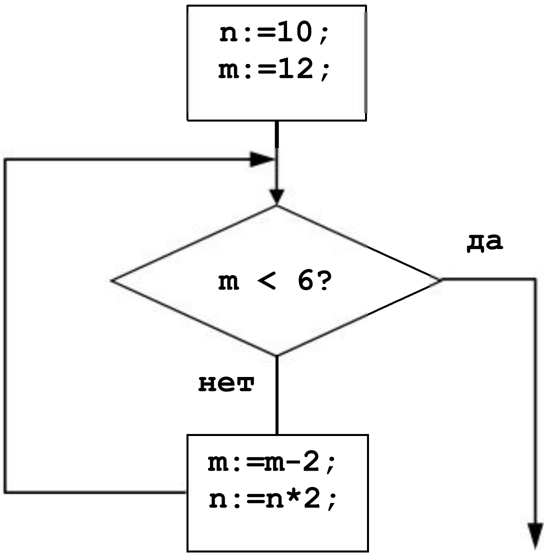
В ответ запишите номер правильного варианта:

1) x=15, y=16 2) x=20, y=13 3) x=16, y=15 4) x=13, y=20

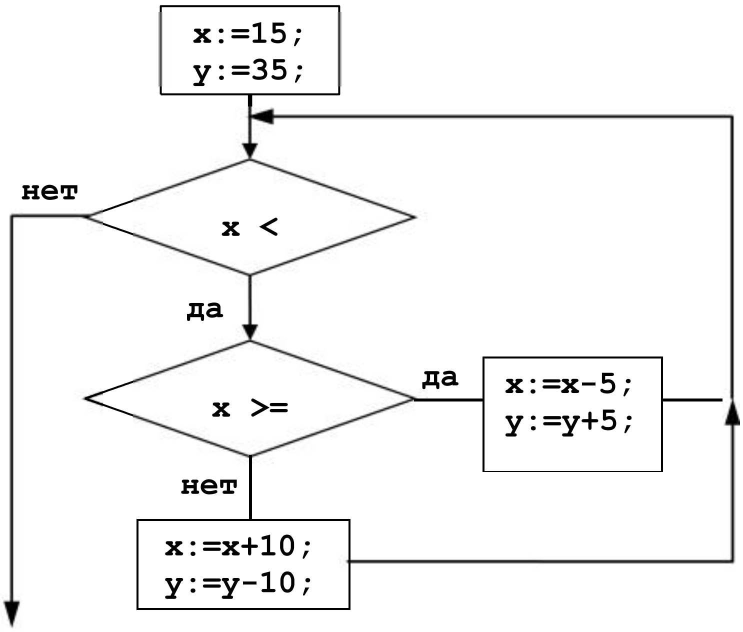
15) Определите значение переменной a после выполнения фрагмента алгоритма.



16) Определите значение переменной n после выполнения фрагмента алгоритма.



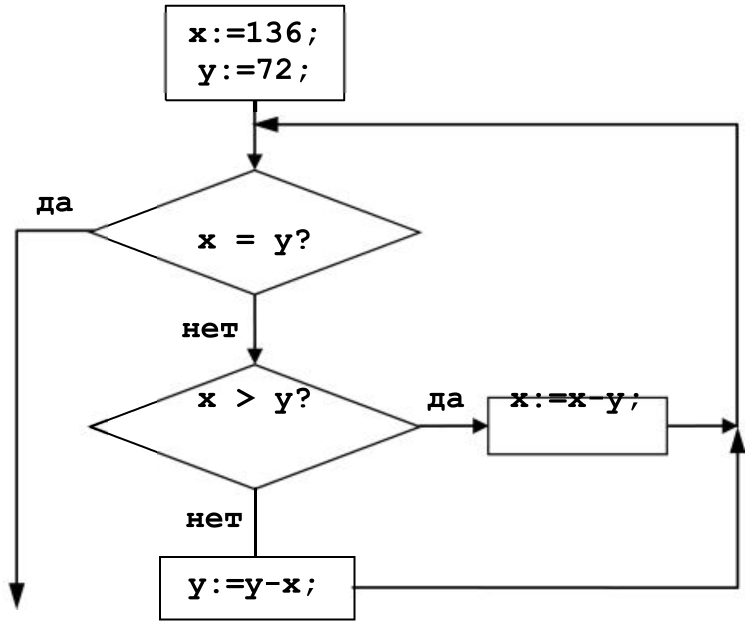
17) Определите значения переменных x и y после выполнения фрагмента алгоритма.



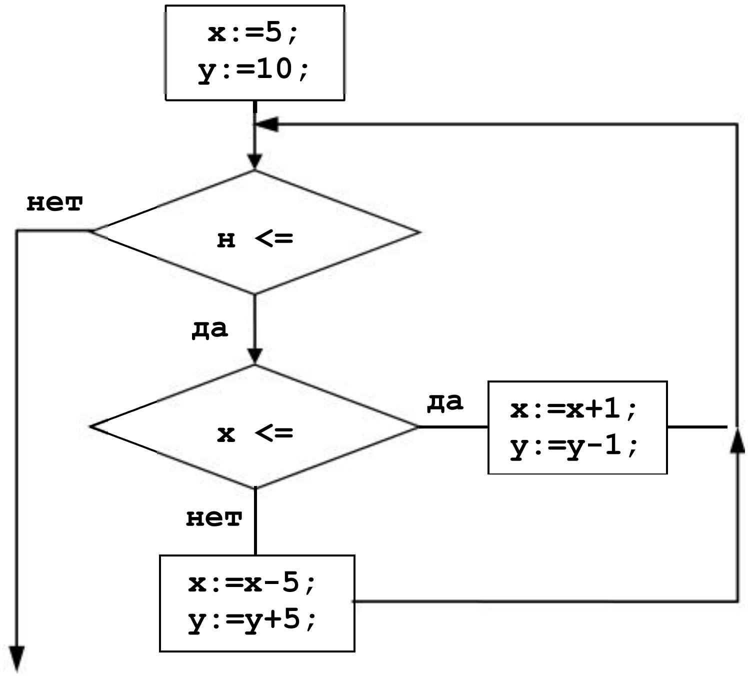
В ответ запишите номер правильного варианта:

1) x=25, y=25 2) x=20, y=30 3) x=30, y=20 4) x=30, y=30

18) Определите значение переменной x после выполнения фрагмента алгоритма.



19) Определите значения переменных x и y после выполнения фрагмента алгоритма.



В ответ запишите номер правильного варианта:

1) x=5, y=15 2) x=3, y=12 3) x=10, y=5 4) x=9, y=15

10) Определите значение переменной c после выполнения следующего фрагмента программы.

a := 5;
a := a + 6;
b := –a;
c := a – 2*b;

1) c = –11 2) c = 15 3) c = 27 4) c = 33

Лабораторная работа №9

Тема: Текстовый редактор Microsoft Word. Правила оформления рефератов, статей, курсовых, дипломов.

Открыть учебный файл с готовым текстом.

1. Оформление титульного листа. Рис. 1.
2. Форматирование текста:

Установить формат страницы - А4 и книжную ориентацию страницы.

Установить параметры полей документа:

- ✓ отступ сверху – 2 см;
- ✓ отступ снизу – 2 см;
- ✓ отступ слева – 3 см;
- ✓ отступ справа –2 см;

Установить параметры шрифта:

- ✓ шрифт кегля номера страницы –Times New Roman;
- ✓ размер кегля номера страницы –14 пт;
- ✓ начертание – обычный;
- ✓ интервал – обычный;
- ✓ цвет шрифта – авто;
- ✓ цвет темы – нет.

Установить параметры колонтитулов:

- ✓ по центру внизу – номер страницы, на первой не устанавливается. Размер кегля номера страницы - 14 пт. Шрифт кегля номера страницы - Times New Roman.

Установить параметры абзаца:

- ✓ выравнивание – по ширине;
- ✓ межстрочный интервал – одинарный;
- ✓ отступ первой строки абзаца – 1,3 см;
- ✓ отступ слева – 0 см;
- ✓ отступ справа – 0 см;
- ✓ интервал перед абзацем – 0 пт;
- ✓ интервал после абзаца – 2 пт.

3. Создать сноску к термину: ***Компью́терный вирус***. Расшифровка – вид вредоносного программного обеспечения, способного создавать копии самого себя и внедряться в код других программ, системные области памяти, загрузочные секторы, а также распространять свои копии по разнообразным каналам связи.
4. Оформить рисунки и таблицы. Сделать ссылки в тексте.

Оформление табличного материала.

Таблицы следует нумеровать арабскими цифрами сквозной порядковой нумерацией в пределах главы, включая в номер таблицы номер главы (Таблица 1.1., Таблица 1.2., ...) Номер следует размещать в правом верхнем углу над заголовком таблицы после слова «Таблица». Каждая таблица должна иметь заголовок, который помещается после слова «Таблица», точка в конце заголовка не ставится. Размер шрифта для текста в таблице может быть меньше, чем у основного текста. Выше и ниже каждой таблицы можно оставить по одной свободной строке.

Оформление иллюстраций.

Иллюстрации (рисунки, графики, диаграммы, эскизы, чертежи и т.д.) располагаются в работе непосредственно после текста, в котором они упоминаются впервые, или на следующей странице. Все иллюстрации должны быть пронумерованы. Если иллюстрация в работе единственная, то ее можно не нумеровать. В тексте на иллюстрации делаются ссылки, содержащие порядковые номера, под которыми иллюстрации помещены в работе.

До рисунка и после него целесообразно оставлять интервал. Номер следует размещать под иллюстрацией посередине после слова «Рисунок» или «Рис.». После номера может располагаться название иллюстрации. Размер шрифта для подписи рисунка может быть меньше, чем у основного текста. Рисунки следует нумеровать арабскими цифрами сквозной порядковой нумерацией в пределах главы, включая в номер рисунка номер главы (Рис. 1.1., Рис. 1.2., ...).

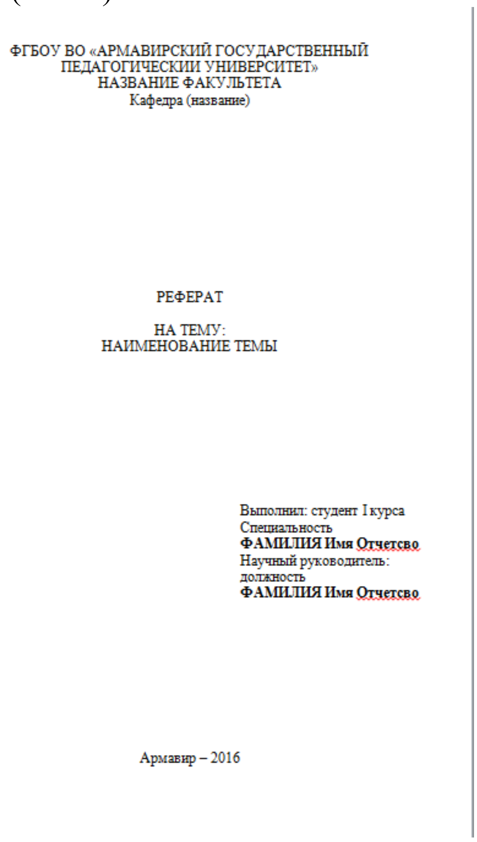
Список используемых источников должен быть организован в соответствии с едиными требованиями библиографического описания произведений печати.

Приложения помещают после списка используемых источников и нумеруют их в порядке их упоминания в тексте. Приложение – это часть работы, которая имеет дополнительное, обычно справочное значение, но является необходимым для более полного освещения темы. Каждое приложение следует начинать с нового листа, в правом верхнем углу которого пишется слово «Приложение» с указанием порядкового номера и тематический заголовок с новой строки посередине страницы.

5. Создание автоматического оглавления.

Оглавление

6. Добавить таблицу (Рис. 2) и рисунок (Рис. 3) в текст по теме.



ФГБОУ ВО «АРМАВИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
НАЗВАНИЕ ФАКУЛЬТЕТА
Кафедра (название)

РЕФЕРАТ

НА ТЕМУ:
НАИМЕНОВАНИЕ ТЕМЫ

Выполнил: студент 1 курса
Специальность
ФАМИЛИЯ Имя Отчетсво
Научный руководитель:
должность
ФАМИЛИЯ Имя Отчетсво

Армавир – 2016

Рис. 1 Титульный лист

Таблица 2.2

Классификация информационных угроз

№	Принцип классификации	Виды вероятных угроз
1	По цели воздействия на АСОИ	-нарушение конфиденциальности информации; -нарушение целостности информации; -нарушение (частичное или полное) работоспособности АСОИ.
2	По принципу воздействия на АСОИ	- с использованием доступа субъекта системы к объекту угрозы; -с использованием скрытых каналов.
3	По характеру воздействия на АСОИ	-активное воздействие; -пассивное воздействие (бездействие).
4	По причине появления используемой ошибки защиты	-неадекватность политики безопасности реалиям АСОИ; -ошибки административного управления; -ошибки в алгоритмах и программах; -ошибки в реализации алгоритмов и программ.
5	По способу воздействия на объект угрозы (при активном воздействии)	-непосредственное воздействие на объект угрозы; -воздействие на систему разрешений; -опосредованное воздействие (через других пользователей); -«маскарад» (присвоение прав другого пользователя); -использование «вслепую».
6	По способу воздействия на АСОИ	- в интерактивном режиме; - в пакетном режиме.
7	По объекту угрозы	-АСОИ в целом; -объекты АСОИ; -субъекты АСОИ; -каналы передачи данных, пакеты данных.
8	По используемым средствам реализации угрозы	-вирусы; -программные ловушки.
9	По состоянию объекта угрозы	-хранения данных; -передачи данных; -обработки данных.

Рис. 2 Таблица

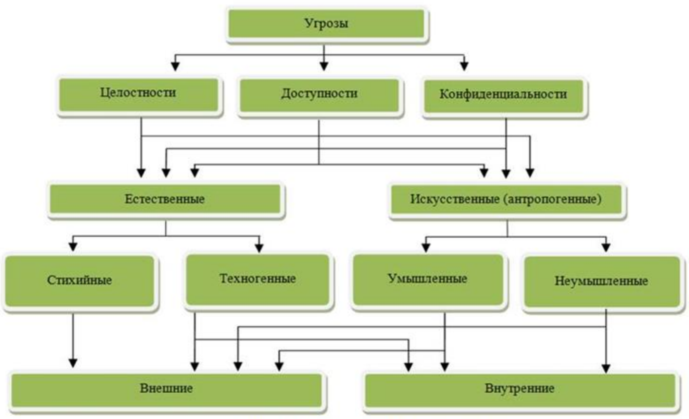


Рис. 1.1. Классификация угроз

Рис. 3 Рисунок

Тема: Текстовый редактор Microsoft Word. Создание и форматирование таблиц.

Создать таблицу 1.

Таблица 1. Группа

Фамилия	Имя	Отчество	Возраст
Петров	Иван	Андреевич	18
Иванов	Павел	Сергеевич	19
Арапов	Яков	Александрович	17
Рогов	Алексей	Павлович	18
Худяков	Роман	Иванович	18
Носков	Дмитрий	Сергеевич	17

1. В таблице 1 добавить строки:

после первой;
перед пятой;
в конце таблицы.

2. Данные в добавленные строки внесите синим цветом

3. В таблице 1 удалить:

две ячейки первой колонки со сдвигом вверх;
две соседние ячейки второй и третьей колонки со сдвигом вверх;
две последние строки.

Таблица 2. Адрес

Улица	Номер дома	Номер квартиры
Ленина	23	12
Комсомольская	105	32
Кирова	47	25
Песчаная	95	67
Гоголя	66	39

1. Добавить в таблицу 2 столбца:

- ***Город*** – перед колонкой Улица;
- ***Номер телефона*** – после колонки Номер квартиры.

2. Внесите данные в добавленные столбцы.
3. В таблице 2 установите сортировку:

по ***Номеру квартиры*** по возрастанию;
по ***Улице*** по убыванию;
по ***Номеру дома*** по возрастанию, затем по ***Номеру квартиры*** по убыванию

4. Разбейте таблицу 2 на две таблицы так, чтобы новая таблица (без заголовков столбцов) состояла из трех строк.
7.
1. Создать таблицу по образцу, задав количество строк (8) и столбцов (6).

Таблица3. Температура воздуха в городах Краснодарского края в период с 1 по 7 октября 2016 года

Город	Дни				
	1	2	3	4	5
Армавир	5	6	6	2	-3
Кропоткин	-3	-1	0	-3	-3
Краснодар	-1	0	2	0	-2
Усть-Лабинск	5	-1	-1	2	-3
Лабинск	7	6	6	5	3
Новороссийск	3	4	4	1	2

1. Отформатировать данные таблицы, в том числе выполнить операции “Объединить ячейки” и “Центрировать по вертикали” (“Город”) шрифт – контур. Все остальные города – шрифт контур, с тенью.
2. Рамку (внешнюю границу) таблицы выполнить при толщине линии 1,5 пт; остальные линии – 0,5 пт. Тип линии – смотрите по рисунку.
3. Добавить два столбца за следующие дни (6 и 7 октября) и заполнить их своими числами

1. Составить таблицу расписания лекций.

Таблица4. Расписание лекций

Дни / Лекции	Понедельник	Вторник	Среда
2 пара	*математика*	*информатика*	*история*
3 пара	*русский язык*	*культурология*	*физкультура*

2. Добавить столбец в конец таблицы. Этот столбец разбить на 2 столбца, в верхнюю строку дописать четверг и пятница. Добавить строку для первой пары. Добавить строку в конце таблицы с помощью клавиши Tab. Выровнять ширину столбцов.
3. В свойствах Таблицы определить высоту строки 1,5 см. Заполнить в пустые ячейки предметы по своему усмотрению. Все предметы расположите по центру ячейки. Оформить первую ячейку с помощью карандаша.

1. Создайте и оформите следующую таблицу.

Таблица5. Прогноз погоды

ПОГОДА	***Днем***	***Ночью***
Пятница	***-1...-3 ✹***	***-1...-3***
Суббота	***0...-2 ☼***	***-3...-5***
Воскресенье	***-1...+1 ☂***	***-1...-3***

2. Символ ✹ в наборе Wingdings, ☂ -Webdings, ☼-Times New Roman.
3. Вокруг Субботы – невидимые границы. Заливка Погоды – черным. Весь шрифт в таблице – полужирный.

Лабораторная работа №3

Тема: Текстовый редактор Microsoft Word. Формулы.

Набрать формулы, используя редактор формул.

1. $L = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$	2. $e = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}$
3. $M_0 = \chi_{Mo} + i_{Mo} \frac{f_{Mo} - f_{Mo-1}}{(f_{Mo} - f_{Mo-1}) + (f_{Mo} - f_{Mo+1})}$	4. $\chi - \Delta_з \le \chi_{ср} \le \chi + \Delta_з$
5. $n_\omega = \frac{Nt^2\omega(1-\omega)}{N\Delta^2_\omega + t^2\omega(1-\omega)}$	6. $P_m = \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}$
7. $\mu = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}\left(1 - \frac{n}{N}\right) + \frac{\delta^2}{r}\left(\frac{R-r}{R-1}\right)}$	8. $\sigma_{A_s} = \sqrt{\frac{6(n-1)}{(n+1)(n+3)}}$
9. $f(\chi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-(\chi-\bar{\chi})^2}{2\sigma^2}}$	10. $\Delta_з = t\sqrt{\frac{\sigma_з^2}{n}}$
11. $\mu_\omega = \pm\sqrt{\frac{\delta^2}{r}\left(1 - \frac{r}{R}\right)}$	12. $\Delta_з = \pm t\sqrt{\frac{\delta_з^2}{r}\left(1 - \frac{r}{R}\right)}$
13. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)\dots(k+m)} = \frac{1}{mm!}$	14. $d = \frac{\sum_{i=1,\dots,n} \lvert x_i - \bar{x} \rvert}{n}$

Задание2. Набрать текст.

Расстояние от точки (x_1, y_1) до прямой $Ax + By + C = 0$ равно $\delta = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

- каноническое уравнение гиперболы:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1;$$

- первый замечательный предел

$$\lim_{x \to a} \frac{\sin x}{x} = 1;$$

- правило Лопиталя:

Правило Лопитиля для раскрытия неопределенностей вида $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$: $\lim_{x \to a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \lim_{x \to a} \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$, если предел справа существует;

- формула интегрирования по частям в определенном интеграле:

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx;$$

- векторное произведение двух векторов:

Если $\bar{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$ и $\bar{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$, то

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix},$$

где $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ - единичные векторы, направленные по соответствующим осям координат.

Лабораторная работа №10

Тема: Электронные таблицы Microsoft EXCEL. Ввод формул и работа со встроенными функциями.

Задание 1. Вычислить арифметические выражения, используя относительную адресацию, арифметические операции и скобки для указания приоритетов действий.

8. Рабочий лист назвать **«Вычисления».**
9. В ячейку А1 ввести x =, формат ячейки текстовый, в ячейку А2 - *y* =.
10. В ячейку *B1* поместить число 2, а в ячейку *B2* - число 4.
11. Выполнить вычисления в ячейках В3, В4 и В5 по предлагаемым формулам*:*

ячейка	В3	В4	В5
формула	$\frac{2*x}{4+y}$	$\frac{x-1}{\frac{y}{x*4}} + (x-2)$	$2 + \frac{x^2 + y^2}{(x+y)-1}$
Результат (сверяем со своим)	0,5	2	6

Задание 2. Определение дня недели по дате. Функция =Текст(А2;"ДДД").

1. Рабочий лист назвать «**Дата**».
2. В ячейку А1, используя функцию ввести дату.
3. Используя функцию Текст и различные параметры определить для сегодняшнего дня день недели в разных форматах.

М	Отображение месяца в виде числа без начального нуля.
ММ	Отображение месяца в виде числа с начальным нулем, если он необходим.
МММ	Отображение сокращенного названия месяца (Янв – Дек).
ММММ	Отображение полного названия месяца (Январь – Декабрь).
МММММ	Отображение месяца в виде одной буквы (Я–Д).
Д	Отображение дня в виде числа без начального нуля.
ДД	Отображение дня в виде числа с начальным нулем, если он необходим.
ДДД	Отображение сокращенного названия дня недели (пн – вс).
ДДДД	Отображение полного названия дня недели (понедельник – воскресенье).
ГГ	Отображение года в виде двузначного числа.
ГГГГ	Отображение года в виде четырехзначного числа.

Результат

01.01.2016	1	=ТЕКСТ(А1;"М")
02.01.2016	01	=ТЕКСТ(А2;"ММ")
03.01.2016	янв	=ТЕКСТ(А3;"МММ")
04.01.2016	Январь	=ТЕКСТ(А4;"ММММ")
05.01.2016	Я	=ТЕКСТ(А5;"МММММ")
06.01.2016	6	=ТЕКСТ(А6;"Д")
07.01.2016	Чт	=ТЕКСТ(А7;"ДДД")
08.01.2016	пятница	=ТЕКСТ(А8;"ДДДД")
09.01.2016	16	=ТЕКСТ(А9;"ГГ")
10.01.2016	2016	=ТЕКСТ(А10;"ГГГГ")

Задание 3. Заданы стороны треугольника a, b и c. Вычислить его площадь по формуле Герона $S = p(p - a)(p - b)(p - c)$, где p –полупериметр, $p = (a+b+c)/2$, а также радиус вписанной окружности $r = \frac{S}{p}$ и радиус описанной окружности $R=\frac{abc}{4S}$

1. Рабочий лист назвать «**Треугольник**».
2. Формула для нахождения S **=корень(*p**(*p*-*a*)*(*p*-*b*)*(*p*-*c*))** вместо сторон и полупериметра вставить адреса ячеек.
3. Использовать функцию ОКРУГЛ(число; число_разрядов) для нахождения S, r, R.

Результат

a	2
b	4
c	5
p	5,5
S	3,80
r	0,69
R	2,63

a	3
b	5
c	6
p	7
S	7,48
r	1,07
R	3,01

Задание 4. Заполнить арифметическую и геометрическую прогрессии.

1. Рабочий лист назвать «**Прогрессия**».
2. Заполнить арифметическую прогрессию: начальное значение 2; конечное 8;шаг 0,35; по столбцам **.**
3. Заполнить геометрическую прогрессию: начальное значение 3; конечное 68;шаг 1,2; по столбцам.
4. Формат ячеек: числовой, 1 знак после запятой.
5. Ввести функцию СЕГОДНЯ. Заполнить прогрессию по столбцам; шаг 1; рабочий день; предельное значение 24.10.2016.

Результат

арифметическая прогрессия	геометрическая прогрессия	дата
2,0	3,0	29.09.2016
2,4	3,6	30.09.2016
2,7	4,3	03.10.2016
3,1	5,2	04.10.2016
3,4	6,2	05.10.2016
3,8	7,5	06.10.2016
4,1	9,0	07.10.2016
4,5	10,7	10.10.2016
4,8	12,9	11.10.2016
5,2	15,5	12.10.2016
5,5	18,6	13.10.2016
5,9	22,3	14.10.2016
6,2	26,7	17.10.2016
6,6	32,1	18.10.2016
6,9	38,5	19.10.2016
7,3	46,2	20.10.2016
7,6	55,5	21.10.2016
8,0	66,6	24.10.2016

Задание 5. Подготовить план и выполнение плана.

1. Рабочий лист назвать «**План**».
2. Подготовить таблицу и соответствующие вычисления.
3. Изменить курс доллара согласно курсу на сегодняшний день.
4. Оформить таблицу.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	месяцы	Финансовый план		Выполнение					Курс доллара		
2		на 2014 г.		Предприятие 1		Предприятие 2			63,84		
3		тыс., $	тыс., руб	тыс., $	тыс., руб	тыс., $	тыс., руб	макс, $	макс., руб.	мин, $	мин, руб.
4	Январь	$13,00	829,92р.	$6,00	383,04р.	$5,00	319,20р.	$6,00	383,04р.	$5,00	319,20р.
5	Февраль	$15,00	957,60р.	$12,00	766,08р.	$10,00	638,40р.	$12,00	766,08р.	$10,00	638,40р.
6	Март	$18,00	1 149,12р.	$4,00	255,36р.	$15,00	957,60р.	$15,00	957,60р.	$4,00	255,36р.
7	Апрель	$25,00	1 596,00р.	$10,00	638,40р.	$20,00	1 276,80р.	$20,00	1 276,80р.	$10,00	638,40р.
8	Май	$14,00	893,76р.	$11,00	702,24р.	$21,00	1 340,64р.	$21,00	1 340,64р.	$11,00	702,24р.
9	Июнь	$45,00	2 872,80р.	$14,00	893,76р.	$26,00	1 659,84р.	$26,00	1 659,84р.	$14,00	893,76р.
10	Июль	$58,00	3 702,72р.	$50,00	3 192,00р.	$51,00	3 255,84р.	$51,00	3 255,84р.	$50,00	3 192,00р.
11	Август	$98,00	6 256,32р.	$80,00	5 107,20р.	$87,00	5 554,08р.	$87,00	5 554,08р.	$80,00	5 107,20р.
12	Сентябрь	$65,00	4 149,60р.	$68,00	4 341,12р.	$60,00	3 830,40р.	$68,00	4 341,12р.	$60,00	3 830,40р.
13	Октябрь	$54,00	3 447,36р.	$54,00	3 447,36р.	$55,00	3 511,20р.	$55,00	3 511,20р.	$54,00	3 447,36р.
14	Ноябрь	$48,00	3 064,32р.	$47,00	3 000,48р.	$50,00	3 192,00р.	$50,00	3 192,00р.	$47,00	3 000,48р.
15	Декабрь	$26,00	1 659,84р.	$23,00	1 468,32р.	$20,00	1 276,80р.	$23,00	1 468,32р.	$20,00	1 276,80р.
16	итого	$479,00	$30 579,36	$379,00	$24 195,36	$420,00	$26 812,80				
17	ср.знач	$39,92	$2 548,28	$31,58	$2 016,28	$35,00	$2 234,40				
18	макс	$98,00	$6 256,32	$80,00	$5 107,20	$87,00	$5 554,08				
19	мин	$13,00	$829,92	$4,00	$255,36	$5,00	$319,20				

Тема: Электронная таблица Microsoft Excel. Построение и оформление графиков.

Задание1. Построить график функции y=sin (x). Значение аргумента выбрать в пределах от -6 до 6 с шагом 0,5.

1. Создать таблицу. Заполнить аргумент от 6 до 6 с шагом 0,5. Заполнить соответствующее значении функции.
2. Построить график. Вид диаграммы - **Точечная с гладкими кривыми**.

X	6,00	5,50	5,00	4,50	…						
Y	0,28	0,71	0,96	0,98	…						

Задание2.

Построить график функции $z=\frac{\cos(x^2+y^2+1)}{\sqrt{x^2+y^2+1}}$ -2<x<2, -2<y<2

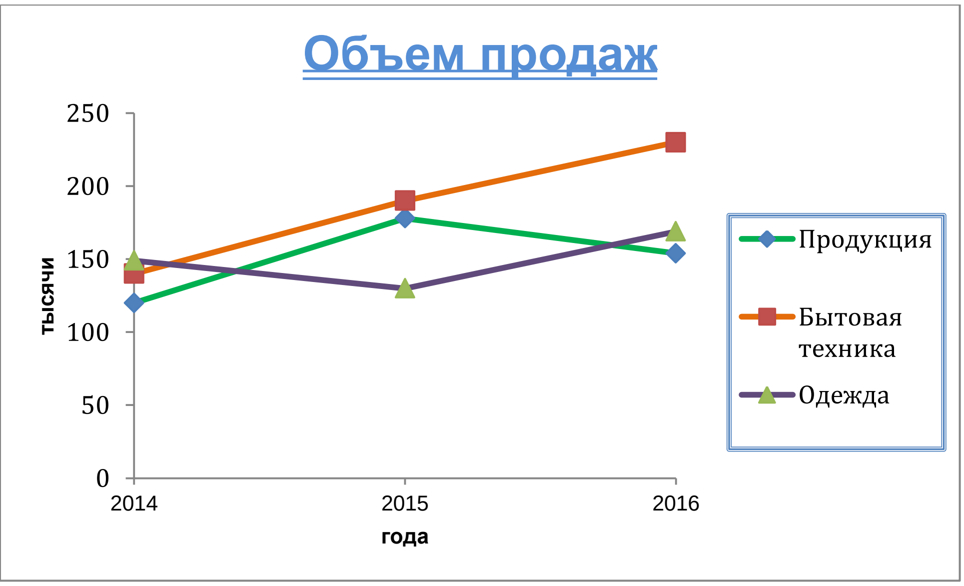
Задание3. Оформление диаграмм.

	июнь	июль	август
Жигули	38	15	54
Мерседесы	70	98	86
BMW	65	60	70

Первый столбец – синий цвет.
Второй столбец – желтый цвет.
Третий столбец – темно-зеленый цвет.
Фон области построения серый.
Заголовки и подписи осей сделать по образцу.

Задание4. Оформление диаграмм.

	2014 г.	2015 г.	2016 г.
Продукция	120	178	154
Бытовая техника	140	190	230
Одежда	149	130	169

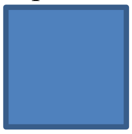


1. Заголовок и подписи по образцу.
2. Название диаграммы – шрифт ARIAL, 12 пунктов, голубой цвет, двойное подчеркивание.
3. Надписи осей - шрифт ARIAL, 8 пунктов, синий цвет.
4. Линия «Продукция» – зеленый цвет.
5. Линия «Бытовая техника» – сиреневый цвет.
6. Линия «Одежда» – оранжевый цвет.

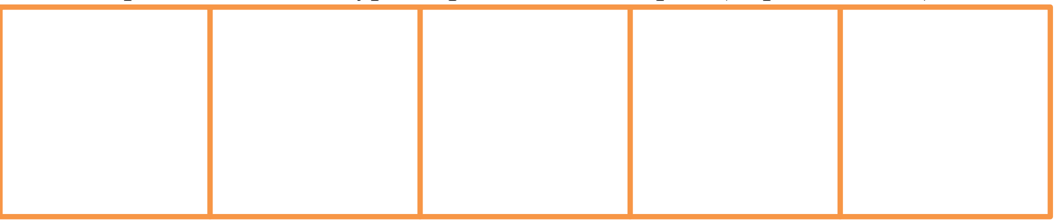
Лабораторная работа №11

Тема: Презентации Microsoft Power Point. Создание кроссворда в презентации

Создание шаблона для слова. Просмотреть видео.

1. В меню Вставка/Фигуры/Прямоугольники выбрать инструмент.
2. Удерживая клавишу SHIFT, создать квадрат .
3. Скопировать квадрат по количеству букв в слове. Удерживая клавишу CTRL, перетащить исходный квадрат.

4. Выровнять таким образом, чтобы квадраты находились рядом. Выделить второй квадрат и с помощью стрелок на клавиатуре, переместить квадрат. (Стрелка влево).



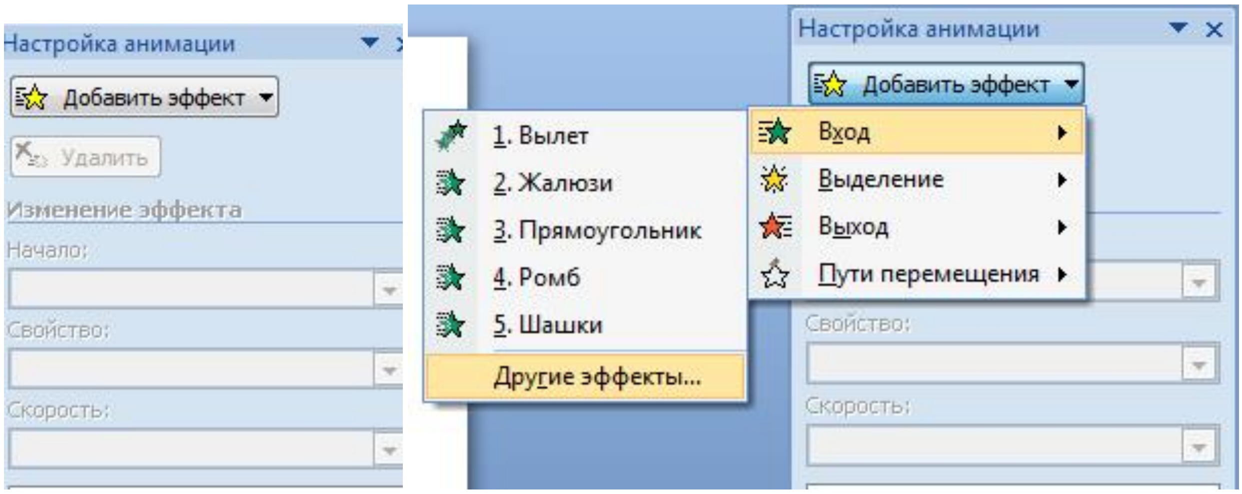
5. Выделить все квадраты. Из контекстного меню выбрать команду Группировать.

Создать номер вопроса, при нажатии на который будет появляться сам вопрос. Просмотрите [видео].

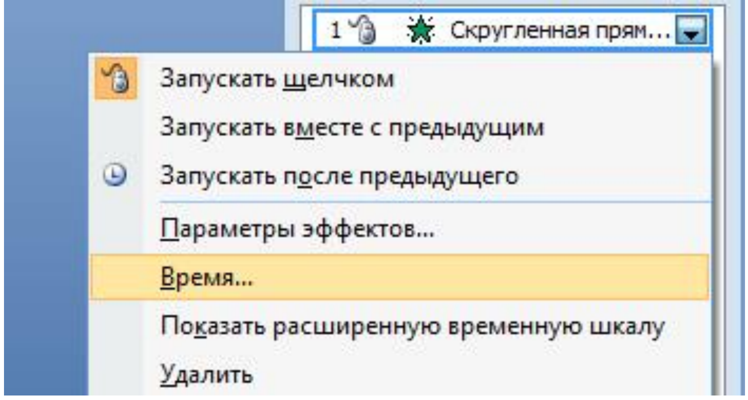
6. Создать квадрат, поместить номер вопроса. Используя вкладку Формат, изменить дизайн кнопки.

7. Создать выноску, с вопросом.

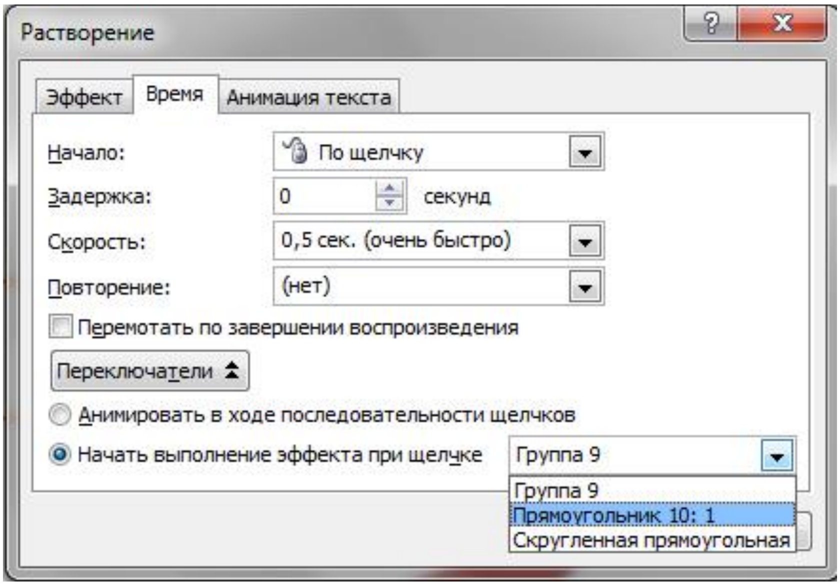
8. Выделить выноску с вопросом. На вкладке Анимация выбрать команду Настройка анимации. Справа появится докер Настройка анимации. Нажать Добавить эффект/Вход/Другие эффекты.



9. Выбрать, например, эффект Растворение.
10. В докере Настройка анимации добавить эффект. Возле эффекта нажать стрелку вниз и выбрать команду Время.



11. В диалоговом окне на вкладке Время настроить таким образом, чтобы при нажатии на номер вопроса появлялся вопрос.



12. Создать кнопку ОТВЕТ

13. Заполнить квадраты буквами. Используем вставку текстового окна в каждый квадрат. Выровнять буквы и сгруппировать слово. Просмотрите [видео].

С Л О В О

Создание эффекта анимации при нажатии на кнопку ОТВЕТ должно появляться слово в квадратах

14. (Выделить сгруппированное СЛОВО, а затем **Настройка анимации/Добавить эффект/Вход/Проявление снизу**.
15. Настроить **Время** появления слова при нажатии на кнопку Ответ.
16. Просмотрите [видео]. Исчезновение вопроса (Выделить Вопрос, а затем **Настройка анимации/Добавить эффект/Выход/Смывание**).
17. Для исчезновение Вопроса выбрать действие **Запускать вместе с предыдущим действием**.

Задание Составить кроссворд по теме самостоятельно.