Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«АРМАВИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Институт прикладной информатики, математики и физики
Кафедра математики, физики и методики их преподавания

Методические указания для студентов 5 курса ОЗО программы «Физика» по дисциплине «Дискретная математика: Комбинаторика».

Составил: доцент кафедры математики, физики и МП
канд.физ.-мат. наук Козлов В.А.

Армавир, 2019г.

Содержание

Введение

С комбинаторикой, а точнее с комбинаторными задачами сталкивается каждый человек в течение всей жизни. Перед каждым из нас регулярно встает проблема выбора. Проблема принятия лучшего решения. А для выбора лучшего решения необходимо знать число всех возможностей. Как правило число таких возможностей дискретно, точнее конечно. Знание комбинаторных методов хотя бы на элементарном уровне поможет найти лучшее решение. Поэтому владение комбинаторными методами можно, очевидно, отнести к одной из составляющих грамотности. Комбинаторный талант может помочь в достижении высоких результатов в карьере и даже в быту.

Обучение математике в школе невозможно представить себе без комбинаторики. Очень многие задачи так или иначе, возможно неявно, решаются с использованием комбинаторных приемов. А явное их использование может привести к неожиданно высоким результатам.

В связи с бурным развитием информатики, программирования возникла новая область математики – дискретная математика, объединившая те направления математики, что используют дискретные множества и дискретные методы. Исторически комбинаторика относилась к теории конечных множеств. Комбинаторика сегодня – часть дискретной математики и интерес к ней и комбинаторным методам огромен. Появились комбинаторная геометрия, комбинаторная теория групп, комбинаторный анализ и т.д. В программировании, а в особенности в линейном программировании без комбинаторики не обойтись.

Из опыта преподавания математики в школе известно, что включение комбинаторных задач в курс математики оказывает положительное влияние на развитие учащихся. Решение таких задач дает возможность расширить знания учащихся о самой задаче, о процессе ее решения, подготовить к решению жизненных практических проблем, научить принимать оптимальное в данной ситуации решение, организовать исследовательскую и творческую деятельность учащихся.

1. Комбинаторные соотношения без повторений

Задачи, в которых речь идет о тех или иных комбинациях объектов, называются комбинаторными задачами. Раздел математики, в котором изучаются комбинаторные задачи, называют комбинаторикой. Комбинаторику можно рассматривать как часть теории конечных множеств – любую комбинаторную задачу можно отвести к задаче о конечных множествах и их отображениях.

Для подсчета числа вариантов в комбинаторных задачах существуют различные формулы, а все эти формулы основаны в конечном итоге на двух простых правилах, которые называются правилами произведения и суммы.

Правило произведения.

Если некоторый выбор может быть сделан «n» различными способами, а для каждого из этих способов некоторый второй выбор может быть сделан m различными способами, то число способов последовательного выполнения этих двух выборов равно произведению nm.

Задача 1.

Из города А в город В можно добраться пароходом, поездом, автобусом, самолетом; из города В в город С только пароходом и автобусом. Сколькими способами можно совершить путешествие по маршруту А - В - С?

Решение.

Очевидно, число различных путей из А в С равно $4 \cdot 2 = 8$, так как выбрав один их четырех возможных способов путешествий от А в В, имеем два возможных способа путешествия от В до С.

Решение задачи основано на правиле произведения.

Рассмотрим еще одну задачу, при решении которой используется это правило.

Задача 2.

В розыгрыше первенства страны по футболу принимают участие 16 команд. Сколькими способами могут быть распределены золотая и серебряная медали?

Решение.

Золотую медаль может выиграть одна из 16 команд. После того, как определен владелец золотой медали, серебряная медаль может достаться одной из 15 команд. Следовательно, общее число способов, которыми могут быть распределены золотая и серебряная медали находятся из произведения 16·15 = 240.

Сформулируем теперь правило произведения (умножения) в общем виде: пусть требуется выполнить одно за другим К действий. Если первое действие можно выполнить p_1 способами, второе действие - p_2 способами, третье действие - p_3 способами и так до К-го действия, которое можно выполнить p_k способами, то все К действий вместе могут быть выполнены (по правилу произведения)

$p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_K$ способами.

Правило суммы.

Другое общее правило имеет вид: если некоторый выбор может быть сделан m различными способами, а второй выбор – n различными способами (независимо от предыдущих), то общее число способов, которыми может быть выполнен какой-нибудь один из этих выборов, равно сумме m + n.

Задача 3.

На блюде лежит 8 яблок и 6 груш. Сколькими способами можно выбрать один плод?

Решение.

8 + 6 = 14 (способов).

Зачастую приходится комбинировать правила произведения и суммы. Приведем пример.

Задача 4.

Из города А в город В ведет К дорог, в город Р – С дорог. В город Н из города А ведет Х дорог, а из города Р – У дорог. Города А и Р дорогами не соединяются. Сколько различных автобусных маршрутов можно провести между городами В и Н?

Решение.

Рассмотрим всевозможные маршруты, идущие из В в Н через А. Из В в А ведет К дорог, а из А в Н – Х дорог. Каждую дорогу выходящую из В в А можно комбинировать с любой дорогой входящей в Н из А. Поэтому общее число различных маршрутов, идущих из В в Н через А, находится по правилу произведения. Оно равно К ·Х. Аналогично подсчитывается число различных маршрутов, идущих из В в Н через Р. Общее число различных маршрутов находится по правилу произведения: оно равно С·У. Итак, всякий автобусный маршрут, соединяющий В и Н, должен проходить или через А или через Р. общее число различных маршрутов находится по правилу сумму КХ + СУ.

Размещения.

Для решения комбинаторных задач созданы общие методы и выведены готовые формулы. Заметим, что при решении комбинаторных задач приходится иметь дело с некоторыми конечными множествами и различными их подмножествами. В одних задачах необходимо найти число всех возможных подмножеств, или – число подмножеств, имеющих определенное количество элементов. В других – нужно рассматривать упорядоченные подмножества, в которых элементы расположены определенным образом и определить их число. В-третьих – нужно определить число различных способов упорядочить данное конечное множество и др.

Дадим теперь следующее определение.

Определение 1. Пусть дано конечное множество М, состоящее из m элементов. Размещением из m элементов по n элементов называют всякое упорядоченное подмножество множества М, состоящее из n элементов ($n \leq m$). Число различных размещений из m элементов по n элементов обозначается символом A_m^n.

Теорема 1. Число различных размещений из m элементов по n элементов равно произведению n последовательных натуральных чисел начиная от m до $m - n + 1$ включительно.

$$A_m^n = m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1), \quad (1)$$

n – сомножителей.

Задача 5.

В классе m мест. Каким числом способом можно рассадить в нем n учеников ($n < m$)?

Решение.

Представим себе, что ученики входят в класс по одному. Тогда у первого есть m возможностей выбрать место, у второго остается (m – 1) возможностей, для третьего – (m – 2) и так далее. Перед входом последнего ученика в классе останется m – (n – 1) место. Используя правило произведения получим, что число способов выразится произведением:

$$m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)$$

Зная теорему 1, это число можно было сразу определить по формуле 1.

Перестановка.

Определение 2. Перестановками из n элементов называют различные упорядочения данного конечного множества, состоящего из n элементов. Число возможных различных перестановок из n элементов обозначается символом P_n.

Теорема 2. Число различных перестановок из n элементов равно произведению всех последовательных целых чисел, начиная от n до 1 включительно:

$$P_n = n(n-1)\ldots 2 \cdot 1 = n! \qquad (2)$$

Следует отметить, что перестановки – частный случай размещений, а именно при n = m, т.е.

$$P_m = A_m^m = \frac{m!}{0!} = m!$$

Можно сделать и обратное, выразив число размещений через число перестановок:

$$A_m^n = \frac{P_m}{P_{m-n}} = \frac{m!}{(m-n)!} \qquad (3)$$

Задача 6.

Сколькими способами можно разместить на полке 4 книги (обозначим их А, В, Д, С)?

Решение.

$$P_4 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24.$$

Сочетания.

Определение 3. Число всех возможных сочетаний из m элементов по n элементов ($1 \le n \le m$) равно произведению n последовательных натуральных чисел от m до $m - n + 1$, деленному на произведение n последовательных натуральных чисел от n до 1.

$$C_m^n = \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n(n-1)\ldots 2\cdot 1} \qquad (4)$$

или

$$C_m^n = \frac{A_m^n}{P_n} \qquad (5)$$

Формулу (4) обычно приводят к более удобному для записи виду, умножая числитель и знаменатель на произведение всех натуральных чисел от $m - n$ до1 включительно. Тогда мы приходим к формуле:

$$C_m^n = \frac{m!}{n!(m-n)!} \quad (m > n) \qquad (6)$$

или

$$C_m^n = \frac{P_m}{P_n \cdot P_{m-n}} \qquad (7)$$

Примечание. $C_m^m = 1$, это следует из формулы (4), а из формулы (6) при принятом условии, что $0! = 1$. $C_m^0 = 1$ - число пустых подмножеств в данном. Кроме этого для сочетаний справедливы следующие две формулы:

$$C_m^n = C_m^{m-n} \qquad (8)$$

и

$$C_m^n = C_{m-1}^n + C_{m-1}^{n-1} \qquad (9)$$

Размещения, перестановки и сочетания вместе часто называют одним словом - соединения.

Приведем особое понятие. Элемент декартова произведения $X_1 \cdot X_2 \cdot \ldots \cdot X_k$ назовем кортежем длины K, составленным из элементов множеств X_1, $X_2, \ldots, X_k$. Может случиться, что все эти множества равны X. Тогда

$(X_1, X_2, \dots, X_k)$ называется кортежем длины K, составленным из элементов множества X. Элемент x_i $(1 \le \mathrm{i} \le \mathrm{k})$ называют i-ой компонентой или i-ой координатой картежа $(X_1, X_2, \dots, X_k)$.

Примерами кортежей могут служить слова (кортежи, составленные из букв алфавита), десятичные записи чисел (кортежи, составленные из цифр) и т.д.

Определение. Два кортежа $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $(y_1, y_2, \dots, y_m)$ называют равными, если они имеют одинаковую длину, причем их компоненты, имеющие одинаковые номера, равны. Итак, если α = $(x_1, x_2, \dots, x_k)$ и β = $(y_1, y_2, \dots, y_m)$, то α = β в том и только в том случае, если k = m и $x_i = y_i$, для любого i, 1≤ i ≤ k.

Например, если

$$\alpha = (2^2,\ 3^2, 4^2), \quad \beta = (\sqrt{16}, \sqrt{81}, \sqrt{256}),$$

то α = β. Кортежи (a, b, c) и (a, b, c, a) не равны (длины различны). Кортежи (a, b, c) и (b, a, c) не равны (порядок их компонент различен).

Отличие кортежей от множеств:

а) в кортеже порядок важен;

б) в кортеже компоненты могут повторяться.

2. Комбинаторные соотношения с повторениями

При рассмотрении различных видов соединений без повторений мы брали некоторое определенное множество, элементы которого существовали «в единственном экземпляре» и в каждое данное соединение могли входить только один раз. Между тем в некоторых случаях элементы в соединении могут повторяться и для того, чтобы охватить общей теорией и такие задачи, необходимо рассмотреть соединения с повторениями.

Размещения с повторениями.

Пусть имеется m непересекающихся множеств $A_1, A_2, \dots, A_m$, каждое из которых содержит не менее чем n элементов. Для простоты мы будем называть элементы множества A_1 элементами 1-го сорта, элементы множества A_2 - элементами 2-го сорта, … , элементы множества A_m - элементами m-го сорта. Все элементы каждого подмножества, то есть элементы одного и того же сорта будем считать одинаковыми, или совпадающими между собой. Из элементов множества А (А $= A_1 \vee A_2 \vee \dots \vee A_m$), то есть элементов входящих в различные его подмножества A_i (i=1,2…) можно составлять различные упорядоченные множества, содержащие множества, содержащие по n элементов в каждом. Такие упорядоченные множества принято называть размещениями с повторениями из элементов m сортов из n элементов, или, более коротко, просто размещениями с повторениями из m элементов по n.

В первом из этих терминов явным образом указывается, что имеется не m различных элементов, а m различных сортов элементов, число же элементов любого сорта в размещении может быть каким угодно. Для наглядности будем представлять себе, что элементами рассматриваемых множеств являются буквы. Если, например, m = 3, то это могут быть буквы a, b, c. Тогда возможны следующие размещения с повторениями этих трех элементов по n = 2:

aa, ba, ca,

ab, bb, cb,

ac, bc, cc.

Размещения с повторениями можно рассматривать и в случае n > m.

Например, m = 2, n = 3

aaa, baa, bba,

aab, abb, bbb,

aba, bab.

Число различных возможных размещений с повторениями из m элементов по «n» элементов будем обозначать

$$\bar{A}_m^n.$$

Теорема 1. Число различных размещений с повторениями из m элементов по «n» элементов определяется по формуле:

$$\bar{A}_m^n = m^n \text{ (1).}$$

Определение. Кортежи длины K, составленные из m-элементного множества X, называют размещениями с повторениями из m элементов по k. Их число обозначают $\bar{A}_m^k$ равно

$$\bar{A}_m^k = m^k \text{ (n (x·x·…·x) = (n (X))}^k.$$

Задача 1.

Сколько четырехзначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, если цифры могут повторяться.

Решение.

Согласно условию, четырехзначные числа составляются из 6 цифр и число их можно определить с помощью формулы (1), то есть

$$\bar{A}_6^4 = 6^4 = 1296.$$

Но в это число попали числа, которые начинаются с 0. Их число равно

$$\bar{A}_6^3 = 6^3 = 216.$$

Следовательно, искомое число четырехзначных чисел равно

$$\bar{A}_6^4 - \bar{A}_6^3 = 1296 - 216 = 1080.$$

Перестановки с повторениями.

Для определения перестановки с повторениями рассмотрим множество, состоящее из «n» элементов, среди которых есть одинаковые.

Определение 2. Перестановкой с повторениями из «n» элементов называется любое упорядочение конечного множества, состоящего из «n» элементов, среди которых имеются совпадающие.

Пусть α – кортеж длины n, составленный из элементов m-элементного множества X = $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$. Каждому индексу K, 1 ≤ k ≤ m, соответствует число n_k, показывающее, сколько раз элемент x_k встречается среди компонента кортежа α. Выписывая по порядку эти числа, получаем новый кортеж $(n_1, n_2, \dots, n_m)$, который называют составом кортежа α.

Например, если X = $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, а α = $(x_1, x_3, x_1, x_4, x_3, x_1)$, то кортеж α имеет состав (3, 0, 2, 1).

Определение. Два кортежа, имеющие один и тот же состав, могут отличаться друг от друга лишь порядком компонент. Их называют перестановками с повторениями данного состава.

Найдем формулу для отыскания числа перестановок с повторениями данного состава.

Прежде рассмотрим пример. Найдем число перестановок с повторениями из букв a, a, a, b, b, c,c. Нумеруем: $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, c_1, c_2$; затем делим не тривиальные 3! 2! 2!, поскольку их можно произвольно комбинировать друг с другом.

Теорема 2. Количество P$(n_1, n_2, \ldots, n_m)$ перестановок с повторениями, имеющих состав $(n_1, n_2, \ldots, n_m)$, находится по формуле:

$$P_m(n_1, n_2, n_3, \ldots, n_m) = \frac{(n_1+n_2+n_3+\cdots+n_m)!}{n_1!\, n_2!\, n_3! \ldots n_m!} \qquad (2)$$

Задача 2.

Сколько «слов» можно получить, переставляя буквы в слове «математика»?

Решение.

В слове «математика» 6 различных букв м, а, т, е, и, к, каждая из которых повторяется соответственно: 2, 3, 2, 1, 1, 1 раз; следовательно, число «слов» можно определить по формуле (2):

$$P_6(2,3,2,1,1,1) = \frac{(2+3+2+1+1+1)!}{2!\cdot 3!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!} = \frac{10!}{2!\cdot 3!\cdot 2!} =$$

$$= 2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10 = 148800$$

Задача 3.

Сколькими способами можно расставить белые фигуры: 2 коня, 2 слона, 2 ладьи, 1 ферзя и 1 короля на первой линии шахматной доски?

Решение.

$$\text{P}\,(2, 2, 2, 1, 1) = \frac{8!}{2!\cdot 2!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 1!} = 5040.$$

Сочетания с повторениями.

В предыдущем пункте мы нашли число кортежей данного состава. Найдем теперь число различных составов, которые могут иметь кортежи длины n, состоящие из элементов множества X, содержащего m элементов.

Определение. Различные составы кортежей длины n, компоненты которых принадлежат данному m-элементному множеству называют сочетаниями с повторениями из m элементов по n.

Определение 3. Сочетанием с повторениями на m элементов по «n» элементов называется всякое множество, содержащее «n» элементов, каждый из которого является элементом одного из данных m сортов.

Например, из трех элементов a, b, c, можно образовать такие сочетания с повторениями по два элемента:

aa, ac, bc,

ab, bb, cc.

Число различных возможных сочетаний с повторениями будем обозначать символом

$$\bar{C}_m^n.$$

Теорема 3. Число составов кортежей длины n, компоненты которых принадлежат данному m-элементному множеству X, равно:

$$\bar{C}_m^n = \frac{(m+n-1)!}{(m-1)!\cdot n!} \qquad (3)$$

Запишем еще одну формулу:

$$\bar{C}_m^n = C_{n+m-1}^{m-1} = C_{n+m-1}^{n} \qquad (4)$$

(она следует из сравнения формул (3) и (6)).

Задача 4.

Сколькими способами можно составить набор из 8 пирожных, если имеется 4 сорта пирожных?

Решение.

Поскольку в этой задаче порядок пирожных не играет роли, то каждый набор задается кортежем длины 8 из 4 элементов. Иными словами, нужно найти число сочетаний с повторениями из 4-х элементов по 8, имеем:

$$\bar{C}_4^8 = C_{11}^8 = \frac{11!}{8! \cdot 3!} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 165.$$

Значит существует 165 различных наборов.

Доказательство теоремы 3.

Каждый состав кортежа длины n, состоящего из элементов множества X, является кортежем, состоящем из m чисел $n_1, n_2, \dots, n_m$, таких, что $n_1 + n_2 + \dots + n_m = n$. Его можно записать в виде кортежа из нулей и единиц, заменив каждое число соответствующим числом единиц и поставив нуль после каждой группы единиц, кроме последней. Например, вместо кортежа $(4, 2, 1)$ можно записать кортеж (1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1), а вместо кортежа (2, 0, 0, 3) – кортеж (1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1). Число единиц, входящих в полученные кортежи равно $n_1 + n_2 + \dots + n_m = n$, а число нулей равно m – 1. Поэтому различных кортежей такого вида существует столько, каково число перестановок с повторениями множества из n единиц и m – 1 нулей:

$$P\ (n,\ m-1) = C_{n+m-1}^n.$$

Мы докажем, таким образом, что число составов кортежей длины n, компоненты которых принадлежат данному m-элементному множеству, равно

$$\bar{C}_{n+m-1}^n.$$

Свойства чисел C_m^k:

1) $C_m^k = C_m^{m-k}$;

2) $C_m^0 + C_m^1 + C_m^2 + \dots + C_m^n = 2^n$ (число подмножеств данного множества)

3) $C_m^k = C_{m-1}^{k-1} + C_{m-1}^k$, если $1 \le k \le m - 1$.

Из свойства 3 вытекает способ рекуррентного вычисления чисел C_m^k:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & C_1^0 & & C_1^1 & & & & \\
 & & & C_2^0 & & C_2^1 & & C_2^2 & & & \\
 & & C_3^0 & & C_3^1 & & C_3^2 & & C_3^3 & & \\
 & C_4^0 & & C_4^1 & & C_4^2 & & C_4^3 & & C_4^4 & \\
C_5^0 & & C_5^1 & & C_5^2 & & C_5^3 & & C_5^4 & & C_5^5 \\
\multicolumn{11}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
\multicolumn{11}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots}
\end{array}
$$

Такую таблицу называют треугольником Паскаля.

Дополнение:$(a_1 + a_2 + \cdots + a_m)^n = \sum_{n_1+n_2+\cdots+n_m=n} P(n_1, n_2, \ldots, n_m)$.

Имеет место полиномиальная формула:

$$a_1^{n_1}\, a_2^{n_2} \ldots\, a_m^{n_m}.$$

Пример. $(a + b + c)^3 = \sum_{n_1+n_2+n_3=3} P(n_1, n_2, n_3)\, a^{n_1} b^{n_2} c^{n_3}$.

Кортежи (n_1, n_2, n_3) могут быть следующими: (3, 0, 0), (0, 3, 0), (0, 0, 3), (2, 1, 0), (2, 0, 1), (0, 2, 1), (1, 2, 0), (1, 0, 2), (0, 1, 2), (1, 1, 1) – всего 10.

$$\bar{C}_3^3 = C_5^3 = \frac{5!}{3!\cdot 2!} = \frac{4\cdot 5}{1\cdot 2} = 10.$$

3. Рекуррентные соотношения

Рекурсивные функции, рекуррентные последовательности, рекуррентные соотношения, рекурсивные алгоритмы объединены общей идеей: для вычисления очередного значения функции, получения очередной реализации алгоритма, определения очередного члена последовательности необходимо обращаться к предшествующим их знаниям, вычисленным раньше. В свою очередь, вычисление предшествующих значений требует обращения к вычисленным перед этим требуемым значениям и так далее. Таким образом, для того, чтобы получить значение функции, реализацию алгоритма или значение члена ряда на n-м шаге необходимо знать их значения на (n – 1) = m шаге, а, следовательно, на первом шаге.

Под рекуррентным соотношением понимают правило, которое определяет способ вычисления очередного значения функции или очередного члена последовательности, с учетом того, что эти значения известны для первого шага.

Разработка рекуррентных отношений – один из методов решения задач, например в комбинаторике.

Пример 1.

Найдем число перестановок n-элементного множества.

Решение.

Пусть I = $\{i_1, i_2, \dots, i_{n-1}, i_n\}$. Любую перестановку этих элементов можно получить так: взять некоторую перестановку элементов $i_1, i_2, \dots, i_{n-1}$ и всеми возможными способами указанными элементами, включая начало и конец, поставить элемент i_n. Ясно, что таких способов будет n. Таким образом, из перестановки $i_1, i_2, \dots, i_{n-1}$ получим n перестановок. Это значит, что перестановок из n элементов в n раз больше, чем из n – 1 элементов множества I.

Тем самым установлено рекуррентное соотношение:

$$P_n = P_{n-1}n.$$

Последовательно получаем:

$$P_n = n \cdot P_{n-1} = n \cdot (n-1) \cdot P_{n-2} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot P_{n-3} = \ldots =$$
$$= n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

Следующий пример чисел последовательности называется числами Фибоначчи (XIII век): пара кроликов приносит раз в месяц приплод из двух крольчат (самки и самца). Новорожденные крольчата через два месяца после рождения также приносят приплод. Сколько кроликов появится через год, если в его начале была одна пара кроликов?

Обозначим через b_n количество пар кроликов по истечении n месяцев с начала года. Тогда в начале года $b_0 = 1$, $b_1 = 2$, через два месяца $b_2 = b_0 + b_1 = 3$, через 3 месяца $b_3 = b_2 + b_1 = 5$.

В общем случае получаем:

$$b_n = b_{n-1} + b_{n-2}.$$

Тогда в конце количество пар кроликов равно:

$b_{12} = b_{11} + b_{10}$, при начальных условиях, что $b_0 = 1, b_1 = 2$.

$b_{12} = 377$.

Последовательность чисел, которые получаются в процессе вычислений 1, 2, 3, 5, 8, 13, … называют числами Фибоначчи.

С помощью чисел Фибоначчи решаются многие задачи комбинаторики.

Пример 2.

Найти число последовательностей из 0 и 1 длиной n, таких, в которых две единицы не стоят рядом.

Решение.

Убедимся в том, что эта задача решается при помощи рекуррентного соотношения

$$b_n = b_{n-1} + b_{n-2}.$$

Возьмем ∀ последовательность из n + 1 нулей и единиц такую, что в ней не идут две единицы подряд. Она может оканчиваться не на 0 или 1. Если последовательность оканчивается на 0, его можно отбросить и получить последовательность длиной n, в которой две 1 не стоят рядом. Наоборот, если взять эту последовательность и приписать ей в конце 0, то получим такую последовательность длиной n + 1, в которой две 1не стоят рядом.

Пусть число последовательностей длиной n + 1, в которых две единицы не стоят рядом и которые оканчиваются на 0, равно g_n. Возьмем теперь последовательность длиной n + 1, в которой две 1 не стоят рядом и которая оканчивается на 1. Так как две 1 не стоят рядом, перед последней единицей последовательности стоит 0, то есть последовательность оканчивается на 01. Отбрасывая эти цифры, получим последовательность длиной n – 1, в которой две 1 не стоят рядом. Число таких последовательностей g_{n-1}. Так как каждая последовательность длиной n + 1, в которой две единицы не стоят подряд оканчивается на 1 или 0, для общего числа таких последовательностей по правилу суммы получаем $g_{n+1} = g_n + g_{n-1}$. При этом для последовательности длиной n = 1 существует две последовательности: 0 и 1, в которых две 1 не стоят рядом. Вследствие чего $g_1 = 2$. Для последовательности длиной n = 2 существует при последовательности, в которых две 1 не стоят рядом: 00, 01 и 10. Поэтому $g_2 = 3$. Таким образом, рекуррентное соотношение $g_{n+1} = g_n + g_{n-1},\ g_1 = 2,\ g_2 = 3$ эквивалентно соотношению $b_{n+1} = b_n + b_{n-1}, b_1 = 2, b_2 = 3$. А это ряд Фибоначчи.

Список используемых источников

1. Аракелов А. Элементы комбинаторики// газета «Математика». 2010. №2.- стр.7.

2. Белокурова Е. Е. Характеристика комбинаторных задач //Начальная школа. 1994. №1. – С.34-38.

3. Болотов В. А. О введении элементов комбинаторики, статистики и теории вероятностей в содержание математического образования основной школы //Математика. - 2004. - №44. – С.45-47.

4. Виленкин Н. Я. Комбинаторика. // М.: Наука, 1969. - 28с.

5. Виленкин Н.Я. и др. «Алгебра и математический анализ» для 11 класса// М.: Просвещение.-1998. – 288с.

6. Виленкин Н.Я. Индукция. Комбинаторика. Пособие для учителей //М.: Просвещение.- 1976. – 48с..

7. Виленкин, Н.Я. Популярная комбинаторика / Н.Я. Виленкин // М.: Наука.- 1975. - 207с.

8. Гельфанд С.И. и др. Задачи по элементарной математике. Последовательности. Комбинаторика. Пределы// М.: Наука.- 1965. - С.25.

9. Гнеденко Б. В., Журбенко И. Г. Теория вероятностей и комбинаторика //Математика в школе. - 2007. - №6. – с. 67-70, №8. - с.49.