Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«АРМАВИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Институт прикладной информатики, математики и физики
Кафедра математики, физики и методики их преподавания

Методические рекомендации к выполнению практических заданий курса «Практикум решения физических задач повышенной сложности» (Часть 2)

Составители: доцент кафедры математики, физики и МП, Гурина Т.А.,
доцент кафедры математики, физики и МП, Холодова С.Н.

Армавир, 2021

Содержание

§ 1.**Теоретический материал и методические рекомендации для подготовки к решению олимпиадных задач по физике**

Механика

Средняя путевая скорость − скалярная величина $\boldsymbol{v}_{\text{ср.}} = \frac{\boldsymbol{L}}{\boldsymbol{t}}$, где L – весь путь, t – все время движения (как правило, включая остановки).

При решении задач на среднюю скорость важно на рисунке или в комментариях к решению определить те величины, которые вы вводите для промежуточных выкладок. Надо стараться, чтобы их количество не было большим. Чем проще будут обозначения, тем лучше! Например, для обозначения первой трети или двух третей пути вместо S_1, S_2 лучше ввести $\frac{S}{3}$ и $\frac{2S}{3}$ или S и 2S.

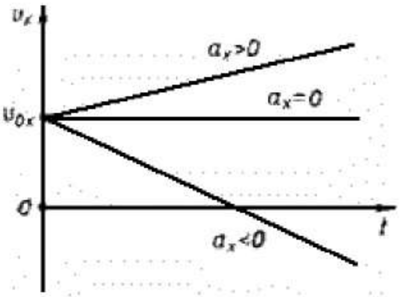
Ускорение. Равноускоренное движение.

Ускорением тела называют отношение изменения скорости тела ко времени, за которое это изменение произошло: $\vec{a} = \frac{\vec{v}-\vec{v_0}}{t}$

Ускорение характеризует быстроту изменения скорости.

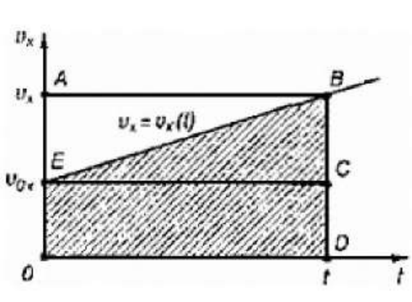
Равноускоренным называется движение, при котором скорость тела за любые равные промежутки времени изменяется одинаково.

Графиком скорости при равноускоренном движении является прямая.



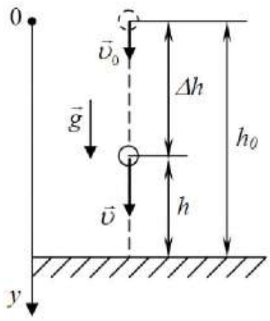
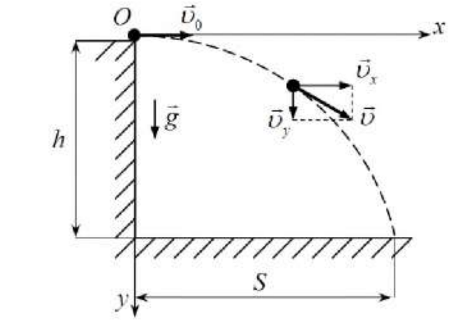
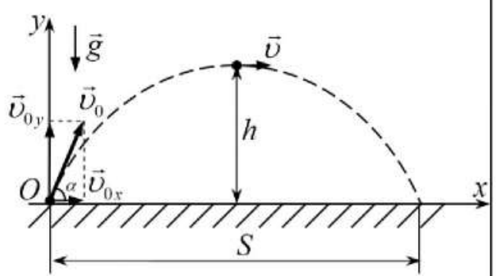
Перемещение и путь при прямолинейном равноускоренном движении: $\vec{s} = \overrightarrow{V_0 t} + \frac{\vec{a}t^2}{2}$

Используя график скорости, можно определить пройденный телом за известное время путь - он численно равен площади заштрихованной поверхности.



Движение в поле силы тяжести

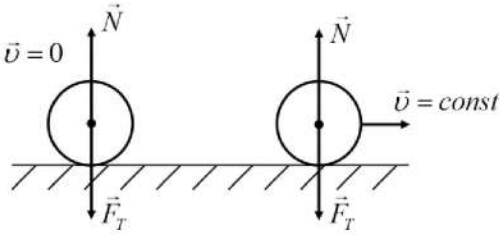
Свободным падением называется движение, которое совершило бы тело только под действием силы тяжести без учета сопротивления воздуха**.**

Движение тела по вертикали	*Движение тела, брошенного горизонтально с некоторой высоты*	*Движение тела, брошенного под углом к горизонту*
При свободном падении тела с небольшой высоты h_0 от поверхности Земли с начальной скоростью υ_0 оно движется с постоянным ускорением $\boldsymbol{g = 9{,}8}$ ***м/с²***, направленным вертикально вниз. Для описания этого движения выбирают вертикальную координатную ось Oy.	Это движение можно разложить на два независимых движения: равномерное прямолинейное, происходящее в горизонтальном направлении со скоростью $\boldsymbol{v_x}$, равной начальной скорости бросания $\boldsymbol{v_0}$ $(\boldsymbol{v_x = v_0})$, и свободное падение с высоты, на которой находилось тело в момент бросания, с ускорением g. Для описания этого движения выбирают прямоугольную систему координат xOy. Траекторией движения является ветвь параболы.	Данное движение также можно разложить на два независимых движения: равномерное прямолинейное, происходящее в горизонтальном направлении с начальной скоростью $\boldsymbol{v_{0x} = v_0 \cdot cos\alpha}$ и свободное падение с начальной скоростью $\boldsymbol{v_{0y} = v_0 \cdot sin\alpha}$, где $\boldsymbol{\alpha}$ - угол между направлениями вектора скорости $\boldsymbol{v_0}$ и осью Ox. Траекторией такого движения является парабола.
		
Уравнение движения: $\boldsymbol{y = y_0 + v_0 t + \frac{gt^2}{2}}$ Путь, пройденный телом за время t: $\boldsymbol{\Delta h = v_0 t + \frac{gt^2}{2}}$ Скорость тела: $\boldsymbol{v = v_0 + gt}$ $\boldsymbol{v = \sqrt{v_0^2 + 2g \cdot \Delta h}}$ Время падения с высоты h_0 без начальной скорости $(\vartheta_0 = 0)$: $\boldsymbol{t = \sqrt{\frac{2h_0}{g}}}$	Уравнения движения: $\boldsymbol{x = x_0 + v_x t} \qquad \boldsymbol{y = y_0 + \frac{gt^2}{2}}$ Высота, с которой брошено тело: $\boldsymbol{h = \frac{gt^2}{2}}$ Дальность полета: $\boldsymbol{S = v_0 t}$ Скорость тела: $\boldsymbol{v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 + (gt)^2}}$ Время полета тела: $\boldsymbol{t = \sqrt{\frac{2h}{g}}}$	Уравнение движения: $\boldsymbol{x = x_0 + v_x t}, \quad \boldsymbol{y = y_0 + v_{0y} t - \frac{gt^2}{2}}$ Максимальная высота полета: $\boldsymbol{h = v_{0y}\frac{t}{2} - \frac{g}{2}\left(\frac{t}{2}\right)^2}, \quad \boldsymbol{h = \frac{v_{0y}^2}{2g}}$ Дальность полета: $\boldsymbol{S = v_{0x} t = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}}$ Скорость тела: $\boldsymbol{v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}}$, $\boldsymbol{v_x = v_{0x} = v_0 \cos\alpha}$, $\boldsymbol{v_y = v_{0y} - gt}, \quad \boldsymbol{v_{0y} = v_0 \sin\alpha}$ Время полета тела: $\boldsymbol{t = \frac{2v_{0y}}{g} = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}}$

Динамика. Законы Ньютона

Первый закон Ньютона (закон инерции)

Существуют такие системы отсчета, относительно которых тело сохраняет свое состояние покоя или равномерного прямолинейного движения, если на него <u>не действуют другие тела или действия других тел скомпенсировано</u>.

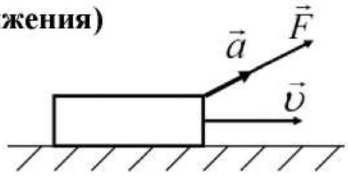


Инерциальная система отчета

Системы отсчета, относительно которых тело движется прямолинейно и равномерно или покоится, если на него не действуют другие тела или действие других тел скомпенсировано называют ***инерциальными системами отсчета.***

(Другими словами инерциальная система отсчета (ИСО) <u>не обладает ускорением</u>! $a = 0$)

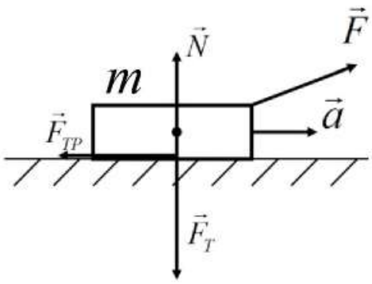
Второй закон Ньютона (закон движения)



Сила, действующая на тело, равна произведению массы тела на сообщаемое этой силой ускорение

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

Если на тело ***действуют несколько сил***, то второй закон Ньютона звучит: векторная сумма всех сил, действующих на тело (равнодействующая сила), равна произведению массы тела на сообщаемое этой силой ускорение.



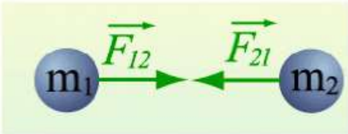
$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F_i} = m\vec{a} \quad \text{или} \quad \vec{R} = m\vec{a}$$

Для данного примера второй закона Ньютона записывается в виде: $\vec{F} + \overrightarrow{F_T} + \vec{N} + \overrightarrow{F_{\text{тр}}} = m\vec{a}$

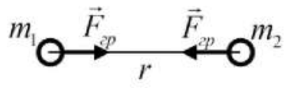
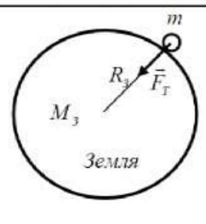
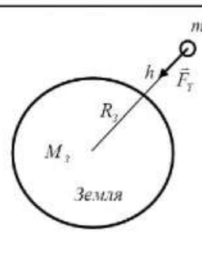
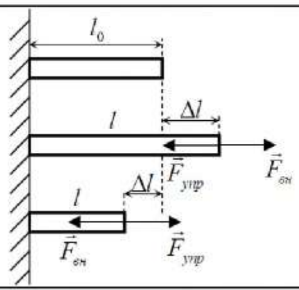
Третий закон Ньютона (закон взаимодействия)

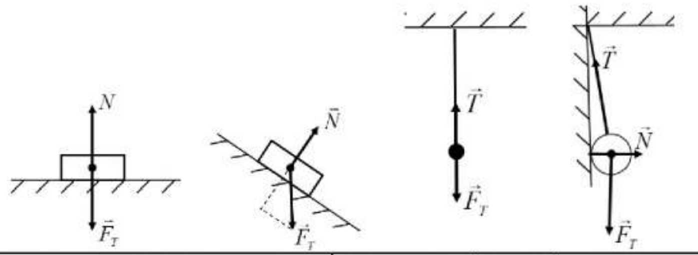
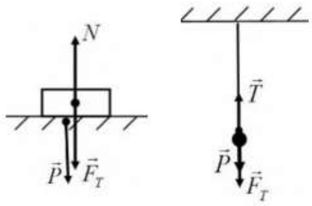
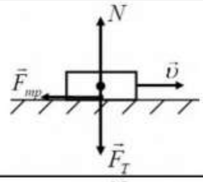
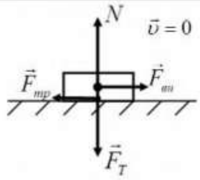
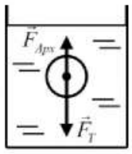
Тела взаимодействуют между собой с силами, которые направлены вдоль прямой соединяющей эти тела, равны по модулю и противоположны по направлению.

$$\overrightarrow{F_{12}} = -\overrightarrow{F_{21}}$$



Силы в механике

№	Название силы	Между какими телами действует	Характеристика действия силы	Схема взаимодействия	Формула, закон
1	Гравитационная сила (сила всемирного тяготения), $F_{гр}$	Между телами обладающими массой	Тела притягиваются друг к другу (сила притяжения)		***Закон всемирного тяготения*** $F_{\text{гр}} = G\frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$ $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\frac{Н \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2}$
2	Сила тяжести (частный случай гравитационной силы), F_T	Между телом и Землей	Тело притягивается к Земле (сила притяжения)		***Сила тяжести на поверхности Земли*** $F_{\text{Т}} = G\frac{M_З \cdot m}{R_З^2} = mg$ $g = G\frac{M_З}{R_З^2} = 9{,}81 \text{ м/с}^2$
					***Сила тяжести на высоте h от поверхности Земли*** $F_T = G\frac{M_З \cdot m}{(R_З + h)^2} = mg_{(h)}$ $g_{(h)} = G\frac{M_З}{(R_З + h)^2}$
3	Сила упругости, $F_{упр}$	Возникает в деформированном теле	Сила направлена в сторону противоположную деформации. *(Деформация – это изменение формы или объема тела)*		***Закон Гука*** $\overrightarrow{F_{\text{упр}}} = -k\Delta\vec{l}$, $\Delta l = \lvert l - l_0 \rvert$- абсолютная деформация (изменения длины тела), k - коэффициент упругости (жесткость)

4	Сила реакции опоры, N (сила натяжения нити, T) (частный случай силы упругости)	Возникает между телом и опорой (или подвесом)	Действует на тело со стороны опоры (или подвеса) и направлена перпендикулярно к опоре (или вдоль подвеса)		
5	Вес тела, P	Возникает между телом и опорой (или подвесом)	Действует на опору (или подвес) со стороны тела вследствие притяжения тела Землей. Направлена противоположно силе реакции опоры (или силы натяжения нити)		***Вес тела*** $\vec{P} = -\vec{N}$ Вес тела в покое, при движении по горизонтали и вертикально без ускорения: $P = mg$ Вес тела, движущегося вертикально с ускорением вверх: $P = mg + ma = m(g + a)$ вниз: $P = mg - ma = m(g - a)$
6	Сила трения, $F_{тр}$	Возникает между движущимися относительно друг друга телами (или стремящимися к движению)	Направлена вдоль поверхности соприкосновения тел противоположно движению тела (или противоположно силе, стремящейся вызвать движение)	 	***Сила трения скольжения*** $F_{\text{тр.скол}} = \mu N$ ***Сила трения покоя*** $F_{тр.\ покоя} = F_{вн}$
7	Сила Архимеда (выталкивающая сила), F_A	Возникает между телом и жидкостью (или газом), при погружении тела в жидкость (или газ)	Действует на тело, погруженное в жидкость (или газ), и направлена вертикально вверх		***Сила Архимеда*** $F_{\text{Арх}} = \rho_{\text{жид}} g V_{\text{тела}}$

Импульс тела – это векторная физическая величина, равная произведению массы тела на его скорость: $\vec{p} = m\vec{v}$

Импульс тела – это количественная мера движения тела. Направление импульса тела всегда совпадает с направлением скорости его движения. Изменение импульса тела равно разности конечного и начального значений импульса тела.

Если на тело действует некомпенсированная сила, то его импульс изменяется. При этом изменение импульса тела равно импульсу подействовавшей на него силы: $\vec{F}\Delta t = \Delta\vec{p}$

Следует всегда помнить, что совпадают направления векторов:

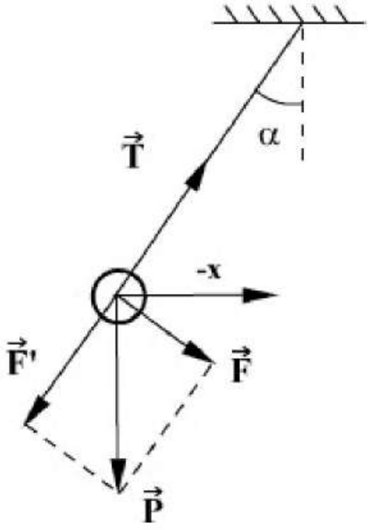
- силы и ускорение: $\vec{F} \uparrow\uparrow \vec{a}$
- импульса тела и скорости: $\vec{p} \uparrow\uparrow \vec{v}$
- изменения импульса тела и силы: $\Delta\vec{p} \uparrow\uparrow \vec{F}$
- изменение импульса тела и ускорения: $\Delta\vec{p} \uparrow\uparrow \vec{a}$

Импульс системы тел могут изменить только внешние силы, причем

изменение импульса системы пропорционально сумме внешних сил и совпадает с ней по направлению. Внутренние силы, изменяя импульсы отдельных тел системы, не изменяют суммарный импульс системы

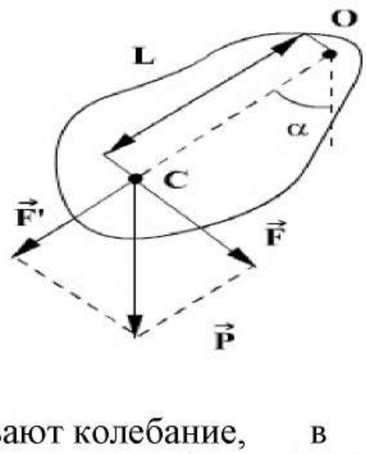
Математическим маятником называется материальная точка массой m, подвешенная на невесомой нерастяжимой нити длиной L в поле силы тяжести (или других сил).

Период малых колебаний математического маятника в поле силы тяжести Земли определяется по формуле Гюйгенса: $\boldsymbol{T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}}$



Физическим маятником называется твердое тело, закрепленное на неподвижной горизонтальной оси (оси подвеса), не проходящей через центр тяжести, и совершающее колебания относительно этой оси под действием силы тяжести. В отличие от математического маятника массу такого тела нельзя считать точечной.

Период колебаний физического маятника: $\boldsymbol{T = 2\pi\sqrt{\frac{l_{\text{пр}}}{g}}}$ или $\boldsymbol{T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgl}}}$



Гармоническим называют колебание, в процессе которого величины, характеризующие движение (смещение, скорость, ускорение и др.), изменяются по закону синуса или косинуса (гармоническому закону). В общем виде этот закон задается формулой: $\boldsymbol{x(t) = A\sin(\omega t + \varphi_0)}$

где x(t) — значение изменяющейся величины в момент времени t, A — амплитуда колебаний, ω — циклическая (круговая) частота колебаний, φ_0— начальная фаза колебаний.

Гармонические колебания являются *периодическими*. Период T этих колебаний равен периоду функции $\sin(\omega t+\varphi_0)$,то есть: $\boldsymbol{T=\frac{2\pi}{\omega}}$

Молекулярная физика

Количество вещества: $\vartheta=\frac{N}{N_A}=\frac{m}{M}$

m — масса;
μ — молярная масса вещества;
N — число молекул;
$N_A = 6{,}02\cdot10^{23}$ *моль*$^{-1}$ — число Авогадро

Основное уравнение молекулярно-кинетической теории

$$\boldsymbol{p=\frac{1}{3}mn\langle v^2\rangle}$$

p — давление идеального газа;
m — масса одной молекулы;
n = *N*/*V* — концентрация молекул;
V — объем газа;
N — число молекул.

Средняя квадратичная скорость молекул идеального газа

$$\langle v_{\text{кв}}\rangle=\sqrt{\langle v^2\rangle}=\sqrt{\frac{3kT}{m}}=\sqrt{\frac{3RT}{\mu}}$$

$k = 1{,}38\cdot10^{-23}$ *Дж/К* — постоянная Больцмана;
$R = kN_A$ = 8,31 Дж/(моль·К) — универсальная газовая постоянная;
T = *t*+273 — абсолютная температура;
t — температура по шкале Цельсия.

Уравнение Менделеева-Клапейрона

$$\boldsymbol{pV=vRT}$$

Внутренняя энергия идеального одноатомного газа

$$\boldsymbol{U=\frac{3}{2}vRT}$$

v — количество вещества;
R = 8,31 Дж/(моль·К) — универсальная газовая постоянная;
T — абсолютная температура.

Элементарная работа, совершаемая газом

$$\boldsymbol{\delta A = pdV}$$

Первый закон термодинамики

$$\Delta \boldsymbol{Q} = \Delta \boldsymbol{A} + \Delta \boldsymbol{U}$$

ΔQ — количество подведенной теплоты;
ΔA — работа, совершаемая веществом;
ΔU — изменение внутренней энергии вещества.

Уравнение теплового баланса

$$\boldsymbol{Q}_{\text{отд}} = \boldsymbol{Q}_{\text{получ.}}$$

Суммарное количества теплоты, которое выделяется в теплоизолированной системе равно суммарному количеству теплоты, которое в этой системе поглощается.

Электричество

Электрическая емкость уединенного проводника или конденсатора:

$$C = \frac{\Delta Q}{\Delta \varphi}$$

где ΔQ - заряд, сообщенный проводнику (конденсатору); $\Delta\varphi$ - - изменение потенциала, вызванное этим зарядом.

Электрическая емкость уединенной проводящей сферы радиусом *R*, находящейся в бесконечной среде с диэлектрической проницаемостью ε:

$$\boxed{C = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon R}$$

Если сфера полая и заполнена диэлектриком, то электроемкость ее от этого не изменяется.

Электрическая емкость плоского конденсатора

$$C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}$$

где S - площадь пластин (каждой пластины); d - расстояние между ними; ε - диэлектрическая проницаемость диэлектрика, заполняющего пространство между пластинами.

Электрическая емкость плоского конденсатора, заполненного n

слоями диэлектриком толщиной d_i каждый с диэлектрическими проницаемостями ε, (слоистый конденсатор): $\boxed{C = \frac{\varepsilon_0 S}{\frac{d_1}{\varepsilon_1}+\frac{d_2}{\varepsilon_2}+\dots+\frac{d_n}{\varepsilon_n}}}$

Электрическая емкость сферического конденсатора (две концентрические сферы радиусами R_1 и R_2, пространство между которыми заполнено диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ε)

$$C = \frac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R_1 R_2}{(R_2 - R_1)}$$

Электрическая емкость цилиндрического конденсатора (два коаксиальных цилиндра длиной l и радиусами R_1 и R_2, пространство между которыми заполнено диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ε)

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon l}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$$

Электрическая емкость *C* последовательно соединенных конденсаторов:

в общем случае $\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n}$, где n - число конденсаторов;

в случае двух конденсаторов $C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$;

в случае n одинаковых конденсаторов с электроемкостью C_1 каждый

$$\boldsymbol{C = \frac{C_1}{n}}$$

Электрическая емкость параллельно соединенных конденсаторов:

в общем случае $C=C_1+C_2+\dots+C_n$;

в случае двух конденсаторов $C=C_1+C_2$;

в случае n одинаковых конденсаторов с электроемкостью C_1 каждый

$$C=nC_1.$$

Сила постоянного тока

$$I = \frac{Q}{t}$$

где Q - количество электричества, прошедшее сечение проводника за время t.

Плотность электрического тока есть векторная величина, равная отношению силы тока к площади S поперечного сечения проводника:

$$j = \frac{I}{S}k$$

где k- единичный вектор, по направлению совпадающий с направлением движения положительных носителей заряда.

Сопротивление однородного проводника

$$R = \frac{pl}{S}$$

где ρ - удельное сопротивление вещества проводника; l-его длина.

Проводимость G проводника и удельная проводимость γ вещества $G = \frac{1}{R}$, $\gamma = \frac{1}{P}$

Зависимость удельного сопротивления от температуры

$$\rho=\rho_0 (1+\alpha t),$$

где ρ и ρ_0 - удельные сопротивления соответственно при t и 0 °C; t -температура (по шкале Цельсия); α - температурный коэффициент сопротивления.

Сопротивление соединения проводников:

$$\boldsymbol{R = \sum_{i=1}^{n} R_i}\text{-последовательного}$$

$$\frac{1}{R} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i}\text{-параллельного}$$

Здесь R_i – сопротивление i-го проводника; n-число проводников.

Закон Ома:

Для неоднородного участка цепи $\boldsymbol{I = \frac{(\varphi_1 - \varphi_2) \pm \varepsilon_{12}}{R} = \frac{U}{R}}$

Для однородного участка цепи $\boldsymbol{I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R} = \frac{U}{R}}$

Для замкнутой цепи $\boldsymbol{(\varphi_1 - \varphi_2) I = \frac{\varepsilon}{R}}$

Здесь $(\varphi_1 - \varphi_2)$- разность потенциалов на концах участка цепи; ε_{12} - ЭДС источников тока, входящих в участок; U - напряжение на участке цепи; R - сопротивление цепи (участка цепи); ε - ЭДС всех источников тока цепи.

Работа, совершаемая электростатическим полем и сторонними силами в участке цепи постоянного тока за время t,

$$A=IUt$$

Мощность тока

$$P=IU.$$

Закон Джоуля - Ленца

$$Q=I^2Rt$$

где Q - количество теплоты, выделяющееся в участке цепи за время t;

Закон Джоуля - Ленца справедлив при условии, что участок цепи неподвижен и в нем не совершаются химические превращения.

§ 2.Примеры решения задач школьного и муниципального этапов и критерии их оценивания

9 класс

Задача 1

Автомобиль на пути из Москвы до Ярославля двигался с переменной скоростью: сначала половину от всего времени движения его скорость составляла 100 км/ч, потом на половине оставшегося пути – 75 км/ч, а на остатке пути – 50 км/ч.

1. Найдите модуль средней скорости автомобиля на всём пути.
2. Согласно данным GPS-навигатора, координаты Москвы – 55°45’07» с.ш. и 37°36’59» в.д., а Ярославля – 57°37′47″ с.ш. и 39°52.42′00″ в.д. Используя эти сведения, определите приближённо, куда направлен вектор средней скорости автомобиля на всём пути?

Решение

Рассчитаем среднюю скорость на втором и третьем участках. Пусть пройденный на этих участках путь равен S_{23}, а скорости на этих участках равны V_2 = 75 км/ч и V_3 = 50 км/ч соответственно. Тогда средняя скорость V_{23} на этих участках:

$$V_{23} = \frac{S_{23}}{t_{23}} = \frac{S_{23}}{t_2 + t_3} = \frac{S_{23}}{\frac{0,5 \cdot S_{23}}{V_2} + \frac{0,5 \cdot S_{23}}{V_3}} = \frac{2}{\frac{1}{V_2} + \frac{1}{V_3}} = \frac{2V_2V_3}{V_2 + V_3} = 60\,\frac{\text{км}}{\text{ч}}$$

Теперь рассчитаем среднюю скорость за всё время движения. Пусть весь пройденный путь равен S, время, затраченное на весь путь, равно t, а скорость на первом участке равна V_1 = 100 км/ч. Тогда средняя скорость $V_{\text{ср}}$ за всё время движения:

$$V_{\text{ср}} = \frac{S}{t} = \frac{V_1\frac{t}{2} + V_{23}\frac{t}{2}}{t} = \frac{V_1 + V_{23}}{2} = 80\,\frac{\text{км}}{\text{ч}}$$

Поскольку и в северном направлении, и в восточном направлении города имеют координаты, отличающиеся примерно на 2 градуса, то можно считать, что средняя скорость автомобиля направлена приближённо на северо-восток.

Критерии оценивания

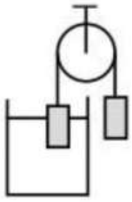
Верно в общем виде записано выражение для средней скорости. ..... **2 балла**
Получено выражение для V_{23} .... **3 балла**
Рассчитано значение V_{23} .... **1 балл**
Получено выражение для $V_{\text{ср}}$ .... **2 балла**
Рассчитано значение $V_{\text{ср}}$ .... **1 балл**

Правильно определено направление средней скорости автомобиля на всем пути (приближенно на северо-восток) .... **1 балл**

Максимум за задачу 10 баллов.

Задача 2

Два однородных груза массами m и $2m$, соединённые переброшенной через неподвижный блок идеальной нитью, висят, как показано на рисунке. Найдите плотность материала, из которого сделан левый груз, если он погружён в воду на две трети своего объёма. Плотность воды равна 1 г/см^3.



Решение

Легко заметить, что груз, частично погруженный в воду, имеет массу $2m$, а правый груз – массу m. Раз система находится в равновесии, значит, сумма сил, действующих на правое тело, равна нулю. На это тело действует сила тяжести mg, направленная вертикально вниз, и сила натяжения нити T, направленная вертикально вверх. Таким образом, $T = mg$.

Груз, частично погружённый в воду, тоже находится в равновесии, а значит, сумма сил, действующих на него, равна нулю. На это тело действуют сила натяжения нити T, сила Архимеда $F_{\text{Арх}}$, направленные вертикально вверх, и сила тяжести $2mg$, направленная вертикально вниз. Таким образом:

$$2mg = F_{\text{Арх}} + T,$$

$$2mg = \rho_{\text{воды}}\, g \cdot 2/3 \cdot V + mg.$$

Здесь $V = 2m/\rho$груза.

Отсюда:

$$\rho_{\text{груза}} = \frac{2m}{V} = \frac{4}{3}\rho_{\text{воды}} \approx 1{,}33\,\frac{\text{г}}{\text{см}^3}$$

Критерии оценивания

Указано, что груз массой 2m находится слева.................................... **2 балла**

Записано условие равновесия для правого груза................................ **2 балла**

Записано условие равновесия для левого груза.................................. **3 балла**

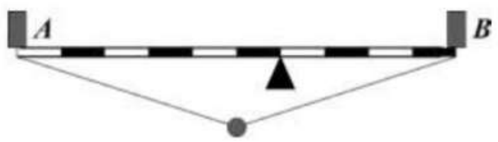
Записано выражение для плотности левого груза .... **2 балла**

Получено значение плотности левого груза .... **1 балл**

Максимум за задачу 10 баллов.

Задача 3

Два тела и бусинка, нанизанная на гладкую нить, которая прикреплена к концам однородного массивного рычага, уравновешены, как показано на рисунке. Найдите массу рычага, если масса груза A равна m, груза B – $4m$, а бусинки – m.



Решение

Бусинка находится в равновесии, если горизонтальные проекции сил натяжения нити, действующих на бусинку, равны друг другу по модулю. Поскольку рычаг в состоянии равновесия горизонтален, получаем, что бусинка находится в равновесии, если она расположена ровно под серединой рычага.

Рассмотрим силы, действующие на систему «рычаг-нить-бусинка». Со стороны груза A на рычаг действует сила mg, которая приложена к левому краю рычага и направлена вертикально вниз. Со стороны груза B на рычаг действует сила $4mg$, которая приложена к правому краю рычага и направлена вертикально вниз. Также на рычаг действует сила тяжести, которая в силу однородности рычага приложена к центру рычага и направлена вертикально вниз. Помимо вышеуказанных сил на рычаг действует сила реакции со стороны опоры N, приложенная в месте контакта с опорой и направленная вертикально вверх. На бусинку же действует сила тяжести mg, приложенная к ней и направленная вертикально вниз. Силы натяжения нити для выбранной системы являются внутренними.

Запишем уравнение моментов для системы «рычаг-нить-бусинка» относительно точки опоры. Пусть масса рычага равна M, а длина одной десятой части рычага – l. Тогда:

$$mg \cdot 6l + mg \cdot l + Mg \cdot l = 4mg \cdot 4l,$$

$$M = 9m.$$

Критерии оценивания

Отмечено, что бусинка находится под серединой рычага .... **2 балла**

Указаны все внешние силы, действующие на выбранную систему тел (по 1 баллу) .... **5 баллов**

Правильно записано правило моментов ....**2 балла**

Найдена масса рычага .... **1 балл**

Максимум за задачу 10 баллов.

Задача 4

В теплоизолированный сосуд налили 200 г воды при температуре t_1 = 20° С и последовательно бросают в него одинаковые кубики льда при температуре t_2 = — 10° С. Сколько кубиков льда можно бросить в сосуд, чтобы после установления теплового равновесия температура оказалась равной 0°С?

Масса одного кубика равна 10 г. Удельная теплота плавления льда λ = 330 кДж/кг, удельная теплоёмкость льда $c_л$ = 2100 Дж/(кг ·°С), удельная теплоёмкость воды $c_в$ = 4200 Дж/(кг ·°С). Вода из сосуда не выливается.

Решение

Заметим, что конечная температура, равная 0°С, может достигаться, если после теплообмена в сосуде будут находиться и вода, и лёд, поскольку 0°С – это температура фазового перехода (плавления льда). Таким образом, если положить в сосуд слишком много кубиков льда, то вся вода замёрзнет и температура содержимого (льда) будет ниже нуля, а если в сосуд положить недостаточное число кубиков льда, то весь лёд растает и температура содержимого (воды) будет выше нуля. Таким образом, записывая два уравнения теплового баланса (для максимального и минимального числа кубиков льда), получим ограничения для этих чисел:

$$\begin{cases} Q_{охл.воды} + Q_{замерз.воды} \geq Q_{нагр.льда}, \\ Q_{охл.воды} \leq Q_{нагр.льда} + Q_{плавл.льда}, \end{cases}$$

где

$Q_{охл\ воды}$ – теплота, выделяющаяся при охлаждении воды до нуля, $Q_{замерз\ воды}$ – теплота, выделяющаяся при замерзании воды, $Q_{нагр\ льда}$ – теплота, поглощаемая при нагревании льда до нуля, $Q_{плавл\ льда}$ – теплота, поглощаемая при плавлении льда.

$$\begin{cases} c_в m_в (t_1 - 0\,°\text{C}) + \lambda m_в \geq c_л n_{\max} m_л (0\,°\text{C} - t_2), \\ c_в m_в (t_1 - 0\,°\text{C}) \leq c_л n_{\min} m_л (0\,°\text{C} - t_2) + \lambda n_{\min} m_л. \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{cases} n_{\max} \leq \dfrac{c_в m_в (t_1 - 0\,°\text{C}) + \lambda m_в}{c_л m_л (0\,°\text{C} - t_2)} = \dfrac{4200\,\dfrac{\text{Дж}}{\text{кг}\cdot°\text{C}} \cdot 0{,}2\,\text{кг} \cdot 20\,°\text{C} + 330\,000\,\dfrac{\text{Дж}}{\text{кг}} \cdot 0{,}2\,\text{кг}}{2100\,\dfrac{\text{Дж}}{\text{кг}\cdot°\text{C}} \cdot 0{,}01\,\text{кг} \cdot 10\,°\text{C}} \approx 394{,}3, \\ n_{\min} \geq \dfrac{c_в m_в (t_1 - 0\,°\text{C})}{c_л m_л (0\,°\text{C} - t_2) + \lambda m_л} = \dfrac{4200\,\dfrac{\text{Дж}}{\text{кг}\cdot°\text{C}} \cdot 0{,}2\,\text{кг} \cdot 20\,°\text{C}}{2100\,\dfrac{\text{Дж}}{\text{кг}\cdot°\text{C}} \cdot 0{,}01\,\text{кг} \cdot 10\,°\text{C} + 330\,000\,\dfrac{\text{Дж}}{\text{кг}} \cdot 0{,}01\,\text{кг}} \approx 4{,}8. \end{cases}$$

Учитывая, что $n_{\max}$, $n_{\min}$, – целые числа, получаем ответ:

$5 \leq n \leq 394$.

Критерии оценивания

Указано, что конечная температура содержимого сосуда равна нулю, если содержимое – это смесь воды и льда .... **1 балл**

Записаны уравнения теплового баланса для максимального и минимального числа кубиков (по 2 балла за каждое).. **4 балла**

Получены условия для максимального и минимального числа кубиков (по 1,5 балла за каждое) ....**3 балла**

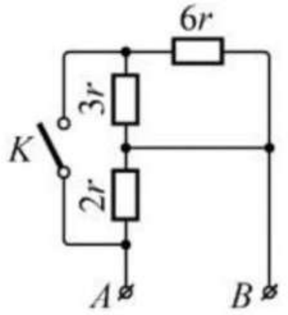
Найдены верные целые значения максимального и минимального числа кубиков (по 1 баллу за каждое) .... **2 балла**

Если определено только максимальное или только минимальное количество кубиков, то за такое решение ставится **не более 5 баллов.**

Максимум за задачу 10 баллов.

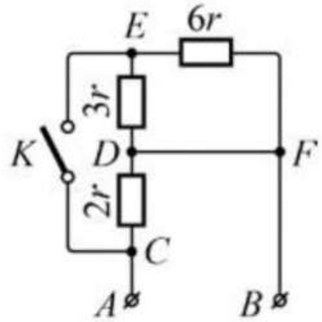
Задача 5

Определите общее сопротивление *RAB* электрической цепи, схема которой изображена на рисунке, при замкнутом и разомкнутом ключе *K*. Считайте сопротивление *r* известным.



Решение

Заметим, что в случае замкнутого ключа все резисторы соединены параллельно друг другу и их общее сопротивление равно



$$R_{AB} = \left(\frac{1}{6r} + \frac{1}{3r} + \frac{1}{2r}\right)^{-1} = r$$

В случае разомкнутого ключа узлы *D* и *F* соединены перемычкой, значит, резисторы $3r$ и $6r$ подключены параллельно идеальному проводнику, то есть их можно не учитывать при расчёте общего сопротивления. Таким образом, общее сопротивление равно $\mathbf{R_{AB} = 2r}$.

Критерии оценивания

Для замкнутого ключа объединены узлы C, E и D, F (по 2 балла за пару), то есть показано, что резисторы соединены параллельно друг другу ....**4 балла**

Для замкнутого ключа найдено общее сопротивление $R_{AB} = r$ **2 балла**

Для разомкнутого ключа объединены узлы D и F............................**2 балла**

Для разомкнутого ключа найдено общее сопротивление $R_{AB} = 2\ r$ ………………………………………………………………........**2 балла**

Максимум за задачу 10 баллов.

10 класс

Задача 1

Автомобиль, едущий по шоссе с постоянной скоростью 54 км/ч, проезжает мимо второго автомобиля, стоящего на соседней полосе. В этот момент второй автомобиль трогается с места и начинает ехать за первым, двигаясь с постоянным ускорением 5 м/с^2. За какое время второй автомобиль догонит первый? Какую скорость он будет иметь в момент, когда поравняется с первым? Автомобили считать материальными точками.

Решение

Перемещения автомобилей с момента первой встречи до момента второй встречи равны. Пусть t – промежуток времени между встречами, S – модуль перемещения автомобилей за этот промежуток времени,

$$V_1 = 54\,\frac{\text{км}}{\text{ч}} = 15\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$$

Скорость первого автомобиля, a – ускорение второго автомобиля. Тогда:

$$S = V_1 t = \frac{at^2}{2},$$

$$t = \frac{2V_1}{a} = \frac{2\cdot 15\,\frac{\text{м}}{\text{с}}}{5\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}} = 6\text{ с}$$

Скорость второго автомобиля спустя время t равна:

$$V_2 = at = 30\,\frac{\text{м}}{\text{с}} = 108\,\frac{\text{км}}{\text{ч}}$$

Критерии оценивания

- Указано, что перемещения автомобилей между их встречами равны **2 балла**
- Записано выражение для равенства перемещений **3 балла**
- Найдено t **1 балл**
- Записано выражение для V_2 **3 балла**
- Найдено значение V_2 **1 балл**

Максимум за задачу 10 баллов.

Задача 2

Полая металлическая сфера массой m и радиусом R всплывает со дна озера с постоянной скоростью. Груз какой массы нужно поместить внутрь сферы, чтобы она погружалась с такой же по модулю скоростью? Сила сопротивления, действующая на шар со стороны жидкости, зависит только от скорости шара относительно жидкости и направлена противоположно этой скорости. Плотность жидкости ρ, объём сферы равен $V = (4/3)\pi R^3$

Решение

При всплытии сферы с постоянной скоростью сумма сил, действующих на неё, равна нулю. Вертикально вниз действуют силы тяжести mg и сопротивления $F_{сопр}$, а вертикально вверх – сила Архимеда $F_{Арх}$. При движении вниз с той же постоянной скоростью вертикально вниз действует сила тяжести $(m + \Delta m)g$, где Δm – масса добавленного груза, а вертикально вверх – такая же сила Архимеда $F_{Арх}$, как в первом случае, и сила сопротивления $F_{сопр}$ (неизменная по модулю в силу равенства модулей скоростей сферы относительно воды в обоих случаях). Таким образом:

$$\begin{cases} F_{Арх} = mg + F_{сопр}, \\ F_{Арх} = (m + \Delta m)g - F_{сопр} \end{cases}$$

Сложив уравнения, получим

$$2F_{Арх} = 2mg + \Delta mg,$$

$$\Delta m = 2\frac{F_{Арх} - mg}{g} = 2(\rho V - m) = 2\left(\frac{4}{3}\pi R^3\rho - m\right)$$

Критерии оценивания

- Указано, что силы Архимеда в обоих случаях равны **1 балл**
- Указано, что силы сопротивления в обоих случаях равны по модулю и противоположны по направлению **2 балла**
- Записаны уравнения для сил (по **3 балла** за каждое) **6 балла**
- Получено выражение для Δm **1 балл**

Максимум за задачу 10 баллов.

Задача 3

Точечное тело бросают с поверхности Земли под некоторым углом к горизонту. Определите, при каких значениях этого угла кинетическая энергия тела в течение всего времени полёта будет больше его потенциальной энергии. Потенциальная энергия на поверхности Земли равна нулю; сопротивлением воздуха можно пренебречь.

Решение

Пусть начальная скорость тела равна V_0 , угол к горизонту, под которым бросают тело, равен α , масса тела – m.

Заметим, что максимальное значение потенциальной энергии достигается при максимальной высоте подъёма (в верхней точке траектории), а минимальное значение кинетической энергии достигается при минимальном значении скорости (также в верхней точке траектории). То есть, если в верхней точке траектории кинетическая энергия превышает потенциальную, то она превышает потенциальную и во всех других точках траектории.

Запишем это условие:

$$E_{\text{пот. max}} < E_{\text{кин. min}},$$

$$mgh_{\max} < m\frac{V_{\min}^{2}}{2},$$

$$mg \cdot \frac{g}{2}\frac{(V_0 \sin\alpha)^2}{g^2} < m\frac{(V_0 \cos\alpha)^2}{2},$$

$$\sin^2\alpha < \cos^2\alpha.$$

Учитывая, что $0° < \alpha \le 90°$, $\sin\alpha > 0, \cos\alpha \ge 0$, имеем:

$$\sin\alpha < \cos\alpha,$$

$$\text{ctg}\alpha > 1,$$

$$0° < \alpha < 45°.$$

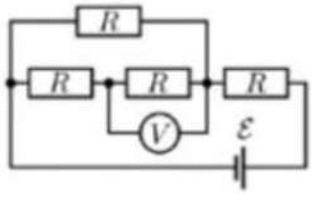
Критерии оценивания

- Указано, что максимальное значение потенциальной энергии достигается в верхней точке траектории тела **1 балл**
- Указано, что минимальное значение кинетической энергии достигается в верхней точке траектории тела **1 балл**
- Записано выражение для потенциальной энергии в верхней точке траектории **2 балла**
- Записано выражение для кинетической энергии в верхней точке траектории **2 балла**
- Получено условие для угла в неявном виде **2 балла**
- Определены все значения a , при которых выполняется требуемое условие **2 балла**

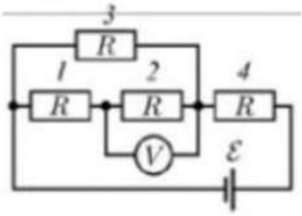
Максимум за задачу 10 баллов.

Задача 4

Идеальный вольтметр включён в цепь, схема которой изображена на рисунке. Цепь состоит из четырёх одинаковых резисторов сопротивлением R и батареи с напряжением $\varepsilon = 9$ В и нулевым внутренним сопротивлением. Найдите показания вольтметра.



Решение



Пронумеруем резисторы, как показано на рисунке. Общее сопротивление резисторов 1, 2 и 3 равно

$$R_{123} = \frac{1}{1/R + 1/(2R)} = \frac{2R}{3}$$

Полное сопротивление всей цепи

$$R_{\text{полн}} = R + R_{123} = \frac{5R}{3}$$

Сила тока, текущего через резистор 4, равна

$$I = \frac{\varepsilon}{R_{\text{полн}}} = \frac{\varepsilon}{R + R_{123}} = \frac{3\varepsilon}{5R}$$

Сопротивления участков цепи, включённых параллельно, относятся как 1:2. Следовательно, сила тока I_{12}, текущего через резисторы 1 и 2, в два раза меньше, чем сила тока, текущего через резистор 3. Поэтому сила тока I_{12} составляет 1/3 часть от силы тока I, то есть

$$I_{12} = \frac{I}{3} = \frac{\varepsilon}{5R}$$

Таким образом, вольтметр показывает напряжение

$$U_V = I_{12}R = \frac{\varepsilon}{5} = 1{,}8 \text{ В}$$

Критерии оценивания

- Найдено общее сопротивление резисторов 1, 2 и 3 **2 балла**
- Найдено полное сопротивление всей цепи **1 балл**
- Найдена сила тока I, текущего через резистор 4 **1 балл**
- Показано, что $I_{12} = I_3/2$ **2 балла**
- Найдена сила тока I_{12}, текущего через резистор 2 **3 балла**
- Найдены показания вольтметра **1 балл**

Максимум за задачу 10 баллов.

Задача 5

В частных домах иногда используют проточный водонагреватель, в случае если к дому не подведены трубы с горячей водой. Температура холодной воды, идущей из крана, равна 14 °С, а температура текущей из душа воды (которая «прошла» через нагреватель), равна 40 °С. Определите объёмный расход воды в душе (в литрах в минуту), если потребляемая мощность водонагревателя 5 кВт, а его КПД равен 80%. Удельная теплоёмкость воды 4200 (Дж)/кг ×°С, плотность воды 1000 кг/м^3. При работе проточного водонагревателя вся втёкшая в него холодная вода подогревается и сразу же вытекает наружу.

Решение

Введём обозначения: q – искомый объёмный расход воды, τ – время использования душа, ρ – плотность воды, c – удельная теплоемкость воды, t_1 t_2, – температуры воды до и после нагревания соответственно, η – КПД бойлера, N – мощность нагревателя. Запишем уравнение теплового баланса:

$$Q_{\text{нагревателя}} = Q_{\text{воды}},$$

$$\eta N\tau = \rho c q \tau (t_2 - t_1).$$

Отсюда

$$q = \frac{\eta N}{\rho c (t_2 - t_1)} = \frac{0{,}8 \cdot 5000\ \text{Вт}}{1000\ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \cdot 4200\ \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot {}^\circ\text{C}} \cdot 26\ {}^\circ\text{C}} \approx 3{,}66 \cdot 10^{-5}\ \frac{\text{м}^3}{\text{с}} \approx 2{,}2\ \frac{\text{л}}{\text{мин}}$$

Критерии оценивания

- Записано уравнение теплового баланса **4 балла**
- Получено выражение для объёмного расхода **4 балла**
- Правильно вычислено значение объёмного расхода в л/мин **2 балла**

11 класс

Задача 1.

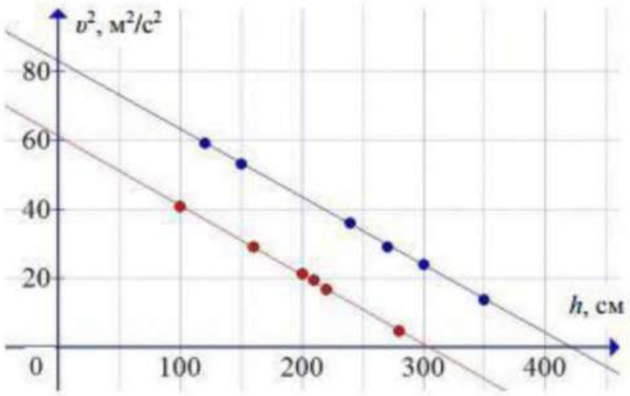
Перепутанные шарики. В баллистической лаборатории исследовались зависимости значений скорости υ шарика, выпущенного вверх из небольшой катапульты, стоящей на столе, от высоты h его подъема над уровнем стола. К сожалению, в спешке в таблицу с результатами измерений попали данные для двух разных шариков. Определите, какие данные относятся к одному, а какие к другому шарику. Для этого постройте график с результатами измерений в таких координатах, в которых он должен быть линейным. Рассчитайте, во сколько раз отличаются максимальные высоты подъема шариков над столом. Определите времена полета шариков? Ускорение свободного падения g = 9,8 м/с^2

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
h, см	220	240	350	150	280	160	270	120	300	210	100	200
υ, м/с	4,1	6,0	3,7	7,3	2,2	5,4	5,5	7,7	4,9	4,4	6,4	4,6

Решение

Из закона сохранения энергии $\frac{m\upsilon_0^2}{2} = \frac{m\upsilon^2}{2} + mgh$ получаем: $\upsilon^2 = \upsilon_0^2 - 2gh$, где υ_0 – скорость на уровне стола. Следовательно, зависимость скорости от высоты будет линейной, например, в осях $\upsilon^2(h)$.

Нанесем экспериментальные точки на поле графика с осями υ^2 и h.



Все точки хорошо разделяются, ложась на две прямые. Таким образом, одному шарику принадлежат точки:

№	1	2	3	4	5	6
h, см	120	150	240	270	300	350
υ, м/с	7,7	7,3	6,0	5,5	4,9	3,7

а другому

№	1	2	3	4	5	6
h, см	100	160	200	210	220	280
υ, м/с	6,4	5,4	4,6	4,4	4,1	2,2

Прямые пересекают ось h в точках 310 см и 425 см. Это максимальные высоты подъема шариков. Время полета шарика может быть найдено, как удвоенное время падения без начальной скорости с максимальной высоты

$t = 2\sqrt{2h/g}$. Для одного шарика t_1 = 1,6 с, а для другого t_2 = 1,9 с

Критерии оценивания

1. Теоретическое обоснование линейности зависимости υ^2 от h **2 балла**

2. График **3 балла**

• подписаны величины и единицы измерения на осях **1 балл**

• оцифрованы деления через равные интервалы **1 балл**

• верно нанесенные точки, соединенные гладкими линиями (не ломаными) **1 балл**

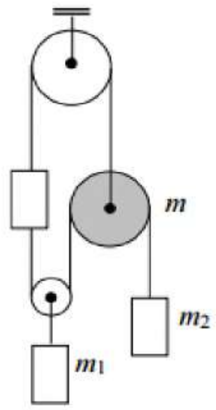
3. Определены максимальные высоты подъема (±5%) **2 балла**

4. Выражение для определения времени падения **1 балл**

5. Найдены времена полета (±5%) **2 балла**

Задача 2

Система состоит из нескольких грузов, подвешенных на невесомых нитях, перекинутых через невесомые и один массивный (выделен серым цветом) блоки. Масса m = 1,0 кг. Определите, при каких значениях масс m_1 и m_2 система будет находиться в равновесии. Трения в осях блоков нет.



Решение

Обозначим силу натяжения верхней нити за T_1, а нижней за T_2. Тогда условия равенства нулю суммы вертикальных сил, действующих на элементы системы, примут вид

1) для груза m_2: $m_2 g = T_2$
2) для блока m: $mg = T_1 - 2T_2$
3) для груза m_1: $m_1 g = 2T_2$
4) для груза 2m: $2mg = T_1 - T_2$

Решая систему уравнений, получим: $m_1 = 2m = 2$ кг, $m_2 = m = 1$ кг.

Критерии оценивания

1. Условие равновесия груза m_2 **2 балла**
2. Условие равновесия блока m **2 балла**
3. Условие равновесия груза m_1 **2 балла**
4. Условие равновесия груза 2m **2 балла**
5. Решение системы уравнений и получение численного ответа **2 балла**

Задача 3

Идеальный двухатомный газ, находящийся в герметичном сосуде объемом V_0, нагревают от температуры T_0 до температуры $2T_0$, в результате чего он полностью диссоциирует на атомы. При этом степень диссоциации газа (доля распавшихся молекул) в указанном диапазоне прямо пропорциональна его температуре. Изобразите этот процесс в осях p-V, V-T и ν-p, где p, V, T и ν – давление, объем, температура и количество вещества, соответственно.

Решение

Дважды записав уравнение состояния для начального и конечного состояния: $p_0 V_0 = \nu_0 R T_0$ и $p_к V_0 = 2\nu_0 R 2T_0$, получим $p_к = 4p_0$. С учетом того, объем сосуда не изменяется

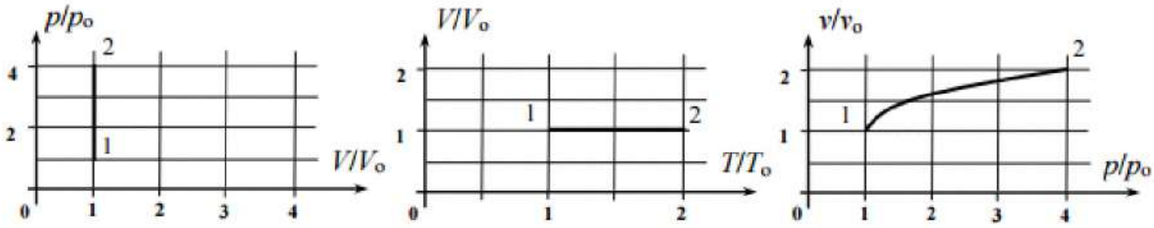
$$\frac{p}{p_0} = \frac{\nu T}{\nu_0 T_0},$$

$$\nu = \nu_0 \frac{T}{T_0},$$

Так, как по условию
то для произвольной температуры

$p = p_0 \frac{v^2}{v_0^2}$, откуда $v = v_0 \sqrt{\frac{p}{p_0}}$.

Искомые зависимости имеют вид:



Критерии оценивания

1. Записано уравнение для начального состояния идеального газа **1 балл**
2. Записано уравнение для конечного состояния идеального газа **1 балл**
3. Найдено конечное давление **1 балл**
4. Построен график на осях p-V **1 балл**
5. Построен график на осях V-T **1 балл**
6. Получена зависимость ν(p) **3 балла**
7. Построен график на осях ν-p **2 балла**

Задача 4

Кубики в магнитном поле. Проволочный каркас в форме куба помещен в однородное магнитное поле, модуль индукции которого изменяется со временем по закону $B_0 = kt$, где $k > 0$. Сопротивления каждого из ребер равно R. Длина ребра a. Определите направление и величину силы тока, протекающего через каждое из ребер. Рассмотрите случай, когда вектор индукции магнитного поля: а) параллелен ребру AE (рис. 1); б) параллелен малой диагонали AC (рис. 2).

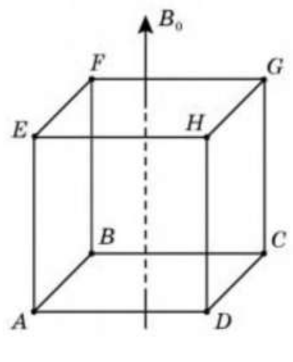


Рис. 1

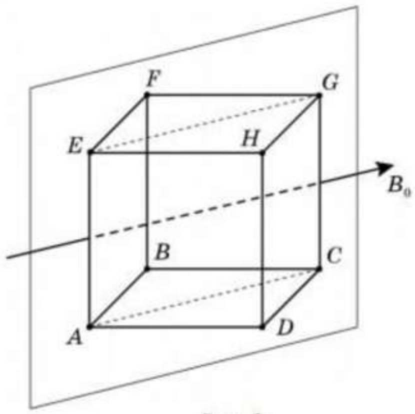


Рис. 2

Решение

а) ЭДС индукции, возникающая в контурах ABCD и EFGH, $\varepsilon_i = ka^2$. По ребрам AE, BF, CG и DH ток не идет. Сила тока в остальных ребрах одинакова и равна

$I = \frac{\varepsilon_i}{4R} = \frac{ka^2}{4R}$.

Направления токов показаны на рис.

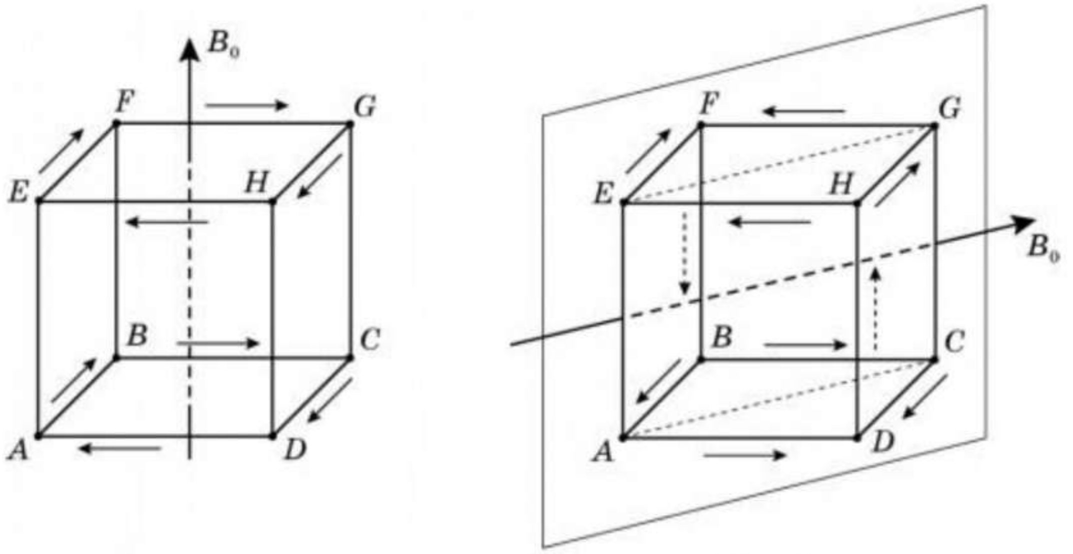


Рис. 1 Рис. 2

б)

1. Представим поле $\vec{B}$ как суперпозицию двух полей: $\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$, где $\vec{B}_1$ – параллельно ребру *AB*, а $\vec{B}_2$ – параллельно ребру *AD*. Модули векторов магнитной индукции $B_1 = B_2 = B/\sqrt{2}$.
2. Расчёт токов, создаваемых полями $\vec{B}_1$ и $\vec{B}_2$ аналогичен случаю а).
3. Сила тока в каждом из ребер определяется наложением получившихся картин.
4. В итоге, ток через ребра *AE* и *CG* не течет. Сила тока в ребрах *AB*, *AD*, *EH*, *EF*, *DC*, *CB*, *FG*, *GH* равна $I = \frac{ka^2}{4\sqrt{2}R}$. Сила тока в ребрах *BF* и *HD* равна $2I = \frac{\sqrt{2}ka^2}{4R}$.

Критерии оценивания

Решение п. а)

1. Найдена ЭДС индукции, возникающая в контурах ABCD и EFGH, $\varepsilon_i = ka^2$ **1 балл**

2. Указано, что по ребрам AE, BF, CG и DH ток не идет **1 балл**

3. Найдена сила тока в остальных ребрах : $I = \frac{\varepsilon_i}{4R} = \frac{ka^2}{4R}$. **1 балл**

4. Правильно определены направления токов **1 балл**

Решение п. б)

5. Указано, что ток через ребра AE и CG не течет **1 балл**

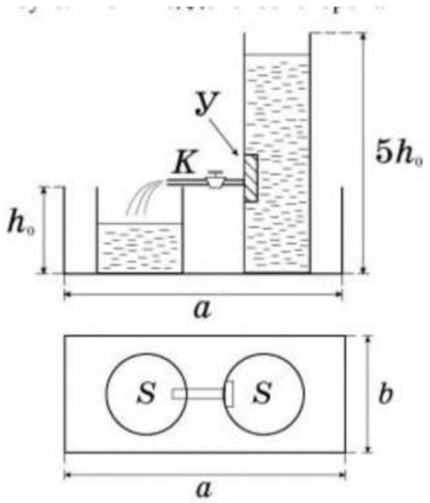
6. Найдена сила тока в ребрах AB, AD, EH, EF, DC, CB, FG, GH: **2 балла**

7. Найдено, что сила тока в ребрах BF и HD равна *2I* **1 балл**

8. Правильно определены направления токов **2 балла**

Задача 5

В прямоугольном поддоне со сторонами a = 30 см, b =20 см и высотой бортика h_0 = 10 см стоят цилиндрические сосуды с площадью основания S = 100 см^2 каждый (рис. 1). Высота первого сосуда h_0, а второго $5h_0$. Дно поддона шероховатое. В высокий сосуд через отверстие в стенке вставлена тонкая трубка с краном К, второй конец которой лежит на стенке низкого сосуда (рис. 1). В этом положении трубка горизонтальна. Первоначально в низком сосуде и поддоне воды нет, а уровень воды в высоком сосуде равен $5h_0$. В момент времени t= 0 кран К открывают. Благодаря наличию устройства У, уровень воды в высоком сосуде понижается с постоянной скоростью υ = 1,0 мм/с. Постройте график зависимости отношения давлений α = p_2/p_1 от времени после открывания крана, (p_1 – давление низкого сосуда, а p_2 – давление высокого сосуда на дно поддона). Отметьте на осях графика значения величин α и t в характерных точках – излома, максимума или минимума



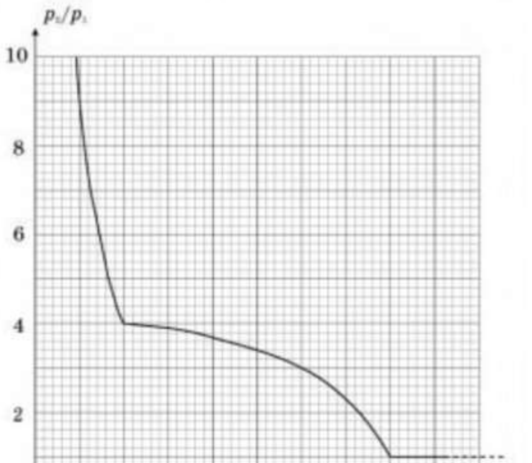
Решение

Так как площади сечения сосудов одинаковы, уровень воды h_1 в низком сосуде повышается с той же скоростью, с какой понижается уровень воды h_2 в высоком сосуде. $h_1 = \upsilon t$; $h_2 = 5h_0 - \upsilon t$.

Заполнение низкого сосуда происходит в течение времени

$$t_1 = h_0/\upsilon = 100 \text{ с} \qquad (1)$$

после открытия крана и давление, оказываемое низким сосудом на дно поддона, равномерно возрастает $P_1(t) = \rho g h_1 = \rho g \upsilon t$. В то же время давление, оказываемое высоким сосудом на дно поддона, равномерно убывает $P_2(t) = \rho g(5h_0 - \upsilon t)$. В интервале времени $0 < t < 100$ с отношение давлений $\alpha(t) = P_2(t)/P_1(t) = (5h_0/\upsilon t) - 1$, т.е. уменьшается по гиперболическому закону от бесконечности при $t = 0$ до $\alpha = 4$ при $t = t_1 = 100$ с.



До этого момента решение задачи не отличается от решения задачи для 10 класса.

В интервале времени $100 < t < 400$ с вода выливается в поддон, подтекает под сосуды и на них действует возрастающая со временем сила Архимеда $F_A = \rho gV = \rho gSZ$, где Z – уровень воды в сосуде. Зависимость Z от времени для $t > t_1$ находится из условия равенства объема вылившейся из высокого сосуда воды $V = \upsilon(t - t_1)S$ и объема воды, заполняющей поддон. Площадь поверхности воды в поддоне равна площади дна поддона минус две площади сечения сосудов, следовательно, объем воды в поддоне $V = Z(ab - 2S)$.

Приравнивая объемы, получаем

$$Z = (\upsilon(t - t_1)S)/(ab - 2S) \qquad (2)$$

Давление низкого сосуда на дно поддона определяется выражением

$$P_1(t) = \rho gh_0 - F_A/S = \rho g(h_0 - Z) \qquad (3)$$

Давление высокого сосуда определяется выражением

$$P_2(t) = \rho g(5h_0 - \upsilon t) - F_A/S = \rho g(5h_0 - \upsilon t) - \rho gZ \qquad (4)$$

Подставляя в (1) – (4) численные значения известных величин, получаем выражение для зависимости отношения давлений от времени (в интервале $100 < t < 400$ с) в виде:

$$\alpha(t) = P_2/P_1 = (2100 - 5t)/(500 - t) \qquad (5)$$

Подставляя в (5) $t = 100$ с, получаем $\alpha = 4$, а при $t = 400$ с $\alpha = 1$, что соответствует здравому смыслу и результатам решения задач для 8, 9 и 10 классов.

График зависимости $\alpha(t)$ представлен на рисунке.

Критерии оценивания

1.	Определено время t_1 заполнения низкого сосуда	0,5 балла
2.	Определена зависимость $P_1(t)$ от времени при $t < 100$ с	0,5 балла
3.	Определена зависимость $P_2(t)$ от времени при $t < 100$ с	0,5 балла
4.	Определена зависимость $\alpha(t)$ от времени при $t < 100$ с	1 балл
5.	Определено время t_2 прекращения переливания воды	0,5 балла
6.	Определена зависимость $P_1(t)$ от времени при $100 < t < 400$ с	1 балл
7.	Определена зависимость $P_2(t)$ от времени при $100 < t < 400$ с	1 балл
8.	Определена зависимость $\alpha(t)$ от времени при $100 < t < 400$ с	2 балла
9.	Представлен правильный график зависимости $P(t)$	3 балла

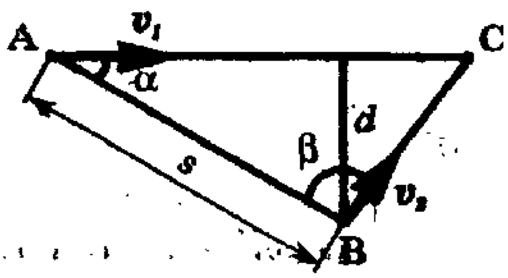
(Наличие на графике трех участков качественно правильной формы (всех трех) 2 балла, верно указаны координаты двух характерных точек (четыре значения) 1 балл).

§ 3.Задачи для самостоятельной работы

Задача 1

По прямому шоссе со скоростью $\upsilon_1 = 16$ м/с движется автобус. На расстоянии $d = 60$ м от шоссе и $s = 400$ м от автобуса находится человек. Человек может бежать со скоростью $\upsilon_2 = 4$ м/с. В каком направлении он должен бежать, чтобы успеть «перехватить» автобус, который к нему приближается? При какой наименьшей скорости человека υ_{2min} это вообще возможно? В каком направлении следует при этом бежать?

Решение 1. Пусть автобус находится в точке A, человек — в точке B. Определим, под каким углом β к линии AB может бежать человек (он должен попасть в точку C одновременно с автобусом или раньше его); время движения автобуса $t_1 = \frac{AC}{\upsilon_1}$, время движения человека $t_2 = \frac{BC}{\upsilon_2} < t_1$. Отсюда $\frac{AC}{BC} > \frac{\upsilon_1}{\upsilon_2}$. Применяя теорему синусов к треугольнику ABC $\left(\frac{AC}{BC} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\right)$, и учитывая, что $\sin\alpha = \frac{d}{s}$, получаем: $\sin\beta > \frac{\upsilon_1 d}{\upsilon_2 s}$. Тогда



$$\arcsin\left(\frac{\upsilon_1 d}{\upsilon_2 s}\right) < \beta < 180^\circ - \arcsin\left(\frac{\upsilon_1 d}{\upsilon_2 s}\right);\ 37^\circ \leqslant \beta \leqslant 143^\circ.$$

Хотелось бы обратить внимание на то, что в этой задаче самым трудным является удачный выбор неизвестной величины β.

Поскольку $\sin\beta > \frac{\upsilon_1 d}{\upsilon_2 s}$, условием разрешимости задачи является $\frac{\upsilon_1 d}{\upsilon_2 s} < 1$ или $\upsilon_2 > \frac{\upsilon_1 d}{s}$. Значит, $\upsilon_{2min} = \frac{\upsilon_1 d}{s} = 2{,}4$ м/с. При такой скорости $\sin\beta = 1$, $\beta = 90^\circ$ — т. е. бежать следует под прямым углом к направлению на автобус (а не к дороге!).

Решение 2. Решение задачи становится проще и нагляднее, если перейти в систему отсчета, связанную с автобусом. В этой системе отсчета скорость человека $V = v_2 - v_1$. *Величина* скорости v роли не играет, а ее *направление* должно быть таким, чтобы человек пересек шоссе *правее* «стоящего» автобуса или вышел точно на автобус (см. рис. *а*). Конец вектора V лежит на окружности радиуса v_2 (см. рис. *б*). Очевидно, угол β между отрезком AB и направлением v_2 должен лежать в пределах $\beta_1 < \beta < \beta_2$, где β_1 и β_2 — два решения уравнения $\sin\beta = \sin\alpha \cdot \frac{v_1}{v_2}$, удовлетворяющие условию $0 < \beta < \pi$.

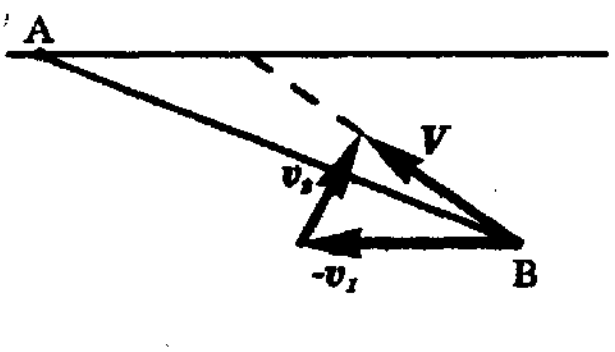


Рис. а

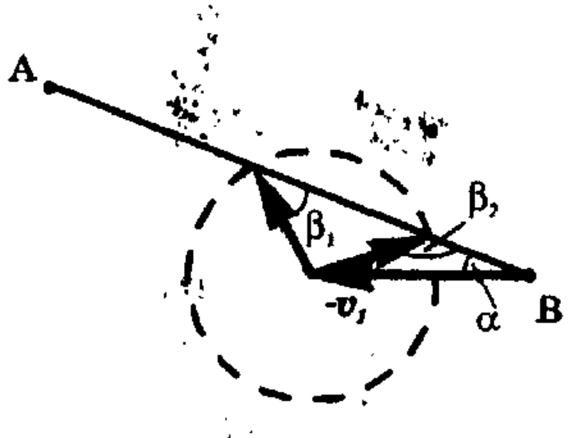


Рис. б

Ответ: $37° < \beta < 143°$ (см. рисунок); $v_{2\,min} = \frac{v_1 d}{s} = 2{,}4$ м/с.

Задача 2

Два автомобиля движутся друг за другом по дороге с одинаковой скоростью $v = 72$ км/ч. При каком минимальном расстоянии l между ними камешек, застрявший между сдвоенными шинами переднего грузового автомобиля, не может попасть на задний автомобиль?

Решение. Эту задачу удобнее всего решать в системе отсчёта, связанной с движущимися автомобилями. Тогда можно считать, что сами автомобили неподвижны, а колёса вращаются равномерно. Скорость наиболее удалённых точек от оси колеса v. Такую же начальную скорость имеет в момент отрыва и камешек. Наибольшее расстояние он пролетит, если его начальная скорость образует с горизонтальной плоскостью угол 45° (доказать). Это расстояние составит

$$\frac{v^2 \sin 2\alpha}{g} = \frac{v^2}{g}. \text{ Итак, } l = \frac{v^2}{g}.$$

При скорости движения v = 72 км/ч =20 м/с получаем = 41м.

Задача 3

Угол α наклонной плоскости с горизонталью постепенно увеличивается от 0 до 90°. На плоскости находится ящик массы m. Коэффициент трения равен μ. Постройте график зависимости силы трения $F_{тр}$ от угла α. Чему равно максимальное значение силы трения F_{max}?

Решение. Следует иметь в виду, что при малых углах α ящик будет неподвижен, а при больших станет соскальзывать. В первом случае действует сила трения покоя, во втором — сила трения скольжения. Запишем второй закон Ньютона (см. рис. *а*):

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{тр}.$$

В проекциях на выбранные оси координат:

$$\boxed{x} \qquad ma = mg\sin\alpha - F_{тр},$$
$$\boxed{y} \qquad 0 = N - mg\cos\alpha.$$

Пока тело неподвижно, $a = 0$, $F_{тр} = mg\sin\alpha$. Этот случай реализуется, если $\frac{F_{тр}}{N} \leqslant \mu$, т. е. $\mathrm{tg}\alpha \leqslant \mu$ (при $\mathrm{tg}\alpha = \mu$ возможно

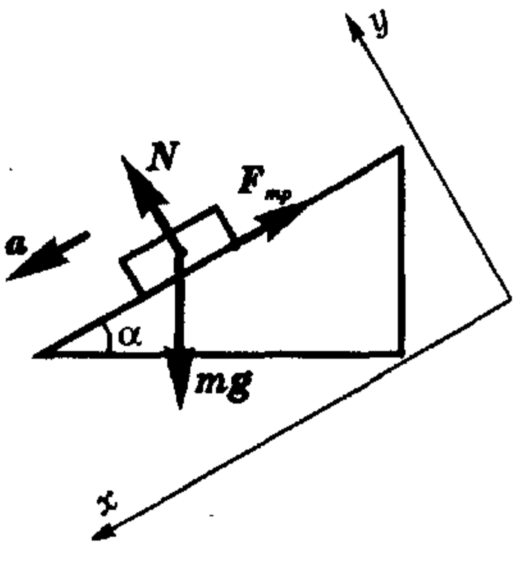


Рис. а

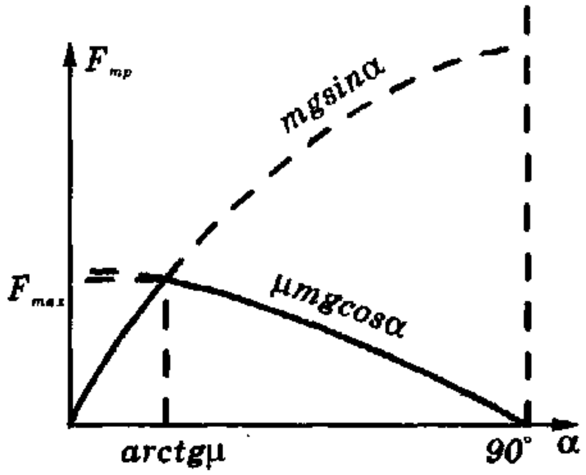


Рис. б

движение с постоянной скоростью, т. к. $a = 0$). При $\mathrm{tg}\alpha > \mu$ сила трения скольжения задается формулой $F_{тр} = \mu N = \mu mg\cos\alpha$ (при этом $a = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) > 0$).

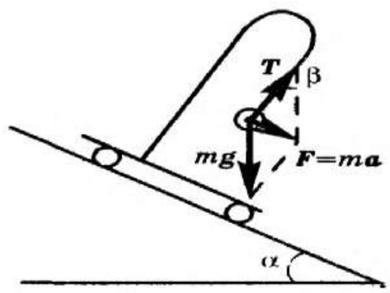
Таким образом, $F_{тр} = mg\sin\alpha$ при $\alpha \leqslant \mathrm{arctg}\mu$ и $F_{тр} = \mu mg\cos\alpha$ при $\alpha > \mathrm{arctg}\mu$.

Заметим, что при $\alpha = \mathrm{arctg}\mu$ оба выражения для $F_{тр}$ дают одно и то же значение: функция $F_{тр}(\alpha)$ получилась непрерывной. График ее приведен на рис. *б*. Из соотношения $\sin\alpha = \dfrac{\mathrm{tg}\alpha}{\sqrt{1 + \mathrm{tg}^2\alpha}}$ следует, что максимальное значение силы трения $F_{max} = \dfrac{\mu mg}{\sqrt{1 + \mu^2}}$.

Задача4

По наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтом, съезжает без трения тележка, на которой установлен штатив. К штативу подвешен на нити шарик массой m. Найти угол β отклонения нити от вертикали и силу T натяжения нити.

Решение. На шарик действуют две силы: сила тяжести и сила T натяжения нити (см. рисунок). Их равнодействующая F сообщает шарику такое же ускорение a, какое имеет тележка, т. е. $F = ma$. Заметим теперь, что тележка движется по наклонной плоскости без трения с ускорением, равным по величине $g\sin\alpha$. Значит, $ma = mg\sin\alpha$; это как раз проекция силы тяжести mg на направление движения тележки. Следовательно, проекция силы T на это же направление равна нулю, т. е. T направлена перпендикулярно наклонной плоскости. Поскольку сила T направлена вдоль нити, получаем, что нить перпендикулярна наклонной плоскости, т. е. $\beta = \alpha$. Отсюда $T = mg\cos\alpha$.



Ответ: $\beta = \alpha$; $T = mg\cos\alpha$.

Задача 5

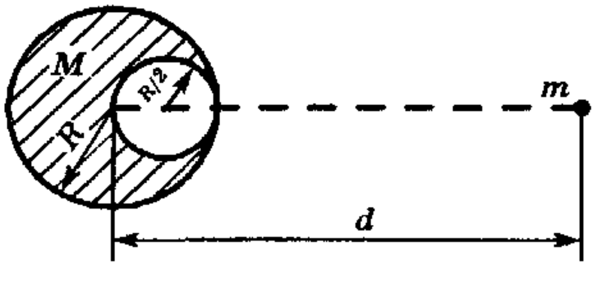
На диск проигрывателя на расстоянии r от оси положили монету массой m. Диск вращается с частотой n. Коэффициент трения между монетой и диском μ. Найдите зависимость силы трения, действующей на монету, от расстояния r.

Решение. Прежде всего надо выяснить, будет ли монета покоиться относительно диска или будет скользить по нему. В первом случае сила трения — это сила трения покоя, она сообщает монете центростремительное ускорение $a = 4\pi^2rn^2$ и равна по величине $ma = 4\pi^2mrn^2$. Для силы трения покоя должно выполняться условие $F_{тр} \leqslant \mu N$. В данном случае сила нормального давления N равна mg, поэтому получаем неравенство $4\pi^2mrn^2 \leqslant \mu mg$, откуда $r \leqslant \frac{\mu g}{4\pi^2n^2}$. При выполнении этого неравенства монета будет покоиться относительно диска и $F_{тр} = 4\pi^2mrn^2$ (трение покоя). Если указанное неравенство не выполняется, т. е. $r > \frac{\mu g}{4\pi^2n^2}$, монета будет скользить по диску; при этом $F_{тр} = \mu mg$. Таким образом, $F_{тр} = 4\pi^2mrn^2$ при $r \leqslant \frac{\mu g}{4\pi^2n^2}$ (трение покоя), $F_{тр} = \mu mg$ при $r > \frac{\mu g}{4\pi^2n^2}$ (трение скольжения).

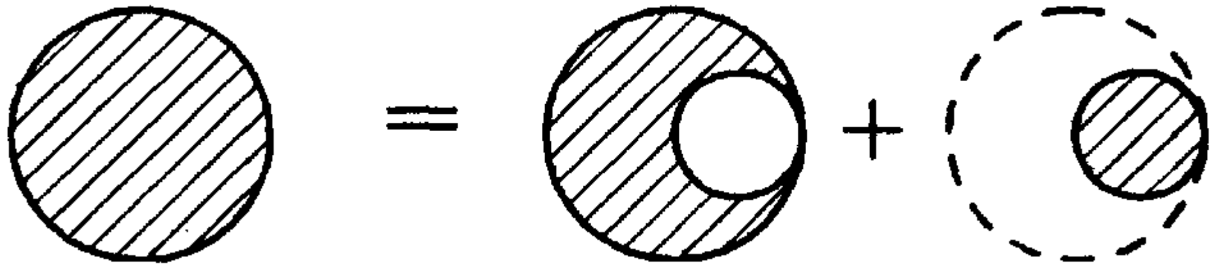
Ответ: $F_{тр} = 4\pi^2mrn^2$ при $r \leqslant \frac{\mu g}{4\pi^2n^2}$, $F_{тр} = \mu mg$ при $r > \frac{\mu g}{4\pi^2n^2}$.

Задача 6

Найдите силу F притяжения маленького шарика массой m и большого однородного шара массой M, в котором имеется сферическая полость (см. рисунок).



Решение. Закон всемирного тяготения можно применить для



вычисления силы притяжения между материальной точкой и сферически симметричным телом, считая его также материальной точкой, расположенной в центре тела. Попробуем именно к этому случаю и свести нашу задачу. Выясним, на сколько увеличится сила притяжения, если заполнить полость в большом шаре (сделать шар сплошным и однородным). Поскольку объем шара пропорционален кубу его радиуса, объем полости составляет 1/8 всего объема шара. Значит, для заполнения полости потребуется шар массы $\frac{M}{7}$, центр которого расположен на расстоянии $d - \frac{R}{2}$ от шарика массы m. Сила притяжения в результате увеличится на $F_1 = G\frac{Mm}{7\left(d - \frac{R}{2}\right)^2}$.

После заполнения полости притяжение, однако, снова описывается формулой закона всемирного тяготения для материальных точек! Следует только учесть, что масса большого шара равна $\frac{8M}{7}$. Итак, $F + F_1 = G\frac{8Mm}{7d^2}$.

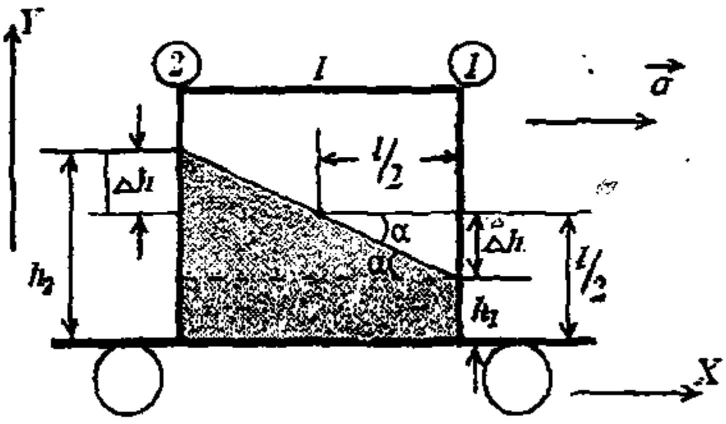
Отсюда

$$F = G\frac{Mm}{7}\left(\frac{8}{d^2} - \frac{1}{\left(d - \frac{R}{2}\right)^2}\right).$$

Механика жидкостей

Задача 7

На горизонтальной платформе установлена открытая цистерна в форме куба с длиной ребра наполовину заполненная жидкостью плотностью ρ. Платформа начинает двигаться с ускорением. Определите угол наклона жидкости к горизонту, давление жидкости в точках,



расположенных в углах цистерны, среднюю силу давления, действующую на дно и стенки сосуда, перпендикулярные направлению движения, в тот момент времени, когда платформа и жидкость в цистерне движутся как одно целое с ускорением $\boldsymbol{a}$.

Решение: а) Определим форму свободной поверхности жидкости следующим образом. Сначала рассмотрим вертикальный столб жидкости $AB = y$. Запишем для этого столба закон Ньютона, в проекции на ось OY: $p_в S - p_o S - m_1 g = 0$ (1), где $m_1 = \rho S y$ (2) - масса столба жидкости высотой y, p_0 - атмосферное давление, $p_в$ – давление жидкости в точке B.

Далее рассмотрим горизонтальный столб жидкости $OB = x$ и запишем основное уравнение динамики в проекции на ось OX:

$$-p_0 S + p_B S = m_2 a \quad (3),$$

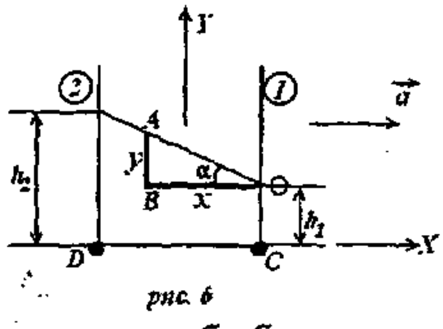
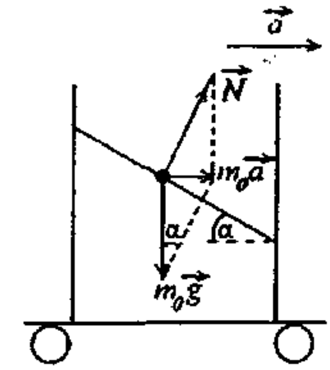


рис. 6

где $m_2 = \rho x S$ (4) – масса столба жидкости длиной x, p_0 – атмосферное давление на столб вблизи точки 0, p_B – давление жидкости в точке B. Вычтем почленно из (1) выражение (3) и с учетом (2) и (4) получим:

$$\rho Syg = \rho Sax \Rightarrow y = x\frac{a}{g} \quad (5).$$

Из выражения (5) следует, что поверхность жидкости – плоскость, направленная под углом α к горизонту. Из рис. б находим угол наклона поверхности жидкости к горизонту



$$tg\alpha = \frac{y}{x} = \frac{a}{g} \quad (6) \quad \Rightarrow \alpha = arctg\frac{a}{g}.$$

б) Рассмотрим второй способ нахождения угла α. На частицу жидкости массой m_0 действуют сила тяжести $m_0\vec{g}$, сила реакции соседних частиц жидкости $\vec{N}$. Сосуд с жидкостью движется как одно целое с ускорением $\vec{a}$. Из рисунка видно, что

$$tg\alpha = \frac{m_0 a}{m_0 g} = \frac{a}{g} \Rightarrow \alpha = arctg\frac{a}{g}.$$

2. При движении сосуда с жидкостью ее общее количество остается постоянным. В середине цистерны уровень жидкости не изменяется, а у передней стенки уровень понижается на $\Delta h = \frac{l}{2}tg\alpha$, у задней стенки – повышается на $\Delta h = \frac{l}{2}tg\alpha$. Тогда давление у основания передней стенки в точке C равно

$$p_C = \rho g h_1 = \rho g\left(\frac{l}{2} - \frac{l}{2}tg\alpha\right) =$$

$$= \frac{\rho g l}{2}(1 - tg\alpha) \text{ или с учетом (6) } p_C = \frac{\rho g l}{2}\left(1 - \frac{a}{g}\right) \Rightarrow \frac{\rho l}{2}(g - a) \quad (7).$$

Аналогично определится давление у основания задней стенки в точке D:

$$p_D = \frac{\rho g l}{2}\left(1 + \frac{a}{g}\right) = \frac{\rho l}{2}(g + a) \quad (8).$$

3. Средняя сила давления жидкости на дно цистерны:

$F_{дн} = p_{ср}S_{дн} = \frac{p_C + p_D}{2}l^2$. С учетом (7) и (8) $F_{дн} = \frac{\rho g l^3}{2}$.

Средняя сила давления на боковую стенку определяется по формуле $F_{ст} = p_{ср}S_{ст}$, где $p_{ср}$ - среднее давление столба жидкости высотой h, равное $p_{ср} = \dfrac{\rho g h}{2}$; $S_{ст} = l^2$ = площадь стенки. Тогда средняя сила давления жидкости на переднюю стенку цистерны:

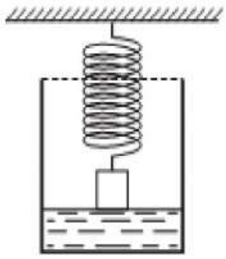
$$F_{СТ_1} = \frac{p_C}{2} \cdot l^2 = \frac{\rho g h_1 l^2}{2} = \frac{\rho l^3}{4}(g - a),$$

на заднюю стенку: $$F_{ст_2} = \frac{\rho l^3}{4}(g + a).$$

Ответ: $\alpha = arctg\dfrac{a}{g}$; $p_{C,D} = \dfrac{\rho l}{2}(g \mp a)$;

$$F_{дн} = \frac{\rho g l^3}{2};\; F_{ст} = \frac{\rho l^3}{4}(g \mp a).$$

Задача 8



Железный кубик со стороной a подвешен на пружине жёсткостью k. В начальный момент кубик касается нижней горизонтальной гранью поверхности воды в сосуде. В сосуд начинают медленно доливать воду так, что её уровень поднимается со скоростью υ_1. С какой скоростью υ_2 относительно сосуда будет при этом двигаться кубик? Плотность воды равна ρ, ускорение свободного падения равно g.

Решение. При медленном повышении уровня воды в сосуде можно считать, что в любой момент времени кубик находится в равновесии. Учитывая, что на кубик действуют силы тяжести, упругости и Архимеда, запишем условие равновесия кубика: $F_{упр} + F_A = mg.$

За время Δt пружина станет короче на $\upsilon_2\Delta t$, а объём погруженной в воду части кубика увеличится на $\Delta V = (\upsilon_1 - \upsilon_2)\cdot\Delta t\, a^2$. Поэтому сила упругости изменится на $\Delta F_{упр} = -k\upsilon_2\Delta t$, а сила Архимеда - на $\Delta F = (\upsilon_1 - \upsilon_2)\Delta t a^2\rho g$

Учитывая, что, $\Delta F_{упр} + \Delta F_A = 0$
получим после преобразований $\upsilon \;{}_2 = \upsilon \cdot \dfrac{\rho}{1 \quad \rho}$

С такой скоростью кубик будет «всплывать», пока он целиком не окажется под водой, то есть при t $\dfrac{}{\upsilon} \quad \dfrac{}{\upsilon\square\upsilon} \quad \dfrac{\rho}{}$

При дальнейшем заполнении сосуда водой скорость кубика будет равна нулю.

Задача 9

Бассейн, имеющий площадь $S = 100$ м^2, разделен пополам подвижной вертикальной перегородкой и заполнен водой до уровня $h = 2$ м. Перегородку медленно передвигают так, что она делит бассейн в отношении 1 : 3. Какую работу A пришлось совершить? Вода не проникала через перегородку и не переливалась через край бассейна.

Решение. На рис. *а* показано начальное положение воды в бассейне, на рис. *б* — конечное. Конечные высоты уровня воды в половинках бассейна определены из условия неизменности объема

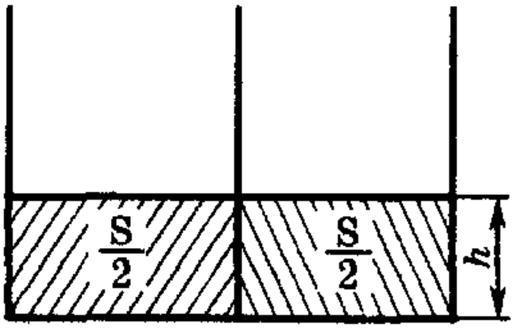


Рис. а

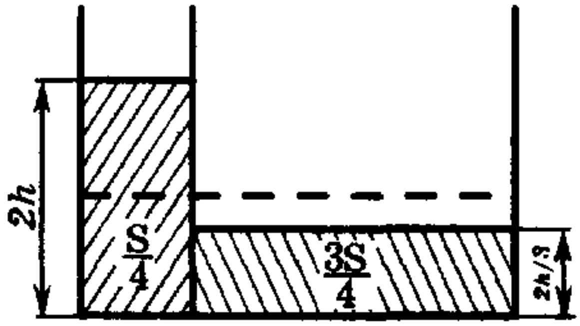


Рис. б

воды в каждой половине $\left(\frac{Sh}{2}\right)$. Поскольку перемещение перегородки было медленным, вода не приобретала при этом кинетической энергии. Значит, совершаемая работа A идет на увеличение потенциальной энергии системы. Для каждой «половины» бассейна эта энергия равна mgH, где m — масса воды в одной половине бассейна $\left(m = \rho\frac{Sh}{2}\right)$, H — высота центра тяжести, равная половине высоты уровня воды. Итак, до передвижения перегородки:

$$W_{p1} = 2mg\frac{h}{2} = mgh.$$

После передвижения:

$$W_{p2} = mg\frac{2h}{2} + mg\frac{\frac{2}{3}h}{2} = \frac{4}{3}mgh.$$

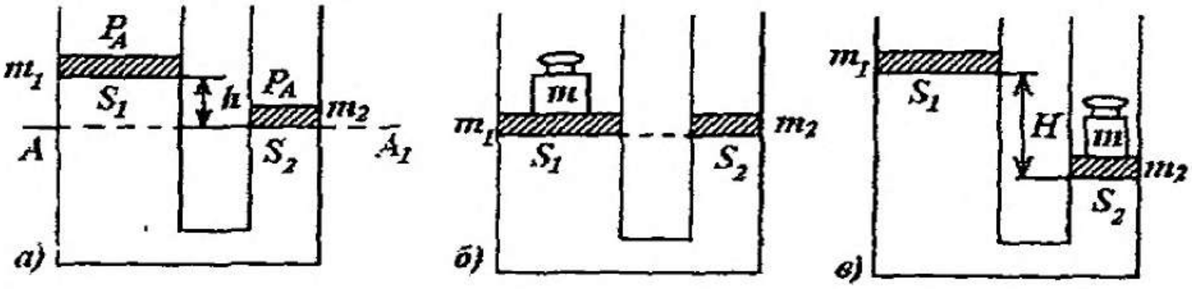
Следовательно, $A = \Delta W_p = W_{p2} - W_{p1} = \frac{mgh}{3} = \frac{\rho g S h^2}{6} = 650$ кДж.

Ответ: А = 650 кДж

Задача 10

Сообщающиеся цилиндрические сосуды заполнены водой и закрыты поршнями массами m_1 = **1** кг и m_2 = **2** кг с различными сечениями ($S_1 > S_2$). В положении равновесия первый поршень расположен выше второго на величину h = 10 см. Если на первый поршень положить гирю массой m = **2** кг, то оба поршня оказываются на одной высоте. Как расположатся поршни, если гирю переложить на второй поршень?

Решение: Воспользуемся условием равновесия поршней для трёх случаев, представленных на рис. а, б и в (атмосферное давление сразу ис-



ключаем):

а) $\dfrac{m_1 g}{S_1} + \rho g h = \dfrac{m_2 g}{S_2}$ (1);

б) $\dfrac{(m_1 + m) g}{S_1} = \dfrac{m_2 g}{S_2}$ (2);

в) $\dfrac{m_1 g}{S_1} + \rho g H = \dfrac{(m_2 + m) g}{S_2}$ (3),

где S_1 и S_2 – площадь поршней; ρ - плотность жидкости под поршнями; ρgh и ρgH - гидростатические давления столбов жидкостей при равновесии поршней.

Из равенства (1) $\rho g h = \dfrac{m_2 g}{S_2} - \dfrac{m_1 g}{S_1}$ (4);

из равенства (3) $\rho g H = \dfrac{(m_2 + m) g}{S_2} - \dfrac{m_1 g}{S_1}$ (5).

Поделим (5) на (4) почленно, получим

$$\frac{H}{h} = \frac{\dfrac{m_2 + m}{S_2} - \dfrac{m_1}{S_1}}{\dfrac{m_2}{S_2} - \dfrac{m_1}{S_1}} = \frac{(m_2 + m) S_1 - m_1 S_2}{m_2 S_1 - m_1 S_2} \quad (6).$$

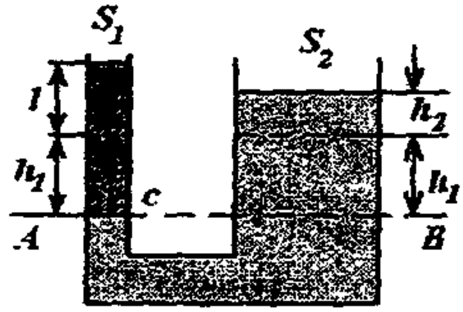
Из равенства (2) определим соотношение площадей поршней $\dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{m_1 + m}{m_2} = \dfrac{3}{2} \Rightarrow S_1 = \dfrac{3}{2} S_2$ (7). Подставим (7) в (6), получим

$$\frac{H}{h} = \frac{4 \cdot \dfrac{3}{2} S_2 - S_2}{2 \cdot \dfrac{3}{2} S_2 - S_2} = \frac{5}{2} \Rightarrow H = \frac{5}{2} h = 0,25 \text{ м}.$$

Ответ: 0,25 м.

Задача 11

Ртуть находится в сообщающихся сосудах. Площадь сечения S_1 левого сосуда в три раза меньше, чем правого. Уровень ртути в узком сосуде расположен на расстоянии = 30 см от его верхнего края. На сколько поднимется уровень ртути в правом сосуде, если левый сосуд доверху заполнить водой? Плотность ртути 13600 кг/м^3, воды - 1000 кг/м^3.



Решения: После доливания воды уровень ртути в левом сосуде опустится на h_1 . Над границей раздела «ртуть – вода» (AC) будет находиться столбик воды высотой (+ h_1). В то же время уровень ртути в правом колене поднимется на h_2 . На уровне ACB давления в двух сосудах должны быть одинаковы: в в левом - гидростатическое давление на этом уровне: $p_1 = \rho_в g(l + h_1)$, а в правом – $p_2 = \rho_{рт} g(h_2 + h_1)$. Т.к. $p_1 = p_2$, то $\rho_в g(l + h_1) = \rho_{рт} g(h_2 + h_1)$ (1).

Жидкости практически несжимаемы, следовательно, уменьшение объема ртути в левом сосуде равно его увеличению в правом, т.е. $S_1 h_1 = S_2 h_2 \Rightarrow h_1 = \frac{S_2}{S_1} h_2$ (2).

Подставим (2) в (1), получим

$$\rho_в\left(l + \frac{S_2}{S_1} h_2\right) = \rho_{рт}\left(h_2 + \frac{S_2}{S_1} h_2\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h_2 = \frac{\rho_в l}{\rho_{рт}\left(1 + \frac{S_2}{S_1}\right) - \rho_в \frac{S_2}{S_1}}.$$

$$h_2 = \frac{10^3 \cdot 0{,}3}{13{,}6 \cdot 10^3 (1+3) - 3 \cdot 10^3} = \frac{0{,}3}{4 \cdot 13{,}6 - 3} = 0{,}0059\,м \approx 0{,}6\,см.$$

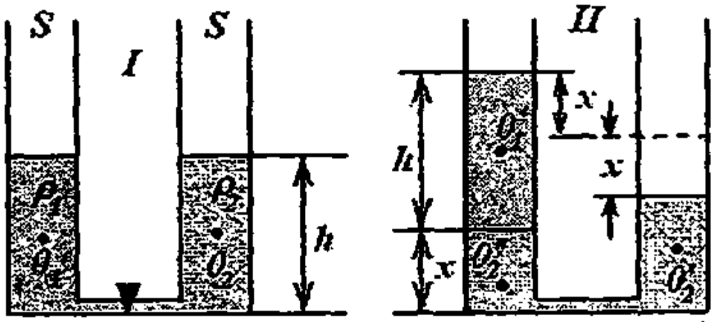
Ответ: 0,6 см.

Задача 12

Два сосуда одинакового сечения S = 10 см^2 соединены между собой очень тонкой трубкой с краном и заполнены не смешивающимися между собой жидкостями, плотности которых ρ_1 = 1 г/см^3 и ρ_2 = 2 г/см^3, до высоты h = 1 м. Определите количество теплоты, которое выделится после открытия крана и установления равновесия системы.

Решение:

Выделившееся количество теплоты равно убыли потенциальной энергии системы, т.е. $Q = E_I - E_{II}$, где E_I – потенциальная энергия системы до открытия крана (рис. *а*), равная $E_I = m_1 g \frac{h}{2} + m_2 g \frac{h}{2}$ (1),



а *б*

(m_1 и m_2 - массы жидкостей в двух сосудах, $\frac{h}{2}$ - положение центров тяжести O_1 и O_2 двух жидкостей);

E_{II} - потенциальная энергия системы после открытия крана и установления равновесия (рис.*б*). При этом центр тяжести жидкости в левом сосуде окажется на высоте $h_1 = \frac{h}{2} + x$, где x - высота, на которую повысится уровень менее плотной жидкости. В силу несжимаемости жидкостей и равенства площадей сечения сосудов уровень жидкости в правом сосуде понизится на величину x и центр тяжести O_2' оставшейся в этом сосуде жидкости массой $(m_2 - \Delta m)$ окажется на высоте $h_2' = \frac{1}{2}(h - x)$, а в левом сосуде часть жидкости из второго сосуда массой Δm будет иметь положение центра тяжести O_2'' на высоте $h_2'' = \frac{x}{2}$. Полная энергия системы будет равна:

$$E_{II} = m_1 g\left(\frac{h}{2} + x\right) + (m_2 - \Delta m) g \frac{h - x}{2} + \Delta m g \frac{x}{2} \quad (2).$$

Величину x, на которую в левом сосуде повысится, а в правом понизится уровень жидкости, определим из условия равновесия жидкостей на уровне AA':

$$\rho_1 gh + \rho_2 gx = \rho_2 g(h - x) \Rightarrow x = \frac{(\rho_2 - \rho_1)h}{2\rho_2}$$

С учётом данных условия задачи $\rho_2 = 2\rho_1$

$$x = \frac{(2\rho_1 - \rho_1)h}{2 \cdot 2\rho_1} = \frac{h}{4}.$$

Массы жидкостей равны

$$m_1 = \rho_1 V = \rho_1 Sh;\ m_2 = \rho_2 V = \rho_2 Sh = 2\rho_1 Sh;$$

$$\Delta m = \rho_2 Sx = \rho_2 S\frac{h}{4} = \rho_1 \frac{Sh}{2};\ \ m_2 - \Delta m = 2\rho_1 Sh - \frac{\rho_1 Sh}{2} = \frac{3}{2}\rho_1 Sh.$$

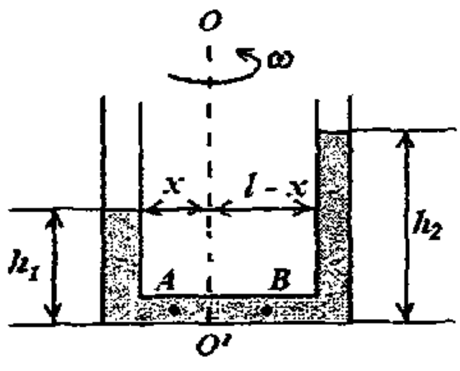
Подставим выражения масс в (1) и (2), получим $E_I = \frac{3}{2}\rho_1 Sh^2 g$; $E_{II} = \frac{11}{8}\rho_1 Sh^2 g$. Тогда количество выделившийся теплоты

$$Q = \frac{3}{2}\rho_1 Sh^2 g - \frac{11}{8}\rho_1 Sh^2 g = \frac{1}{8}\rho_1 Sh^2 g = \frac{10^3 \cdot 10 \cdot 10^{-4} \cdot 1 \cdot 10}{8} = 1{,}25\ \text{Дж}$$

Ответ: 1,25 Дж.

Задача 13

В сообщающиеся сосуды одинакового малого сечения налита жидкость. Определите разность уровней жидкости в сосудах, если сосуды вращаются с угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси OO', расположенной на расстоянии x от левого сосуда, как показано на рисунке. Длина горизонтальной части трубки, соединяющей сосуды, равна



Решение: На рисунке указаны центры масс (A и B) жидкости, находящейся в горизонтальной части сосуда слева и справа от оси вращения OO′. Тогда точка A расположена на расстоянии $x/2$ от оси, точка B – на расстоянии ($-x$)/2

На каждую часть жидкости в горизонтальной трубке действует сила давления $F_д$ вертикального столба жидкости в сосудах: слева $F_{д_1} = \rho g h_1 S$ (1), справа $F_{д_2} = \rho g h_2 S$ (2).

Согласно второму закону Ньютона эти силы давления будут являться центростремительными:

в левой части $F_{д_1} = m_1 a_{ц_1} = m_1 \omega^2 \frac{x}{2}$ (3);

в правой части $F_{д_2} = m_2 a_{ц_2} = m_2 \omega^2 \frac{l-x}{2}$ (4), где $m_1 = \rho x S$ (5) и $m_2 = \rho(l-x)S$ (6) – массы жидкостей, находящихся слева и справа от оси вращения.

С учетом выражений (1), (2), и (5), (6) выражения (3) и (4) примут вид

$$\rho g h_1 S = \rho x S \omega^2 \frac{x}{2} \quad (7); \quad \rho g h_2 S = \rho(l-x) S \omega^2 \frac{l-x}{2} \quad (8).$$

Из (7) определим высоту столба в левом сосуде $h_1 = \frac{\omega^2 x^2}{2g}$,

из (8) – в правом сосуде $h_2 = \frac{\omega^2 (l-x)^2}{2g}$.

Разность уровней

$$\Delta h = h_2 - h_1 = \frac{\omega^2}{2g}\left((l-x)^2 - x^2\right) = \frac{\omega^2}{2g}\left(l^2 - 2xl\right) = \frac{\omega^2 l}{2g}(l-2x)$$

Ответ: $\frac{\omega^2 l}{2g}(l-2x)$.

§ 4. Проверочная работа

9 класс

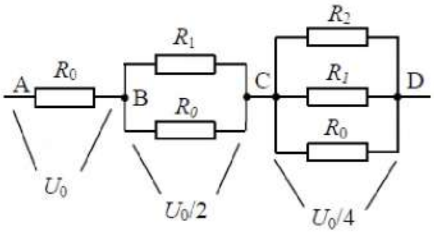
Задача 1. (8 баллов) В заполненном до краев сосуде с ртутью плавает кусок льда массы 1,36 кг. Найти объем жидкости, которая перельется через края, когда лед растает? Плотность воды равна 1000 кг/м3, плотность ртути 13600 кг/м3.

Задача 2. (10 баллов) Мяч, брошенный вертикально вверх с земли, проходит последние 5 метров участка подъема за треть всего времени полета. Найти максимальную высоту подъема мяча над землей.

Задача 3. (12 баллов) Грузовой автомобиль перемещался между двумя пунктами, сначала разгоняясь с постоянным ускорением из состояния покоя, затем двигаясь равномерно на отрезке времени *t*0 и далее замедляясь до остановки с тем же по величине ускорением, что и на участке разгона.

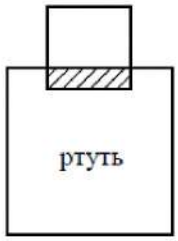
Перемещавшийся между теми же пунктами легковой автомобиль не имел участка равномерного движения, а его разгон и торможение происходили с такими же, как у грузового автомобиля, ускорениями и длились вдвое дольше, чем у грузового автомобиля. Считая, что начальная и конечная скорости легкового автомобиля были равны нулю, найти время его движения.

Задача 4. (10 баллов) В схеме, приведенной на рисунке 3, известны сопротивление R_0 и напряжения U_0, $U_0/2$ и $U_0/4$ на участках AB, BC и CD (см. рис.). Найти токи через резистор $R1$ на участке BC и через резистор $R2$.



Ответы и решения

Задача 1. Ответ: Через края перельется жидкость объемом 1,26 л.



Решение: В сосуде, очевидно, останется лишь та часть получившейся в результате таяния льда воды, объем которой

равен объему погруженной в ртуть части льда (заштрихованн
4). Погруженный объем $V_{\text{погр}}$ можно найти из условия плавани

$$m_{\text{л}} = \rho_{\text{рт}} V_{\text{погр}},$$

где $m_{\text{л}}$ – масса льда, а $\rho_{\text{рт}}$ – плотность ртути. Объем же получ
воды, очевидно, равен $m_{\text{л}}/\rho_{\text{л}}$. В итоге для перелившегося чере
ды ΔV получаем выражение

$$\Delta V = \frac{m_{\text{л}}}{\rho_{\text{в}}} - \frac{m_{\text{л}}}{\rho_{\text{рт}}} = \frac{m_{\text{л}}(\rho_{\text{рт}} - \rho_{\text{в}})}{\rho_{\text{в}}\rho_{\text{рт}}},$$

где $\rho_{\text{в}}$ – плотность воды. Подставляя численные данные, наход

Задача 2. Ответ: Максимальная высота подъема мяча над землей равна 11,25 м.

Решение: Для решения удобно использовать то обстоятельство, что при падении мяча из высшей точки вниз он пролетит первые 5 метров за то же время, что и последние 5 метров при подъеме. Учитывая также, что время подъема равно времени падения и обозначая это время через t, запишем условие задачи в виде

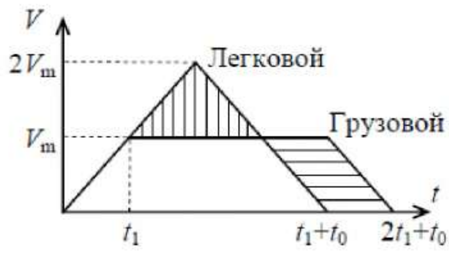
$$\frac{g\left(\frac{2t}{3}\right)^2}{2} = 5.$$

Выражая отсюда t, находим максимальную высоту подъема h по формуле

$$h = \frac{gt^2}{2} = 11{,}25\,\text{м}.$$

Задача 3. Ответ: Время движения легкового автомобиля равно $4t_0/3$.

Решение: При решении кинематических задач, в которых движение тел состоит из участков с постоянным ускорением, часто оказывается удобным использовать графики зависимости скоростей тел от времени. В рассматриваемой задаче построим графики для скоростей грузового и легкового автомобилей (см. рис. 5). На рисунке V_m – максимальная скорость грузовика, t_1 – время его разгона, $2V_m$ – максимальная скорость легкового автомобиля (для определенности считается, что оба автомобиля начали движение в момент $t = 0$). Площади под графиками должны



быть одинаковыми в силу одинаковости пройденных путей. Следовательно, площадь треугольника с основанием $4t_1$ и высотой $2V_m$ (путь легкового автомобиля) равна площади трапеции с основаниями t_0 и $2t_1+ t_0$ и высотой V_m (путь грузовика), т.е.

$$\frac{1}{2} \cdot 4t_1 \cdot 2V_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2} \cdot (2t_1 + t_0 + t_0) \cdot V_{\mathrm{m}}.$$

Следовательно, время движения легкового автомобиля $4t_1$ равно $4t_0/3$.

Примечание: *Время движения легкового автомобиля можно также найти, приравняв заштрихованные вертикально (опережение легковым автомобилем грузовика) и горизонтально (расстояние, которое грузовик в итоге наверстывает) площади.*

Задача 4. Ответ: Ток через резистор R_1 на участке ВС равен $U_0/(2R_0)$. Такой же ток проходит и через резистор R_2.

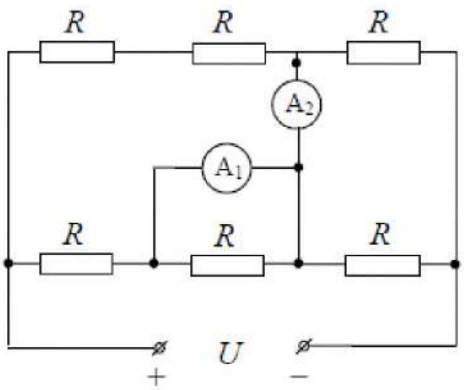
Решение: Из указанных на схеме (рис.3) напряжений следует, что $R_1 = R_0$ и $R_2 = R_0/2$. Отсюда нетрудно понять, как полный ток U_0/R_0 делится между резисторами на каждом участке цепи.

10 класс

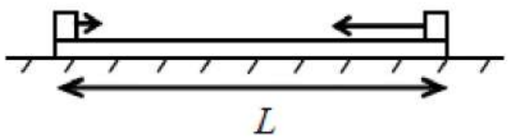
Задача 1. (8 баллов) Мяч, брошенный вертикально вверх с земли, проходит последние 5 метров участка подъема за треть всего времени полета. Найти максимальную высоту подъема мяча над землей.

Задача 2. (10 баллов) С какой скоростью будут всплывать в вязкой жидкости два шара одинакового радиуса, связанные длинной нитью, если более легкий шар всплывает в ней со скоростью V_0, а более тяжелый имеет нулевую плаву честь (может находиться в этой жидкости в безразличном равновесии)? Считать, что сила сопротивления пропорциональна скорости шара.

Задача 3. (10 баллов) В цепи, представленной на рисунке , сопротивления R одинаковы и равны 1 кОм, сопротивления амперметров пренебрежимо малы, напряжение U на зажимах 140 В. Найти показания амперметров.



Задача 4. (12 баллов) Доска длины L с шероховатой верхней плоскостью покоится на гладком горизонтальном столе. С концов доски во встречных направлениях одновременно толкают два одинаковых кубика с отличающимися в три раза начальными скоростями (см. рис.). Абсолютно неупругое соударение кубиков происходит в момент остановки одного из них. В каком месте доски прекратится скольжение по ней кубиков, если масса доски вдвое больше массы кубика?



Ответы и решения

Задача 1. См. решение второй задачи для 9 класса.

Задача 2. Ответ: Шары будут всплывать со скоростью $V_0/2$.

Решение: Обозначим силу Архимеда, действующую на любой из шаров (размеры шаров одинаковы) как F_A. Тогда для более легкого шара, всплывающего со скоростью V_0, можно написать

$$m_1g + kV_0 = F_A$$

где m_1 – масса легкого шара, а сила сопротивления, направленная вниз (против движения), записана в виде kV_0. Для связанных нитью шаров можно записать аналогичное соотношение в виде

$$m_1g + kV + m_2g + kV = 2F_A$$

В этой формуле m_2 – масса более тяжелого шара, V – скорость их всплывания и учтено, что силы сопротивления, действующие на шары, одинаковы. Поскольку более тяжелый шар может находиться в равновесии, будучи полностью погруженным в жидкость, то

$$m_2g = F_A.$$

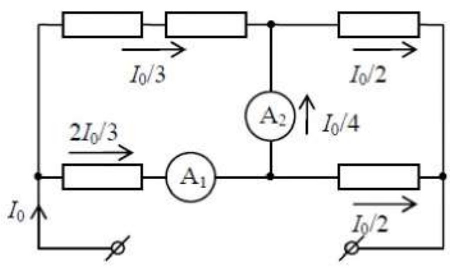
С учетом этого можно записать

$$m_1g + kV_0 = m_1g + 2kV,$$

откуда получаем $V = V_0/2$.

Задача 3. Ответ: Амперметры A_1 и A_2 будут показывать токи 80 мА и 20 мА соответственно.

Решение: Найдем вначале токи через резисторы. При расчете этих токов амперметры можно заменить проводниками с нулевым сопротивлением. Средний резистор нижней ветви шунтируется амперметром A_1, т.е. ток через него не идет. Поэтому электрическую схему удобно перерисовать так, как показано на рисунке. Выразим токи через резисторы через ток I_0, идущий от источника.



Поскольку напряжения на двух резисторах в левом верхнем участке цепи и на левом нижнем резисторе одинаковы, ток через нижний левый резистор составит $2I_0/3$, а через левые верхние резисторы будет $I_0/3$. Рассуждая аналогично для правой части цепи, находим, что ток через правый верхний и правый нижний резисторы равны $I_0/2$.

Подводимое напряжение U = 140 В можно представить как сумму напряжений, например, на двух последовательных верхних участках

$$140 = \frac{I_0}{3} \cdot 2R + \frac{I_0}{2} \cdot R,$$

откуда I_0 = 120 мА и, следовательно, определяются токи через все резисторы.

Рассматривая баланс токов для узлов цепи, находим теперь токи через амперметры. Как ясно из рис. , амперметр A_1 покажет ток $2I_0/3$ = 80 мА, а амперметр A_2 покажет ток $2I_0/3 - I_0/2$ = 20 мА.

Задача 4. Ответ: Скольжение кубиков по доске прекратится на расстоянии $L/12$ от ее левого (на рис.) конца.

Решение: Поскольку массы кубиков и коэффициенты трения между ними и доской одинаковы, то одинаковыми по величине (но противоположными по направлению) будут и силы трения, действующие на кубики со стороны доски. Следовательно, ускорения кубиков будут равны по величине, и за то время, за которое один (более медленный) кубик изменит свою скорость от некоторого начального значения V_0 до нуля, другой (более быстрый) замедлится от $3V_0$ до $2V_0$. Нетрудно понять, что вплоть до столкновения кубиков доска будет неподвижна (на нее будут действовать равные по модулю и противоположные по направлению силы трения со стороны кубиков). Суммарный путь, пройденный кубиками по доске до момента столкновения, очевидно, равен длине доски L. При этом пройденный более медленным кубиком путь в пять раз меньше пути, пройденного более быстрым. Действительно, от момента начала движения до соударения средняя скорость более медленного кубика равна $V_0/2$ (полусумма начальной V_0 и конечной, равной нулю, скоростей), а быстрого $5V_0/2$ (полусумма $3V_0$ и $2V_0$). Следовательно, более медленный кубик прошел по доске путь $L/6$, а более быстрый $5L/6$. Сразу после столкновения скорость слипшихся кубиков будет равна V_0 и направлена к ближнему концу доски, отстоящему на $L/6$ от места столкновения. После столкновения слипшиеся кубики будут замедляться с тем же ускорением, что и до удара, а доска будет разгоняться с таким же ускорением (ее масса равна массе слипшихся кубиков). Скольжение кубиков прекратится, когда выровняются скорости доски и кубиков относительно земли. В силу одинаковости ускорений конечная скорость доски с кубиками будет равна $V_0/2$. Доска, двигаясь с тем же ускорением, что и кубики до соударения, пройдет путь, который можно вычислить по формуле $V_0{}^2/(4 \cdot 2a)$, что в 4 раза меньше пути $V_0{}^2/(2a)=L/6$, пройденного более медленным кубиком от момента начала движения до соударения. Таким образом, скольжение кубиков по доске прекращается, когда доска пройдет расстояние $L/24$. Слипшиеся кубики пройдут в том же направлении относительно земли путь

$$\frac{V_0^2-\left(\frac{V_0}{2}\right)^2}{2a}=\frac{3V_0^2}{8a}=\frac{L}{8}.$$

Следовательно, кубики остановятся на расстоянии

$$\frac{L}{6}+\frac{L}{24}-\frac{L}{8}=\frac{L}{12}$$

от левого (на рис.) края доски.

Примечание: Расстояние d от края доски, на котором остановятся слипшиеся кубики, можно также найти из формулы

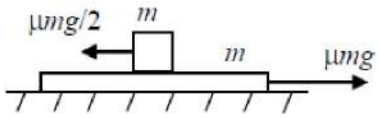
$$d=\frac{L}{6}-\frac{V_0^2}{2a_{\text{отн}}},$$

где $a_{\text{отн}}$ – ускорение слипшихся кубиков относительно доски. В приведенной формуле учтено, что начальная скорость слипшихся кубиков относительно доски равна V_0, а конечная (скольжение прекращается) равна нулю. Поскольку ускорения доски и кубиков относительно земли одинаковы и противоположны, то $a_{\text{отн}}$ в 2 раза больше ускорения доски (и слипшихся кубиков) относительно земли. В результате получаем

$$d=\frac{L}{6}-\frac{L}{12}=\frac{L}{12}.$$

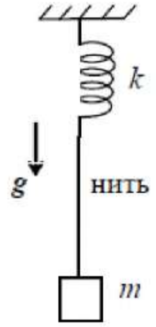
11 класс

Задача 1. (10 баллов) На гладком горизонтальном столе находится дощечка массы m, на которую положен брусок той же массы. Коэффициент трения бруска о дощечку равен μ. В момент $t = 0$ к бруску и дощечке прикладывают противоположно направленные силы $\mu mg/2$ и μmg (см. рис.). Найти работу силы $\mu mg/2$ (5 баллов) и силы μmg (5 баллов) за время t.



Задача 2. (10 баллов) Груз массы m, подвешенный к потолку с помощью нити и пружины жесткости k (см. рис.), смещают вниз от положения равновесия на $2mg/k$ и освобождают. Какой путь пройдет груз при его первом

движении вверх? Считать, что нить достаточно длинная, так что груз не наталкивается на пружину.



Задача 3. (10 баллов) Расположенный горизонтально цилиндрический сосуд заполнен гелием и разделен на две равные части закрепленным массивным поршнем. В частях сосуда находятся один и два моля газа при одинаковой температуре. После освобождения поршень начинает скользить без трения по стенкам цилиндра. Найти отношение объемов частей сосуда в момент, когда поршень достигнет максимальной скорости. Считать, что изменение параметров газа в каждой части сосуда происходит по адиабатическому закону $pV^{5/3}$ =const.

Задача 4. (10 баллов) Проволочная рамка охватывает катушку, подключенную к батарее через реостат с полным сопротивлением R. Когда сопротивление реостата уменьшили от R до $2R/3$, по рамке прошел заряд q. Какой заряд пройдет по рамке, если сопротивление реостата уменьшить от $2R/3$ до $R/3$? Сопротивлением катушки, батареи и подводящих проводов пренебречь

Ответы и решения

Задача 1. Ответ: Работы сил $\mu mg/2$ и μmg равны соответственно – $m(\mu gt)^2/16$ и $m(\mu gt)^2/8$.

Решение: Предположим, что проскальзывание бруска по дощечке отсутствует. Тогда брусок и дощечку можно рассматривать как одно тело массы $2m$.

Запишем для этого тела 2-й закон Ньютона в проекции на направленную вправо ось x

$$2ma = \mu mg - \frac{\mu mg}{2}.$$

Отсюда находим ускорение

$$a = \frac{\mu g}{4}.$$

Теперь проверим правильность предположения о совместном движении бруска и дощечки. Для этого из уравнения 2-го закона Ньютона для бруска (или дощечки) необходимо найти силу трения Fтр и проверить, не превосходит ли она максимально возможное значение μmg. Если значение Fтр, которая «обеспечивает» совместность движения бруска и дощечки, окажется меньше максимального значения μmg, то брусок и дощечка действительно движутся вместе, и ускорение тел найдено верно. В противном случае, сделанное предположение неверно. Из 2-го закона Ньютона, например, для бруска в проекции ось x имеем

$$ma = F_{\text{тр}} - \frac{\mu mg}{2},$$

где, как найдено выше, ускорение равно $\mu g/4$. Отсюда получаем, что Fтр = $3\mu mg/4 < \mu mg$, что свидетельствует о справедливости сделанного предположения об отсутствии проскальзывания. Значит, правильно и найденное значение ускорения. Таким образом, дощечка и брусок движутся вместе вправо с ускорением $\mu g/4$. За время t каждое из тел пройдет путь, равный $\mu gt^2/8$.

Работа силы μmg, которая сонаправлена с перемещением, будет равна $\mu(mgt)^2/8$, а работа силы $\mu mg/2$, которая противоположна перемещению, окажется отрицательной и равной $-\mu(mgt)^2/16$.

Примечание: Можно рекомендовать во всех задачах по механике, где фигурирует сила трения $F_{\text{тр}}$ и где из условий задачи сразу нельзя сделать вывод оналичии или отсутствии проскальзывания, искать вначале решение в предположении, что проскальзывания нет (как, например, в только что рассмотренной задаче). После нахождения ускорения следует найти $F_{\text{тр}}$ и сравнить ее с максимально возможной $F_{\text{тр max}}$. Если $F_{\text{тр}} < F_{\text{тр max}}$, то задача решена верно (как было в рассмотренной задаче). Если же окажется, что $F_{\text{тр}} > F_{\text{тр max}}$, значит сделанное предположение об отсутствии проскальзывания неверно и задачу нужно решать заново, записывая 2-й закон Ньютона для каждого тела в отдельности и подставляя в него $F_{\text{тр max}}$ в качестве силы трения.

Задача 2. Ответ: При первом движении вверх (до максимальной высоты) груз проходит путь $(9/2)mg/k$.

Решение: Если бы груз был непосредственно скреплен с пружиной (без нити), то после освобождения он начал бы совершать гармонические колебания около положения равновесия с амплитудой $2mg/k$, равной начальному смещению от положения равновесия. При этом в нижнем положении деформация растяжения пружины была бы $3mg/k$, а в верхнем – пружина была бы сжата, и ее деформация равнялась бы mg/k. Поскольку груз прикреплен к пружине через нить и, по условию, не наталкивается на пружину, то при его движении вверх пружина от растянутого состояния в некоторый момент перейдет в недеформированное состояние и далее сжиматься не будет. С этого момента нить будет не натянута, и груз продолжит свое движение до высшей точки, находясь только под действием силы тяжести. Найти путь груза при его первом движении вверх легче всего из закона сохранения механической энергии. Поскольку в начальном положении, когда груз смещен вниз, и в верхнем положении кинетическая энергия груза равна нулю, закон сохранения механической энергии системы, написанный для этих крайних положений, сводится к сохранению потенциальной энергии. Если отсчитывать высоту от нижнего положения груза, то сохранение потенциальной энергии системы запишется в виде

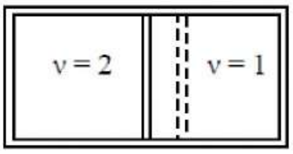
$$\frac{k\left(\frac{3mg}{k}\right)^2}{2} = mgl,$$

где l – путь груза при его первом движении вверх и, значит, его высота над нижним нулевым уровнем. Таким образом, $l = 9mg/2k$.

Примечание: Ответ не изменится, если изменить нулевой уровень отсчета потенциальной энергии груза в поле тяжести. Однако для потенциальной энергии пружины формула $E_p = kx^2/2$ оказывается верной лишь в случае,
когда x (смещение конца пружины) отсчитывается от недеформированного
положения.

Задача 3. Ответ: Отношение большего объема к меньшему равно $2^{3/5}$.

Решение: Предположим, что в левой половине цилиндра находятся два моля, а в правой половине – один моль (см. рис.).



Поскольку начальные температуры частей газа одинаковы, из уравнения Клапейрона-Менделеева находим, что начальное давление в левом отсеке p_{01} вдвое больше начального давления p_{02} в правом. После освобождения поршень начнет скользить в сторону отсека с меньшим давлением. Разгон будет продолжаться до тех пор, пока не выровняются давления по обе стороны от поршня. Учитывая приведенную в условии задачи адиабатическую связь p и V, можно написать

$$p_{01}V_{01}^{5/3} = pV_1^{5/3}, \qquad (1)$$
$$p_{02}V_{02}^{5/3} = pV_2^{5/3}. \qquad (2)$$

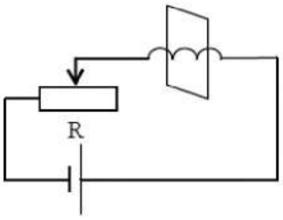
Здесь $V_{01} = V_{02}$ – начальные объемы гелия по обе стороны от поршня, p – конечное давление (одинаковое по обе стороны в момент достижения поршнем максимальной скорости), V_1 и V_2 – объемы газа слева и справа от поршня в искомый момент. Поделив равенство (1) на равенство (2), находим

$$\frac{V_1}{V_2} = 2^{3/5},$$

т.е. отношение большего объема (где находятся два моля) к меньшему (где находится один моль) в момент достижения поршнем максимальной скорости равно $2^{3/5} \approx 1{,}52$.

Задача 4. Ответ: По рамке пройдет заряд $3q$.

Решение: Значение магнитного поля в катушке пропорционально силе тока в цепи, куда катушка включена последовательно. При перемещении движка реостата меняются сила тока в цепи, магнитное поле в катушке и магнитный поток через рамку. Из-за изменения магнитного потока через рамку в ней наводится ЭДС и возникает электрический ток.



Силу тока в цепи (и катушке) находим из закона Ома. При уменьшении сопротивления реостата от R до $2R/3$ ток увеличится от E/R до $3E/(2R)$, а при дальнейшем уменьшении от $2R/3$ до $R/3$ ток увеличится от $3E/(2R)$ до $3E/R$. Пусть k – коэффициент пропорциональности между магнитным потоком через рамку и током в цепи (катушке). Тогда

$$\Phi_1 = k\frac{E}{R},\ \Phi_2 = k\frac{3E}{2R},\ \Phi_3 = k\frac{3E}{R},$$

где Φ_1, Φ_2, Φ_3 – магнитные потоки, пронизывающие рамку при сопротивлениях реостата, равных R, $2R/3$, $R/3$ соответственно. По закону Фарадея возникающая в рамке ЭДС индукции Eинд, равна скорости изменения во времени магнитного потока, пронизывающего рамку:

$$E_{\text{инд}} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}.$$

Возникающий в рамке индукционный ток равен

$$I_{\text{инд}} = \frac{E_{\text{инд}}}{R_{\text{рам}}} = -\frac{1}{R_{\text{рам}}}\frac{\Delta\Phi}{\Delta t},$$

где $R_{\text{рам}}$ – сопротивление рамки. Учитывая, что $I_{\text{инд}}\Delta t = \Delta q$, где Δq – заряд, протекающий по рамке за малый промежуток Δt, получаем из (1) соотношение

$$\Delta q = -\frac{\Delta\Phi}{R_{\text{рам}}}.$$

Поскольку данное соотношение справедливо для любого малого промежутка _t, то оно верно и для конечных промежутков времени и конечных изменений потока. Следовательно, при изменении потока от Φ_1 до Φ_2, через рамку
пройдет заряд

$$q = -\frac{1}{R_{\text{рам}}}(\Phi_2 - \Phi_1) = \frac{kE}{2R_{\text{рам}}R}.$$

Аналогично, заряд q', который протечет через рамку при изменении сопротивления реостата от $2R/3$ до $R/3$, будет равен

$$-\frac{1}{R_{\text{рам}}}(\Phi_3 - \Phi_2) = \frac{1}{R_{\text{рам}}R}k\frac{3E}{2} = 3q.$$

Примечание: На величину индукционного тока в рамке влияет не только ЭДС, возникающая из-за изменения во времени внешнего магнитного потока,
но и ЭДС самоиндукции, возникающая из-за изменения собственного магнитного потока, создаваемого током в рамке. Однако на величине заряда, проходящего по рамке, явление самоиндукции не сказывается.

Заключение

Что нужно, чтобы решать олимпиадные задачи по физике?

1. Знание теоретических основ (определения, законы, физические понятия).
2. Знание основных приемов и методов решения физических задач.
3. Озарение.

Первому и второму можно и нужно учиться. Третьему научиться гораздо труднее, это приходит только с опытом. Однако наличие первых двух пунктов существенно увеличивает вероятность «озарения».

Решить физическую задачу- означает восстановить неизвестные связи параметров и величин заданного физического явления. Любое решение физической задачи предполагает обязательные этапы: физический – он заключается в анализе процесса или явления и составления замкнутой системы уравнений; математический – получение решения этой системы в общем и числовом виде; заключительный – анализ решения с физической точки зрения. Следовательно, решение физических задач любой сложности требует глубоких практических знаний всех разделов математики. Анализ олимпиадных работ учащихся показывает, что школьники делают много ошибок в математических вычислениях. Баллы теряются на этапе математического расчета в задаче, даже если физический процесс описан верно.

Список литературы

1. Алешкевич В.А., Грачев А.В., Грибов В.А. Задачи вступительных экзаменов и олимпиад по физике в МГУ в 2000. Изд-во физического факультета МГУ, 2000.
2. Баканина Л.П., Белонучкин В.Е., Козел С.М. Сборник задач по физике для 10-11 классов с углубленным изучением физики /Под редакцией С.М.Козелла, М.: Вербум 2003.
3. Буздин А.И., Зильберман А.Р., Кротов С.С. Раз задача, два задача… – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. – 240 с. – (Библиотечка «Квант». Вып. 81)
4. Всероссийские олимпиады по физике. 1992-2004 / Науч. редакторы: С.М.Козел, В.П.Слободянин. - М.: Вербум, 2005.
5. Гурский И.П. Элементарная физика с примерами решения задач. М.: Наука, 1984.

6. Задачи Московских городских олимпиад по физике. 1986 – 2005. Приложение: олимпиады 2006 и 2007: Под ред. М. В. Семёнова, А. А. Якуты - 2-е изд., испр. и доп. - М.: МЦНМО, 2007.
7. Задачи по физике / Под редакцией О.Я.Савченко. - Новосибирск; Новосибирский государственный университет. 2008.
8. Кабардин О.Ф., Орлов В.А. Международные физические олимпиады школьников / Под редакцией В.Г.Разумовского. - М.: Наука, 1985.
9. Кондратьев А.С., Бутиков Е.И., Быков А.А. Физика в примерах и задачах. Издательство МЦНМО, 2008.
10. Кондратьев А.С., Уздин В.М. Физика. Сборник задач. - М.: Физматлит, 2005.
11. Манида С.Н. Физика. Решение задач повышенной сложности. - Изд-во Санкт-Петербургского университета, 2004.
12. Пинский А.А. Задачи по физике. - М.: Наука, 2004.
13. Савченко Н.Е. Решение задач по физике. Минск: Высш. шк., 1988.
14. Сборник задач по элементарной физике/ Б.Б. Буховцев, В.Д. Кривченков, Г.Я. Мякишев, И.М. Сараева. М.: Наука, 1974.
15. Слободецкий И.Ш., Орлов В.А. Всесоюзные олимпиады по физике: Пособие для учащихся. - М.: Просвещение, 1982.
16. Черноуцан А.И. Физика. Задачи с ответами и решениями. - М.: Высшая школа, 2008.