СОДЕРЖАНИЕ

§1 Функции *n* переменных

В большей части экономической, естественнонаучной и других областей деятельности для исследования рассматриваемых процессов требуется построение и применение зависимостей двух и более переменных величин.

Например, для решения экономической задачи оптимизации на условный экстремум, применяется метод Лагранжа, состоящий в построении функции трех и более переменных.

Лекция № 1

Функции *n* переменных и их классификация в *n*-мерном пространстве

1.1.Отображение как множество определения и множество значений функции.

1.2. Векторное или линейное пространство.

1.3. Преобразование линейного пространства. Векторная функция скалярного аргумента.

1.4. Скалярная функция векторного аргумента.

В лекции рассматриваются некоторые вопросы и определения, относящиеся к общим понятиям и видам функциональных зависимостей двух и более переменных.

1.1. Отображение как множество определения и множество значений функции

Определение. *Отображением* множества E в множество F или *функцией*, определенной на некотором множестве E, представляющем упорядоченные совокупности переменных (x_1, x_2, …, x_n) с соответствующими им значениями в множестве F. Отображение или функция определяются правилом f или закономерностью по которому каждому элементу – аргументу $X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in E$ ставится в соответствие определенный элемент – функция $Y \in F$.

Краткая запись отображения или функции имеет вид $f : E \to F$, $Y = f(X)$.

Функции многих переменных в основном определяются следующими видами:

- векторная функция векторного аргумента;
- векторная функция скалярного аргумента;
- скалярная функция векторного аргумента.
- скалярная функция скалярного аргумента, (функции одной переменной, которая в полном объёме изучались в первой части математического анализа).

Например, если в множестве E имеются две переменные величины x_1 и x_2, заданные в определенном порядке, то в множестве F этим переменным соответствует вполне определенный вектор $\vec{r}$ с координатами (x_1, x_2). В этом случае на множестве E определена вектор-функция, заданная двумя скалярными аргументами, имеющая определенные значения в множестве F. Если $x_1 = a_1$ и $x_2 = a_2$, то на множестве F определено конкретное значение вектор-функции – вектор $\vec{a} = (a_1, a_2)$.

1.2. Векторное или линейное пространство. Обобщенное понятие точки и вектора в n-мерном пространстве

На плоскости, точка определяется двумя действительными числами, координатами точки $X(x_1, x_2)$.

В *n-мерном пространстве* тока X определяется совокупностью n действительных чисел, то есть точка имеет n координат $X(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$. Совокупностью n действительных чисел (y_i) определяет другую точку Y в n – мерном пространстве, то есть точка Y имеет n координат $Y(y_1, y_2, \ldots, y_i, \ldots, y_n)$. Точки X и Y находятся на множестве определения E.

Расстояние r между точками X и Y на плоскости в множестве E определяется формулой:

$$r = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \ldots + (x_i - y_i)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}\,.$$

Отображение направленного расстояния r по определенному правилу f в множество F отличное от E, даст некоторый вектор $\vec{a}$ с координатами:

$$x_1 - y_1 = a_1,$$

$$x_2 - y_2 = a_2,$$

$$\ldots$$

$$x_i - y_i = a_i,\ \ldots,\ x_n - y_n = a_n.$$

Определение. Упорядоченная совокупность действительных чисел (a_1, a_2, …, a_i, …, a_n) называется *n-мерным вектором*, а числа (a_i) его координатами, $\vec{a}(a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots, a_n)$.

Над n-мерными векторами могут выполняться операции сложения векторов и умножения вектора на число.

Векторное или линейное пространство

Для рассмотрения функциональных зависимостей многих переменных вводится понятие *векторного* или *линейного пространства* L_n, состоящего из n-мерных векторов, то есть элементов ($\boldsymbol{l}_1,\ldots, \boldsymbol{l}_n$)$\in \boldsymbol{L}_n$. Элементами множества $\boldsymbol{L}_n$ являются векторы $\boldsymbol{l}_i$ (i = 1, 2, …, n).

Определение. Множество n-мерных векторов, над которыми выполняются операции сложения и умножения вектора на число, образуют *n-мерное линейное пространство* $\boldsymbol{L}_n$.

Операции над функциями многих переменных обычно выполняются на векторном или линейном пространстве. В векторном пространстве используется понятие *поля*, содержащие не только вещественные числа, но и произвольные переменные величины.

Определение. Множество P элементов какого-либо вида называется *полем*, если выполняются две бинарные операции для ненулевых элементов поля (a, b, k) $\in P$:

- аддитивная операция (операция сложения), образующая коммутативную группу по сложению элементов ($a + b = b + a$);
- мультипликативная операция (операция умножения), образующая коммутативную группу по умножению элементов ($a \cdot b = b \cdot a$);
- выполнятся свойство дистрибутивности: $k\,(a + b) = k\,a + k\,b$.

Элементы поля P – это скаляры.

Будем рассматривать $\boldsymbol{L}_n$ как произвольное множество векторного пространства, $F(\boldsymbol{L}_n)$ множество функций на $\boldsymbol{L}_n$ со значениями в поле P или отображение $\boldsymbol{L}_n$ в поле P , то есть f : $F(\boldsymbol{L}_n) \to P$. Для элементов ($\boldsymbol{l}_1,\ldots, \boldsymbol{l}_n$)$\in$ $\boldsymbol{L}_n$ есть функция $f\,(\boldsymbol{l}_i) \in$ $\boldsymbol{L}_n$. Таким образом, векторному пространству может быть дано следующее определение.

Определение. Непустое множество $\boldsymbol{L}_n\,(P)$ на котором выполняются операции сложения, и умножения на число есть *линейное* или *векторное пространство над полем P*.

Обозначим элементы множества $\boldsymbol{L}_n\,(P)$ буквами x, y, z, …. , множества P – α, β….

Операции сложения и умножения на число подчиняются следующим условиям:

для операции сложения, отображающей множество пар $(x, y) \to x + y$

- $x + y = y + x$ – коммутативность сложения;
- $(x + y) + z = x + (y + z)$ – ассоциативность сложения;
- $\exists\, \boldsymbol{O} \in L_n(P)$: $x + \boldsymbol{O} = x$ – существует нейтральный элемент $\boldsymbol{O}$ относительно сложения;
- $\forall\, x \in L_n\,(P)$, существует противоположный элемент $(-x)$ относительно сложения, такой что $x + (-x) = \boldsymbol{O}$;

для операции умножения, отображающей множество пар $(x, y) \to x \cdot y$

- $\forall\, x, y \in L_n\,(P)$, $x \cdot y = y \cdot x$ – коммутативность умножения;
- $\forall\, x, y, z \in L_n\,(P)$, $x \cdot (y \cdot z) = (y \cdot x) \cdot z$ – ассоциативность умножения;
- $\forall\, x, y \in L_n\,(P)$, $\forall\, \alpha, \beta \in P$, $\alpha\,(x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$ – дистрибутивность умножения на скаляр относительно сложения;

- в поле P существует некоторый элемент $\beta = 1$, если $\forall x \in L_n(P)$ сохраняется вектор $\beta \cdot x = 1 \cdot x = x$, то множество P *унитарно для всех векторов* множества $L_n(P)$.

Множество элементов P есть упорядоченное поле, если для любых элементов выполняется соотношение $\alpha < \beta, \beta < \gamma \to \alpha < \gamma$.

Линейное пространство может быть совокупностью объектов любой природы, для которых выполняются операции сложения и умножения на скаляр, удовлетворяющие приведенным выше требованиям.

Если двум векторам линейного пространства поставлено в соответствие определенное вещественное число, являющееся результатом скалярного произведения векторов $(\vec{x}, \vec{y})$, то такое пространство называется *евклидовым пространством*.

Определение. *Скалярное произведение* двух векторов* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ есть число

$$(\vec{x}, \vec{y}) = x_1 y_1, + x_2 y_2 +, \ldots, + x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \ .$$

Определение. *Евклидовым пространством* называется линейное координатное пространство, в котором выполняется скалярное произведение векторов, удовлетворяющих следующим аксиоматическим свойствам:

- $(\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{y}, \vec{x})$ – коммутативности;
- $(\vec{x}, \vec{y} + \vec{z}) = (\vec{y}, \vec{x}) + (\vec{x}, \vec{z})$ – дистрибутивности;
- $(a\vec{x}, \vec{y}) = a(\vec{x}, \vec{y})$ – умножение скалярного произведения на число;
- $(\vec{x}, \vec{x}) > 0$ – положительное число для ненулевых векторов.

Длина вектора или ***норма*** вектора $\| \vec{x} \|$ в *евклидовом пространстве* L_n определяется по формуле:

$$\| \vec{x} \| = \sqrt{(\vec{x}, \vec{x})} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_i^2 + \ldots + x_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \ ;$$

расстояние $\rho(x, y)$ между элементами x, y в *евклидовом пространстве* L_n определяется формулой:

$$\rho(x, y) = \| x \cdot y \| = \sqrt{(\vec{x}, \vec{x})} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i \cdot y_i)^2} \ .$$

---

* Заметим, что в экономике, объемы различных товаров и их суммарные стоимости, определяются скалярным произведением вектора объема товаров и вектора их цен.

Таким образом, введение понятия функции n – переменных должно описываться важнейшими типами множеств точек n – мерного *евклидова пространства* – E^n или R^n.

1.3. Преобразование линейного пространства. Векторная функция скалярного аргумента

Преобразование линейного пространства

Пусть в векторном множестве (*пространстве*) $\boldsymbol{L}_n$ определен вектор $\vec{x}$, который по правилу *f*, переходит в соответствующий вектор $\vec{x}^*$ того же пространства. Вектор $\vec{x}^*$ есть *образ* вектора $\vec{x}$, то есть $f(\vec{x}) \to \vec{x}^*$, такое преобразование есть линейное преобразование или линейное отображение из $\boldsymbol{L}$ в $\boldsymbol{L}$ или $f : \boldsymbol{L} \to \boldsymbol{L}$. Такое преобразование называют *линейным оператором* $f : \mathbf{L} \to \mathbf{L}$.

Определение. Преобразование f называется *линейным преобразованием* линейного пространства, если для любых векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ из $\boldsymbol{L}$, и для любого отличного от нуля числа α из P выполняются соотношения:

$$f(\vec{x}+\vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y}) \text{ и } f(\alpha\vec{x}) = \alpha f(\vec{x}). \qquad (1)$$

Сумма *n*-векторов равна сумме образов каждого слагаемого и произведения числа на вектор равно произведению образа вектора на это же число.

Рассмотрим примеры линейных преобразований, обращая внимание на то, что геометрические иллюстрации линейных отображений в двух -и трехмерном пространстве имеют место в абстрактном *n-мерном линейном пространстве.*

Двумерное векторное пространство $\boldsymbol{L}_2$ определяет множество векторов плоскости. Зададим два вектора $\vec{x}$, $\vec{y}$ и преобразование f, которое увеличивает сумму этих векторов два раза и производит поворот на угол φ с лева на право. Будем считать, что начало векторов, совпадает с началом системы координат, в которой рассматривается преобразование (рисунок 1).

На рисунке показаны преобразования растяжения векторов $\vec{x}$, $\vec{y}$ в два раза, поворот «растянутых» $2\vec{x}$ и $2\vec{y}$ векторов и их поворот. Это линейные преобразования, так как выполняются соотношения, определяющие линейное пространство

$$f(\vec{x}+\vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y}) = 2(\vec{x}+\vec{y}) = 2\vec{x}+2\vec{y} - f(\vec{x}) + f(\vec{y}) \text{ и } f(\alpha\vec{x}) = 2\alpha\, f(\vec{x}).$$

На этом же рисунке показана сумма векторов $2\vec{x}+2\vec{y}$ – это диагональ параллелограмма со сторонами $2\vec{x},\ 2\vec{y}$ и их образ при повороте на 90°.

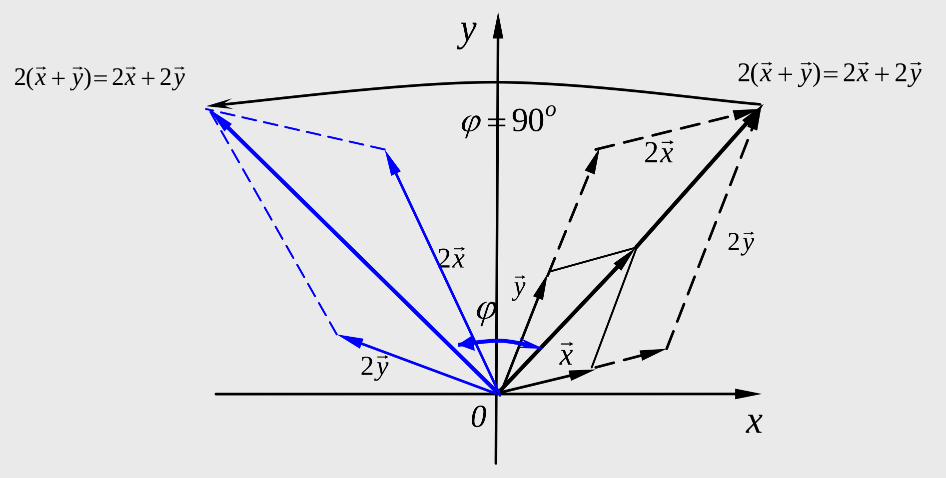


Рисунок 1

Векторная функция скалярного аргумента

Будем рассматривать положение произвольной точки в *n-мерном линейном пространстве* изменяющееся со временем t. Координаты такой точки будут определяются их положениями в зависимости от времени, то есть $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, …, $\sigma = \sigma(t)$ (σ-*n*-я координата точки в пространстве).

Определение. Если каждому значению $t \in P$ (P – числовое или *скалярное* поле) поставлен в соответствие определенный вектор $\vec{r} = \vec{r}_n(t)$ *n-мерного* пространства $\boldsymbol{L}_n(P)$, то на поле P определена *векторная функция* или *вектор-функция* скалярного аргумента. Векторная функция в трехмерном пространстве задается тремя координатами – скалярными (числовыми) функциями $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$.

Рассмотрим точку $M(x, y, z)$ в трехмерном координатном декартовом пространстве, координатные орты которого $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, и координатные функции $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$. Положение точки $M(x, y, z)$ в трехмерном пространстве определится векторной функцией

$$\vec{r} = \vec{r}_3(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}\,. \qquad (2)$$

С изменением скалярного параметра t точка M будет перемещаться в пространстве по некоторой линии, которая называется *годографом вектора* $\vec{r}(t)$.

Векторная функция скалярного аргумента осуществляет отображение пространства параметра-скаляра t в пространство n-мерных векторов. В трехмерном пространстве – это отображение: $\vec{r}_3(t): P(t) \to L_3(P)$.

1.4. Скалярная функция векторного аргумента

В общем случае рассматриваемые функции n-мерного пространства могут быть как линейными, так и нелинейными. Рассмотрение нелинейных функций создает большие трудности в изучении их характеристик и закономерностей. Поэтому одной из основных идей дифференциального исчисления является замена нелинейной функции функцией линейной, находящейся в ближайшем замкнутом (т. е. локальном) пространстве. Такая замена есть аппроксимация, то есть замена более простой функцией близкой по смыслу к исходной функции.

Одним из основных понятий дифференциального исчисления есть обобщенное понятие производной функции n-мерного пространства. К обобщенному понятию производной функции n-мерного пространства приводит локальная *линейная* аппроксимация *нелинейного* отображения. Производная функции оказывается линейным отображением $f' : \boldsymbol{L}_n \to \boldsymbol{L}_m$. Отображение $\boldsymbol{L}_n$ есть n-мерное линейное пространство с элементами вида

$$\vec{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$$

и с линейными операциями

$$\vec{x} + \vec{y} = [x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n]^T, \ \alpha\vec{x} = [\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n]^T,$$

Где $\vec{x}$, $\vec{y}$ произвольные векторы из $\boldsymbol{L}_n$, α – произвольно выбранное рациональное число.

Такому векторному пространству $\boldsymbol{L}_n$ может быть поставлено в соответствие любое n-мерное изоморфное пространство X, то есть между векторами $\boldsymbol{L}_n$ и X установлено взаимно однозначное соответствие.

Определение. *Функция многих переменных* – это отображение n-мерного изоморфного пространство $\boldsymbol{X} \subset \boldsymbol{L}_n \to \boldsymbol{L}_m$ по заданному правилу f, аргументом которого является вектор $\vec{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$, а значениями $f(\vec{x})$ есть *m – мерный вектор* $\vec{y} = [y_1, y_2, \dots, y_m]^T$.

Отображение $f : X \subset \boldsymbol{L}_n \to \boldsymbol{L}_m$ каждому элементу $x \in X \subset \boldsymbol{L}_n$ ставит в соответствие элемент $\vec{y} = f(\vec{x}) \in \boldsymbol{L}_m$. Вектор $\vec{y} = f(\vec{x})$ есть образ $\vec{x}$ в отображении f.

Функция $f(x)$ определяет способ получения координаты y_i множества $\boldsymbol{L}_m$

$$f(x) = \{y \in L_m \mid \exists x \in X : y \in f(x)\}.$$

Чтобы задать отображение $\vec{y} = f(\vec{x})$, следует указать способ, которым определяется каждая координата $y_1, y_2, \dots, y_m$ вектора $\vec{y} = f(\vec{x})$ по соответствующим координатам вектора $\vec{x}$. Для этого, задаются m координатных функций f_i таких, что

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n) \\ y_2 = f_2(x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n) \\ ... \quad\quad ... \quad\quad ... \\ y_i = f_i(x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n) \\ .. \quad\quad ... \quad\quad ... \\ y_m = f_m(x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n) \end{cases},$$

которые определяют отображение $\vec{y} = f(\vec{x})$, а каждая из координатных функций f_i есть отображение $f_i : \boldsymbol{X} \subset \boldsymbol{L}_n \rightarrow \boldsymbol{L}_m$..

Лекция № 2

Функции двух и трех переменных в евклидовом пространстве

2.1. Область определения и область значения функции двух переменных. Линии уровней. Функция трех переменных

Все понятия, положения и определения, рассматриваемые в предыдущей лекции для функций *n-переменных* легко применяются для функции двух переменных $n = 2$. В то же время, функция двух переменных более простая в понимании основных понятий и положений, а так же позволяет давать их геометрическую иллюстрацию.

Определение. Функцией двух независимых переменных (x, y) называется зависимая переменная z которой, по определенному правилу f, ставится в соответствие упорядоченная пара таких чисел, из некоторого множества $D \subset R^2$, что $z = f(x, y)$.

Графически функция двух переменных представляет собой плоскость или некоторую поверхность в трехмерном пространстве. Это множество точек трехмерного пространства (x, y, z), причем $z = f(x, y)$.

Независимые переменные x и y называются *аргументами*. Из определения функции следует, что каждой упорядоченной паре чисел (x, y) из множества D евклидова пространства ставится в соответствие функция z определенная на этом множестве, тогда множество D называется *областью определения* или *областью задания функции* $z = f(x, y)$. Область определения D является подмножество координатной плоскости Oxy.

Функция считается заданной, если имеется *правило* или *способ*, по которому находится вполне определенное единственное значение функции для каждой пары аргументов. Функция может задаваться алгебраической формулой, графически, функциональной шкалой, таблицей, словесным описанием или другими способами. Если функция задана явно, к примеру, алгебраической формулой, то область определения находится самой формулой.

Пример 1. Найти область определения функции $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 4}$. Область определения будет задаваться условием $x^2 + y^2 - 4 \geq 0$ или $x^2 + y^2 \geq 4$.Областью определения будет множество точек круга с центром в начале координат и радиусом равным двум (рисунок 2).

Пример 2. Найти область определения функции $z = ln\,(1 - x^2 + y^2)$. Так как логарифмическая функция определена только для положительных чисел, то $1 - x^2 + y^2 > 0$ или $x^2 + y^2 < 1$ (рисунок 3).

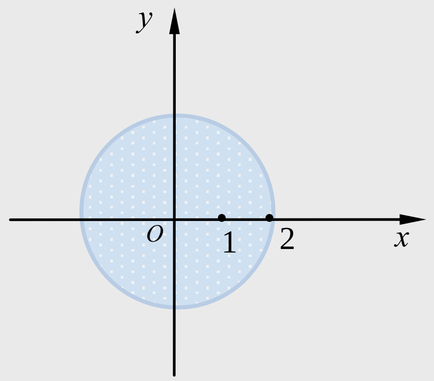


Рисунок 2

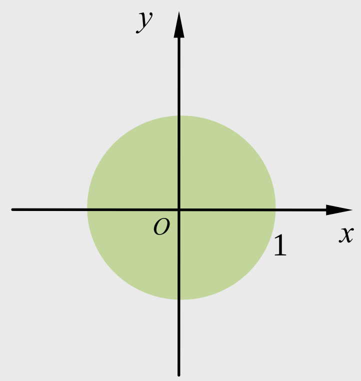


Рисунок 3

Значение функции $z = f\,(x, y)$ определенное парой чисел (x, y) есть некоторое множество вполне конкретных значений z. Совокупность конкретных значений функции определенных парой независимых аргументов (x, y) называется *областью значений функции.*

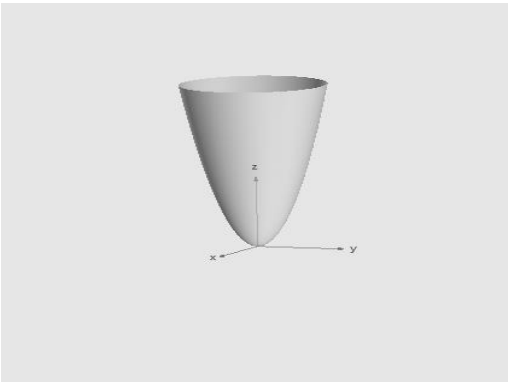


Рисунок 4

Определение. Если функция $z = f\,(x, y)$ определена в евклидовом пространстве на некотором множестве L точек плоскости имеющих одни и те же значения, то такая плоскость называется *линией уровня функции двух переменных.* Значения функции $z = f\,(x, y)$ на множестве L есть константа C, которая определяет линии уровня L_C.

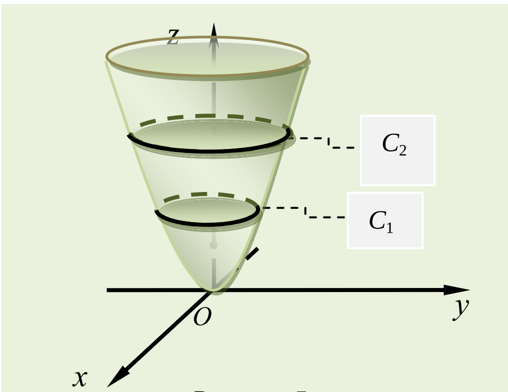


Рисунок 5

Пример 1. Найти область определения функции $z = x^2 + y^2$. Графиком такой функции будет параболоид вращения (рисунок 4). Областью определения функции $z = x^2 + y^2$ является вся координатная плоскость $Oxy \subset R^2$, множеством значений будут все положительные значения аппликаты $z_i \geq 0$.Линиями уровней C_1 и C_2 соответственно будут окружности с центрами на оси Oz, расположенные в плоскостях сечений параболоида параллельных плоскости Oxy (рисунок 5).

Пример 2. Найти область определения функции $z = \sqrt{x^2 - 4} + \sqrt{y^2 - 1}$. Графиком этой функции будет поверхность (рисунок 6).

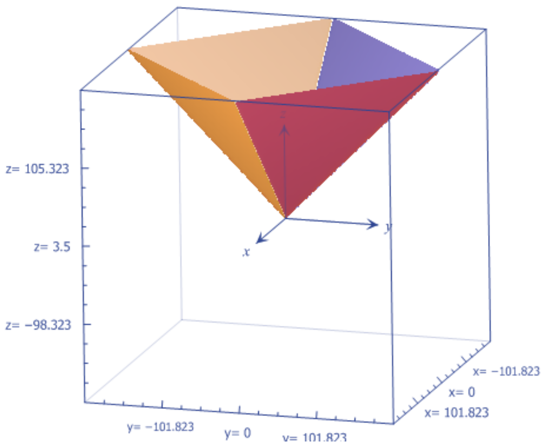


Рисунок 6

Функция имеет смысл, когда подкоренные выражения неотрицательны, следовательно, область определения задается двумя неравенствами: x^2 - 4 ≥ 0 и y^2 - 1 ≥ 0. На плоскости Oxy им соответствует множество точек (x, y), для которых $|x| \geq 2$, $|y| \geq 1$, т. е. все точки плоскости, которые не лежат внутри прямоугольника, ограниченного прямыми $x = \pm 2$ и $y = \pm 1$ (рисунок 7).

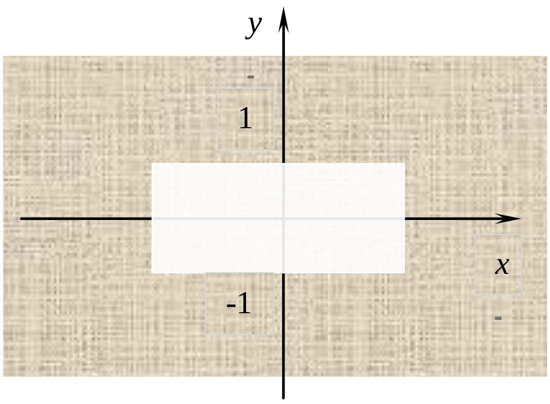


Рисунок 7

Определение. Функцией трех независимых переменных (x, y, z) называется зависимая переменная u которой, по определенному правилу f, ставится в соответствие упорядоченная тройка таких чисел, из некоторого множества $M \subset R^3$, что $u = f(x, y, z)$.

Наглядным примером функции трех переменных есть функция V, определяющая объём параллелепипеда со сторонами x, y, z: $V = x \cdot y \cdot z$.

Объём параллелепипеда может зависеть от одновременно изменяющихся аргументах (x, y, z), так и от изменения двух или одного из параметров. Если зафиксировать аргумент $x = x_0$, то объём становится функцией двух переменных. Любой функции двух переменных можно поставить в соответствие две *"частных"* функции одной переменной. При фиксированных двух аргументах $x = x_0$, $y = y_0$, V – функция становится функцией одной переменной. Любой функции трех переменных можно поставить в соответствие три *"частных"* функции одной переменной.

Функции трех переменных широко используются при определении объёмов различных видов в геометрических задачах и задачах экономики. Например, при исследования спроса на кой-либо товар по цене p и дохода потребителя r необходимо рассматривать влияние альтернативного товара по цене p_1, то есть рассматривается функция трех переменных $q = f(p, p_1, r)$.

2.2. Предел функции двух переменных. Непрерывность функции

Предел функции двух переменных

Рассмотрим функцию $z = f(x, y)$ определенную в евклидовом пространстве R^2 на множестве $L \subset R^2$. Все возможные пары чисел (x, y) образуют множество точек M с координатами (x, y), в которых определяются конкретные значения функции $z=f(x, y)$. Среди множества точек M найдется точка $M(x_0, y_0)$, в которой функция имеет некоторое конкретное значение A.

Определение. *Пределом функции* $f(x, y)$ в точке $M(x_0, y_0)$ называется число A при $x \to x_0$ и $y \to y_0$ или $M(x, y) \to A$, если для любого сколь угодно малого положительного числа ε найдется положительное число отвечающее ему число $\delta=\delta(\varepsilon)$ такое, что для всех точек $M(x, y)$, находящихся от точки $M(x_0, y_0)$ на расстоянии $0 < \rho\,[M(x, y), M(x_0, y_0)] < \delta$ *выполняется неравенство*

$$|f(x, y) - A| < \varepsilon.$$

Предел функции двух переменных обозначается так:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = A.$$

Пример. Найти предел функции $z = \dfrac{4 - x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $x \to 0$, $y \to 0$.

Решение. Запишем предел функции $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{4 - x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, введем обозначение $\sqrt{x^2 + y^2} = t$. Условие $x \to 0$, $y \to 0$ равносильно условию $t \to 0$. Перепишем предел с условием введенной замены

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{4 - x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{t \to 0} \frac{4 - t^2}{t} = \left[\frac{0}{0}\right].$$

Воспользуемся правилом Лопиталя для функции одной переменной. Найдем производные числителя и знаменателя упрощенной функции.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{4-x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{t\to 0}\frac{4-t^2}{t} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{t\to 0}\frac{-2t}{1} = 0 .$$

Заданная функция имеет конечный предел равный нулю.

Вычисление пределов функции двух переменных более сложная задача, чем нахождения предела функции одной переменной. Для функции двух переменных определение правого и левого пределов нет, так как направлений, по которым аргумент стремится к пределу на плоскости – множество. Пределы функций по отличным друг от друга направлениям будут разными.

Если точка $M\,(x, y)$ удалена от точки $M\,(x_0, y_0)$ на бесконечно большое расстояние $0 < \rho \to \infty$, то говорят что точка $M\,(x, y) \to \infty$.

Определение. *Пределом функции* $z = f\,(x, y)$ называется число A при $x \to \infty$ и $y \to \infty$ или

$M\,(x, y) \to \infty$, если для любого сколь угодно малого положительного числа ε найдется положительное число отвечающее ему $\delta=\delta\,(\varepsilon)$ такое, что для всех точек $M\,(x, y)$, находящихся от точки $M\,(x_0, y_0)$ на расстоянии $0 < \rho\,[M\,(x, y), M\,(x_0, y_0)] >> \delta \to \infty$ *выполняется неравенство*

$$|\, f\,(x, y) - A| < \varepsilon.$$

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} f\,(x, y) = A\,.$$

Непрерывность функции

Если функция $f\,(x, y)$ определенная в точке $M\,(x_0, y_0)$ евклидова пространства имеет конечный предел равный значению функции в этой точке

$\lim\limits_{\substack{x\to x\,0\\ y\to y\,0}} f\,(x, y) = f\,(x_0, y_0)$, то функция $f\,(x, y)$ *непрерывна в точке* $M\,(x_0, y_0)$.

Геометрический смысл непрерывности функции в точке заключается в том, что поверхность (плоскость) определяемая функцией сплошная без разрывов. Примером не непрерывной (разрывной) функцией является функция $z = ln\,(x^2 + y^2)$. Эта функция в точке $x = 0$ и $y = 0$ не определена, то есть имеет в точке (0, 0) разрыв.

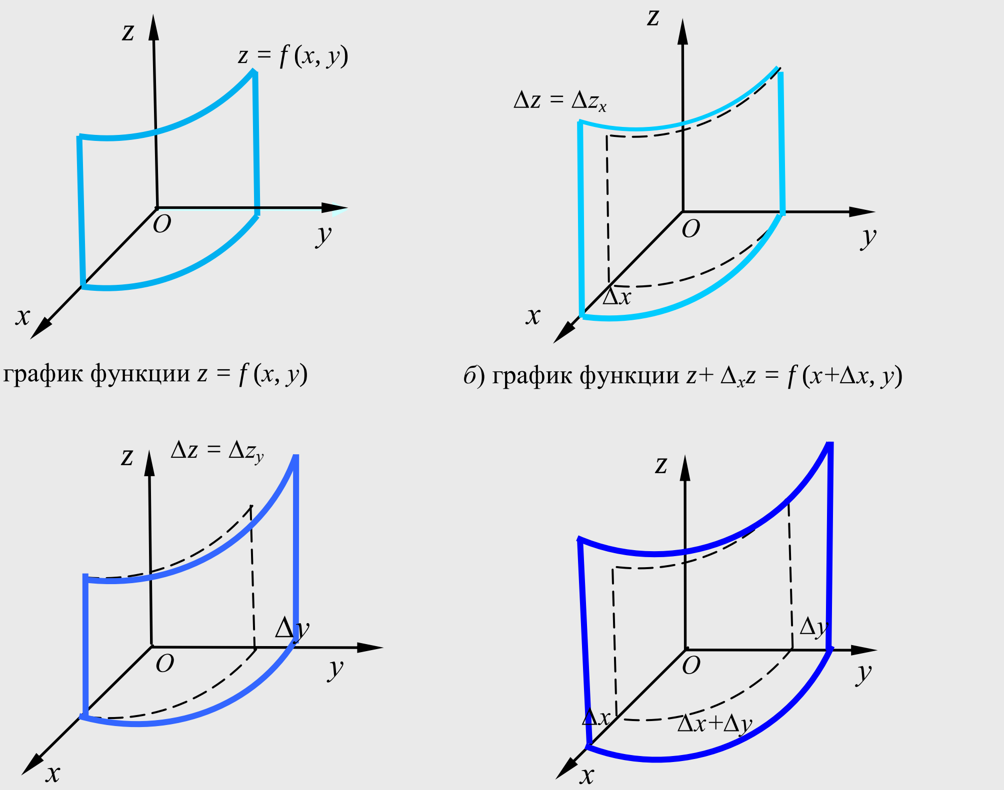
Можно рассматривать понятие непрерывности двух переменных по каждой переменной при фиксированном значении одной переменной, то есть частные виды функций двух переменных. Пусть в функции $z = f\,(x, y)$ зафиксирован аргумент

$y = y_0$, тогда функция $z = f\,(x, y_0)$ есть функция одной переменной.

Функция $z = f(x, y_0)$ будет *непрерывна в точке* (x_0, y_0), если в этой точке она определена имеет конечный предел $\lim\limits_{x \to x_0} y_0 f(x) = y_0 f(x_0)$.

Так же функция $z = f(x, y_0)$ будет *непрерывна в точке* (x_0, y_0), если в этой точке она определена и бесконечно малому приращению аргумента $x + \Delta x$ *соответствует бесконечно малое приращение функции* $\Delta_x z$, при этом конечный предел будет $\lim\limits_{\Delta x \to 0} y_0 f(x_0 + \Delta x) = y_0 f(x_0)$, в этом случае функция будет непрерывной.

Полное приращение функции



а) график функции $z = f(x, y)$ *б*) график функции $z + \Delta_x z = f(x + \Delta x, y)$

в) график функции $z + \Delta_y z = f(x, y + \Delta y)$ *г*) график функции $z + \Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y)$

Рисунок 8

В случае приращения одного из аргументов $x + \Delta x$ или $y + \Delta y$, функция имеет частное приращение $\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$ или $\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y)$ (рисунок 8). Если оба аргумента имеют приращения, то функция получает полное приращение:

$$\Delta z = f(x + \Delta x,\ y + \Delta y) - f(x, y).$$

Определение. Выражение $\Delta z = f(x + \Delta x,\ y + \Delta y) - f(x, y)$, определяющее величину приращения функции Δz *называется полным приращением функции.*

Рассмотрим примеры функций, для которых полные приращения функции равны сумме приращений аргументов и, когда полные приращения функции не равны сумме приращений аргументов.

Проверить выполнение равенства полного приращения функции сумме частных приращений аргументов.

Пример. Задана функция $z = x^2 + y^2$. Найти частные приращения функции и сравнить их сумму с полным приращением функции.

Решение. Найдем частные и полное приращения функции:

$$\Delta_x z = \left((x+\Delta x)^2 + y^2\right) - (x^2 + y^2) = x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 + y^2 - x^2 - y^2 = 2x\Delta x + \Delta x^2;$$

$$\Delta_y z = \left(x^2 + (y+\Delta y)^2\right) - (x^2 + y^2) = x^2 + y^2 + 2y\Delta y + \Delta y^2 - x^2 + y^2 = 2y\Delta y + \Delta y^2;$$

$$\Delta z = \left((x+\Delta x)^2 + (y+\Delta y)^2\right) - (x^2 + y^2) = x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 + y^2 + 2y\Delta y + \Delta y^2$$
$$-(x^2 + y^2) = 2x\Delta x + \Delta x^2 + 2y\Delta y + \Delta y^2;$$

Найдем сумму частных приращений и сравним с полным приращением функции

$$\Delta_x z + \Delta_y z = 2x\Delta x + \Delta x^2 + 2y\Delta y + \Delta y^2;\ \Delta z = 2x\Delta x + \Delta x^2 + 2y\Delta y + \Delta y^2.$$

Сумма частных приращений аргументов равна полному приращению функции

$$\Delta z = \Delta_x z + \Delta_y z.$$

Пример. Задана функция $z = x\,y^2$. Найти частные приращения функции и сравнить их сумму с полным приращением функции.

$$\Delta_x z = \left((x+\Delta x)y^2\right) - (xy^2) = xy^2 + \Delta x y^2 - xy^2 = \Delta x y^2;$$

$$\Delta_y z = \left(x(y+\Delta y)^2\right) - (xy^2) = x(y^2 + 2y\Delta y + \Delta y^2) - (xy^2) = 2yx\Delta y + x\Delta y^2;$$

$$\Delta_x z + \Delta_y z = 2yx\Delta y + x\Delta y^2 + \Delta x y^2.$$

$$\Delta z = \left((x+\Delta x)(y+\Delta y)^2\right) - (xy^2) = (x+\Delta x)(y^2 + 2y\Delta y + \Delta y^2) - (xy^2) =$$
$$= xy^2 + 2xy\Delta y + x\Delta y^2 + \Delta x y^2 + 2y\Delta x\Delta y + \Delta x\Delta y^2 - (xy^2) =$$
$$= 2xy\Delta y + x\Delta y^2 + \Delta x y^2 + 2y\Delta x\Delta y + \Delta x\Delta y^2.$$

$$\Delta_x z + \Delta_y z = 2yx\Delta y + x\Delta y^2 + \Delta x y^2;$$

$$\Delta z = 2xy\Delta y + x\Delta y^2 + \Delta x y^2 + 2y\Delta x\Delta y + \Delta x\Delta y^2.$$

В этом примере, сумма частных приращений аргументов не равна полному приращению функции $\Delta z \neq \Delta_x z + \Delta_y z$.

Лекция № 3

Частные производные и дифференциал функции двух переменных

3.1. Частные производные функции двух и трех переменных. Условия дифференцируемости и дифференциал функции двух переменных.
3.2. Касательная плоскость в точке поверхности функции z = $f(x, y)$. Геометрический смысл частных производных.
3.3. Производная по направлению. Градиент.

3.1. Частные производные функции двух и трёх переменных. Условия дифференцируемости функции двух переменных

Рассмотрим функцию $f(x, y)$ определенную в евклидовом пространстве R^2 на множестве $L \subset R^2$. На множестве определения такой функции найдется точка $M(x, y)$, в которой могут определяться конкретные частные приращения функции, то есть существует

$$z + \Delta_x z = f(x+\Delta x, y) \text{ и } z + \Delta_y z = f(x, y + \Delta y),$$

имеющие определенные значения пределов.

Определение. *Частной производной функции* $f(x, y)$ по одному из аргументов x или y называется предел отношения частного приращения функции $\Delta_x z$ или $\Delta_y z$ к соответствующим приращениям аргумента Δx, Δy, при условии стремления приращения аргумента к нулю.

Обозначаются частные производные символами:

$$z'_x;\ z'_y; \quad f'_x(x, y_0);\ f'_y(x_0, y); \quad \frac{\partial z}{\partial x};\ \frac{\partial z}{\partial y}; \quad \frac{\partial f}{\partial x};\ \frac{\partial f}{\partial y}\ .$$

Частная производная функции $f(x, y)$ по переменной x записывается так:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y_0) - f(x, y_0)}{\Delta x}.$$

Частная производная функции $f(x, y)$ по переменной y записывается так:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y+\Delta y) - f(x_0, y)}{\Delta y}.$$

Частные производные функции вычисляются при фиксированных значениях одного из аргументов (x – «*константа*» или y – «*константа*»). Таким образом, вычисление частных производных выполняется по правилам определение производной функции одной переменной.

Для функции трех переменных $V = (x, y, z)$ частные производные по одному из аргументов определяются при фиксировании двух других переменные. Например, частная производная по x, определяется при фиксировании двух других переменные y и z .

Определение. *Частной производной функции* $V = (x, y, z)$ по одному из аргументов называется предел отношения частного приращения функции $\Delta_x V$, $\Delta_y V$, $\Delta_z V$ к соответствующим приращениям аргумента Δx, Δy, Δz при условии стремления приращения аргумента к нулю.

Если в некоторой точке $M(x, y, z)$ евклидова пространства R^3 на множестве $D \subset R^3$ для функции $V = (x, y, z)$ существуют и определены частные приращения аргументов, то в э той точке функция имеет *частные производные по каждому аргументу*

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x V}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y_0, z_0) - f(x, y_0, z_0)}{\Delta x};$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y V}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y + \Delta y, z_0) - f(x_0, y, z_0)}{\Delta y};$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta_z V}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(x_0, y_0, z + \Delta z) - f(x_0, y_0, z)}{\Delta z}.$$

Рассмотрим примеры определения частных производных функций двух и трех переменных.

Найти частные производные функций:

а) $z = 2x^2 y + xy^3 - 4y + 5x$; б) $f(x, y, z) = xy^2 - 4yz + xy^2 z^3$.

Решение. а) $z = 2x^2 y + xy^3 - 4y + 5x$,

определим частную производную по переменной x, y – *константа*

$$z'_x = 4xy + y^3 + 5,$$

определим частную производную по переменной y, x – *константа*

$$z'_y = 2x^2 + 3xy^2 - 4.$$

б) $f(x, y, z) = xy^2 - 4yz + xy^2 z^3$,

определим частную производную по переменной x, (y, z) – *константы*,

$$f'_x(x, y, z) = y^2 + y^2 z^3,$$

определим частную производную по переменной y, (x, z) – *константы*,

$$f'_y(x, y, z) = 2xy - 4z + 2xyz^3,$$

определим частную производную по переменной z, (x, y) – *константы*,

$$f'_z(x, y, z) = -4y + 3xy^2 z^2.$$

Условия дифференцируемости функции двух переменных

Рассмотрим функцию $z = f(x, y)$ определенную в точке $M_0(x_0, y_0)$ евклидова пространства R^2 на множестве $L \subset R^2$. На множестве определения такой функции, найдется как угодно малая положительная окрестность δ точки $M_0(x_0, y_0)$, определяющая область $T(M_0, \delta)$, с точкой $M(x, y)$ принадлежащей этой области, $M(x, y) \in T(M_0, \delta)$. Расстояние от точки M_0 до M есть $\rho = \rho(MM_0) = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} < \delta$, приращения аргументов и приращение функции в любой точке области, $T(M_0, \delta)$ окрестности δ будут отличны от нуля $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$, $\Delta z = z - z_0$, $z = f(x, y)$, $z_0 = f(x_0, y_0)$.

Определение. Функция $z = f(x, y)$ будет *дифференцируемой* в данной точке $M_0(x_0, y_0)$, если существуют числа: A – число, независящее от приращения Δx и B – независящее от приращения Δy, такие что полное приращение функции имеет вид:

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y,$$

где α и β бесконечно малые функции.

Условием дифференцируемости функции в данной точке есть представление:

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y.$$

Дифференциал функции

Выражение $A\Delta x + B\Delta y$ – линейная функция переменных Δx и Δy *называется полным дифференциалом* функции $z = f(x, y)$ дифференцируемой в точке (x_0, y_0) и обозначается dz,

$$dz = A\Delta x + B\Delta y$$

Функция, дифференцируемая в точке (x_0, y_0) имеет все частные производные такие, что

$$\frac{\partial z}{\partial x} = A, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = B,$$

тогда, *частный дифференциал* определяется как произведение частной производной на приращение соответствующего аргумента

$$d_x z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x, \ d_y z = \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y \ \text{ или } \ d_x z = \frac{\partial z}{\partial x}dx, \ d_y z = \frac{\partial z}{\partial y}dy,$$

здесь приращения аргументов $\Delta x \cong dx$ и $\Delta y \cong dy$, которые называются дифференциалами аргументов.

Частные производные могут быть представлены в виде отношения частных дифференциалов к соответствующим приращениям аргумента

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{d_x z}{d\,x},\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{d_y z}{d\,y}.$$

Определение. *Дифференциалом функции двух переменных* z = f (x, y) называется сумма частных производных умноженных на приращения соответствующих аргументов

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

Если частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ функции z = f (x, y) принадлежат окрестности δ точки (x, y) и непрерывны в ней, то функция, дифференцируемая в этой точке, имеет полный дифференциал.

Дифференциал функции в приближенных вычислениях

Рассмотрим пример: по заданным значениям приращений аргументов найти полное приращение и дифференциал функции z = x (3 + y) в точке C (3, 2), если Δx = 0,05 и Δy = 0,04.

Решение:

$\Delta z = (x + \Delta x)(3 + y + \Delta y) - x(3 + y) = 3x + 3\Delta x + xy + \Delta xy + x\Delta y + \Delta x\Delta y - 3x - xy = 3\Delta x + \Delta xy + x\Delta y + \Delta x\Delta y$;

$\Delta z = 3\Delta x + \Delta xy + x\Delta y + \Delta x\Delta y = 3\cdot 0{,}05 + 0{,}05\cdot 2 + 3\cdot 0{,}04 + 0{,}05\cdot 0{,}04 =$

$= 0{,}15 + 0{,}10 + 0{,}12 + 0{,}0020 = 0{,}3720.$

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy = (3 + y)\,dx + x\,dy = (3 + y)\,\Delta x + x\,\Delta y,$$

$dz = (3 + 2)\cdot 0{,}05 + 3\cdot 0{,}04 = 0{,}25 + 0{,}12 = 0{,}37.$

Ответ: $\Delta z = 0{,}3720$, $dz = 0{,}37$.

В этом примере Δz отличается от dz на величину δ = 0,0020 – это бесконечно малая величина высшего порядка. В общем виде приближенная формула имеет вид:

$$\Delta z \cong dz \text{ или } f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

Вычисления по этой формуле дают высокие приближения с точностью до бесконечно малой величины высшего порядка.

3.2. Касательная плоскость в точке поверхности функции $z = f(x, \mathbf{y})$ Геометрический смысл частных производных

Касательная плоскость в точке поверхности функции $z = f(x, y)$

По аналогии с геометрической интерпретации производной функции одной переменной, как углового коэффициента касательной к графику функции в некоторой точке x_0, введем понятие касательной плоскости.

Определение. Плоскость *K*, проходящая через точку M_0, принадлежащую поверхности *P*, которая является графиком функции двух переменных $f(x, y)$, будет *касательной к поверхности P в точке* M_0, если на поверхности *P* имеется точка *M* отстоящая от M_0 на расстоянии $\rho(MM_0)$ и на расстоянии δ от плоскости *K*, то при стремлении $M \to M_0$, $\delta < \Delta f$ стремится к нулю ($\delta \to 0$). На рисунке 9 показаны плоскость *K* – касательная к поверхности *P* графика функции в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ точка $M(x, y, z)$, принадлежащая секущей плоскости *S* (прямая *S* есть след секущей плоскости) и поверхности *P*. Расстояние $\rho = \rho\ (MM_0) = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$,

$$\Delta x = x - x_0, \Delta y = y - y_0, \Delta z = z - z_0, z = f(x, y), z_0 = f(x_0, y_0).$$

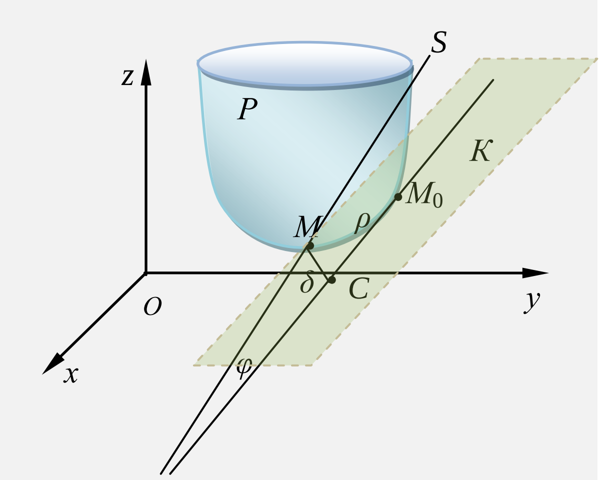


Рисунок 9

Расстояние точки *M* до касательной плоскости *K* есть $\delta = MC$. Точка *M* приближается к точке M_0 по дуге MM_0, при этом точка *M* приближается к точке *C*, а секущая плоскость приближается к касательной плоскости, угол $\varphi \to 0$. При стремлении расстояния

$$\rho(MM_0) = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

к нулю расстояние δ становится *бесконечно малой величиной высшего порядка.*

Таким образом, для существования касательной к поверхности, определенной функцией $z = f(x, y)$, в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ *необходимо и достаточно*, чтобы функция была дифференцируема в точке (x_0, y_0), такой, что $z_0 = f(x_0, y_0)$.

Геометрический смысл частных производных

Для простоты понимания и наглядности рассмотрим функцию $z = f(x, y)$, графиком которой является сфера P (рисунок 10).

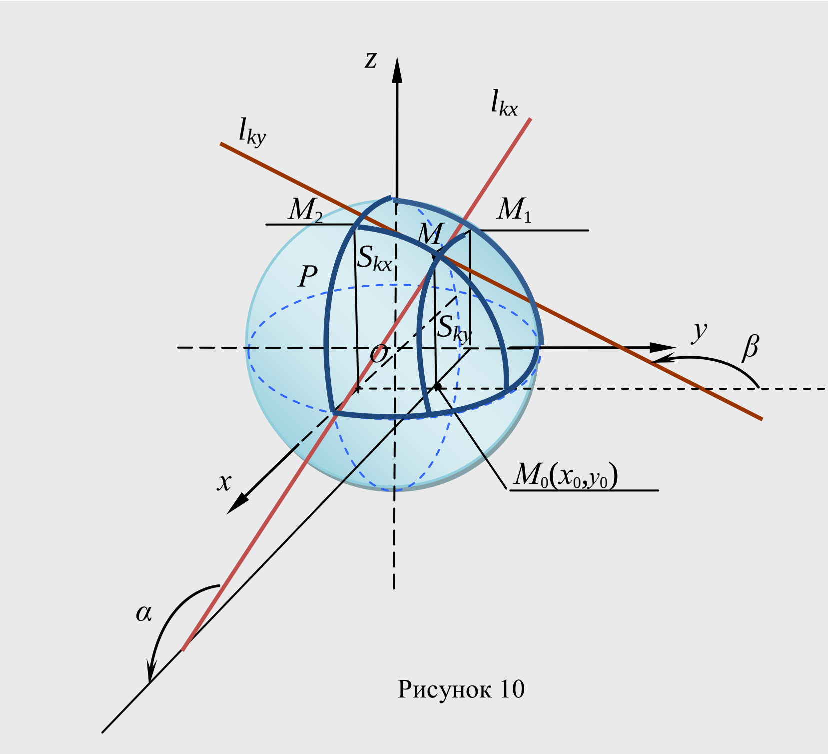


Рисунок 10

Выделим точку $M(x, y, z)$, принадлежащую ¼ части сферы, как показано на рисунке. Через эту точку проведем сечения S_{ky} и сечение S_{kx} перпендикулярные плоскости Oxy. Точке $M(x, y, z)$ соответствует точка $M_0(x_0, y_0)$ на координатной плоскости Oxy. Точка $M_1 \in P$ имеет координаты $(x+\Delta x, y, z+\Delta_x z)$,

$M_2 \in P$ имеет координаты $(x, y+\Delta y, z+\Delta_y z)$.

Запишем пределы отношений: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta_x z}{\Delta x} = \dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{\Delta_y z}{\Delta y} = \dfrac{\partial z}{\partial y}$. Отношение $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ есть тангенс угла наклона образуемого секущей, содержащей отрезок MM_1 с положительным направлением оси Ox, $\dfrac{\partial z}{\partial x} = tg\alpha$. Аналогично, отношение $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ есть тангенс угла наклона образуемого секущей, содержащей отрезок MM_2 с положительным направлением оси Oy, $\frac{\partial z}{\partial y} = tg\beta$.

Частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ численно равны тангенсам углов наклона касательных проведенных в заданной точке поверхности, определенной функцией $z = f(x, y)$, к линиям поверхности образованных сечениями графика при постоянных значениях переменных y или x с положительными направлениями осей Ox или Oy соответственно.

Следует отметить, что изменение частных производных $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ происходит по направлениям параллельным осям Ox и Oy.

3.3. *Производная по направлению. Градиент функции*

Рассмотрим функцию $u = f(x, y, z)$ определенную в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ евклидова пространства R^3. Как отмечалось ранее, для функций евклидова пространства пределы по отличным друг от друга направлениям будут различными, следовательно, по разным направлениям, так же будут различными частные приращения и частные производные функции. Пусть для функции $u = f(x, y, z)$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ существуют и определены частные приращения и производные по всем направлениям каждого аргумента. Будем рассматривать некоторую прямую, проходящую через точку M_0 в определенном направление, которое задано единичным вектором:

$$\vec{e} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma),$$

длина вектора:

$$|\vec{e}| = \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Определение. Косинусы ($\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$) называются *направляющими косинусами* углов, образованных единичным вектором $\vec{e}$ с осями координат.

Придадим аргументам функции $u = f(x, y, z)$ приращения вдоль направленной прямой l, заданной единичным вектором $\vec{e}$. Тогда на прямой l обозначится точка $M(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$ такая, что образуется направленный отрезок $\overrightarrow{M_0M}$, длиной $|\overrightarrow{M_0M}| = \Delta l$ и $\Delta x = \Delta l\, cos\alpha$, $\Delta y = \Delta l\, cos\beta$, $\Delta z = \Delta l\, cos\gamma$. В точке M функция $u = f(x, y, z)$ получает приращение $\Delta_l u$ по направлению прямой l

$$\Delta_l u = f(x_0 + \Delta l\, cos\alpha, y_0 + \Delta l\, cos\beta, z_0 + \Delta l\, cos\gamma) - f(x_0, y_0, z_0).$$

Производная функции $u = f(x, y, z)$ в точке M есть предел отношения приращения функции в этой точке $\Delta_l u$ к приращению Δl , при $\Delta l \to 0$,

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial l} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta\cos\alpha, y_0 + \Delta\cos\beta, z_0 + \Delta\cos\gamma) - f(x_0, y_0, z_0)}{\Delta l}.$$

Таким образом, вдоль прямой l координаты функции (x, y, z) зависят от l, то есть координаты функции l, сама функция $u = f(x, y, z)$ есть сложная функция одной переменной l.

Определение. *Производной по направлению* l, называется производная сложной функции по переменной l, определенная пределом отношения приращения функции в точке (M_0) по направлению заданному единичным вектором $\vec{e}$, к величине перемещения $\Delta l \to 0$,

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta_l u}{\Delta l}.$$

Как быстро изменяется функция по заданному направлению, определяется её производной $\frac{\partial u}{\partial l}$ по этому направлению. Частные производные по аргументам $\frac{\partial u}{\partial x}; \frac{\partial u}{\partial y}; \frac{\partial u}{\partial z}$ есть координаты вектора характеризующего "скорость" изменения функции по направлению соответствующих координатных осей.

Градиент функции

Понятие *градиента* вводится как вектор, указывающий направление наибольшей "скорость" возрастания функции. Обозначается градиент символом ∇u, ∇z,... или grad u, grad z , ….

Определение. *Градиент функции* ∇u в заданной точке это *вектор, с координатами* $\left(\frac{\partial u}{\partial x}; \frac{\partial u}{\partial y}; \frac{\partial u}{\partial z}\right)$, *указывающий направление* возрастания функции.

Рассмотрим скалярное произведение двух векторов ($\nabla u \cdot \vec{e}$). Так как скалярное произведение двух векторов есть сумма произведений соответствующих координат, то

$$(\nabla u \cdot \vec{e}) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}; \frac{\partial u}{\partial y}; \frac{\partial u}{\partial z}\right) \cdot (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma,$$

$$(\nabla u, \vec{e}) = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma,$$

скалярное произведение градиента и единичного вектора, определяющего направление прямой l, есть производная функции $u = f(x, y, z)$ по направлению, следовательно:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = (\nabla u, \vec{e}).$$

Определим связь между производной в некоторой точки $M(x, y, z)$ графика функции $u = f(x, y, z)$, по произвольно выбранному направлению l, и градиентом функции. Пусть на поверхности графика функции $u = f(x, y, z)$ выбрана точка M такая, что в направлении l существует производная $\frac{\partial u}{\partial l}$ (рисунок 11).

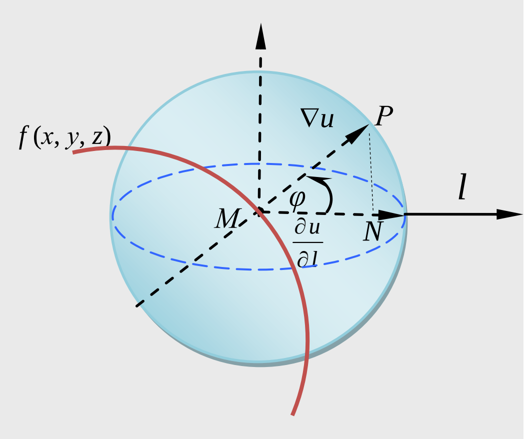


Рисунок 11

Вектором градиента ∇u может быть любой радиус – вектор $|\overrightarrow{MP}| = |\nabla u|$. Пусть $\overrightarrow{MP}$ образует с направлением l угол φ, тогда произведение $|\nabla u| \cos\varphi = \frac{\partial u}{\partial l}$ есть проекция MN вектора градиента ∇u на направление производной $\frac{\partial u}{\partial l}$. Если $\cos\varphi = 1$, градиент имеет наибольшее значение. Если $\cos\varphi = 0$, то есть вектор градиента ∇u перпендикулярен направлению l, и производная по направлению l равна нулю.

Геометрический смысл вектора градиента функции

Понятие *линией уровня функции двух переменных* введено в первой лекции, и на функции трех и многих переменных, имеет место понятие *поверхностей уровня функции*. Поверхности, определенные функцией в евклидовом пространстве на некотором множестве R^3, в каждой точке, которой функция имеет одни и те же значения, то есть $u = f(x, y, z) = C$.

Если через точку M к поверхности уровня функции $u = f(x, y, z) = C$ провести касательную плоскость, то вектор градиента функции ∇u будет перпендикулярен касательной плоскости в точке M. Для функции двух переменных $z = f(x, y)$ линии уровней задаются уравнением $f(x, y) = C$, градиент функции направлен перпендикулярно к линии уровня $f(x, y) = C$.

Пример. Определить вектор градиента функции $u = f(x, y, z) = x^3 + 3y^2 - 2z^2$ в точке $M_0(1, 2, 3)$ и производную по направлению $\overrightarrow{M_0M}$, $M(0, 1, 2)$.

Решение. Найдем частные производные функции в точке $M_0(1, 2, 3)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 6y; \quad \frac{\partial f}{\partial z} = -4z.$$

Вычислим значения частных производных в точке $M_0(1, 2, 3)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=3;\ \ \frac{\partial f}{\partial y}=12;\ \ \frac{\partial f}{\partial z}=-12.$$

Вектор градиента функции: $\nabla u=\left(\frac{\partial u}{\partial x};\frac{\partial u}{\partial y};\frac{\partial u}{\partial z}\right)$, ∇u = (3, 12, – 12).

Для определения производной по направлению найдем единичный вектор, имеющий заданное направление $\vec{l}=\overrightarrow{M_0M}$ = (–1, –1, –1) = –1$\boldsymbol{i}$ – 1$\boldsymbol{j}$ – 1$\boldsymbol{k}$, где $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ – единичные векторы с координатами $\boldsymbol{i}$ = (1, 0, 0), $\boldsymbol{j}$ = (0, 1, 0), $\boldsymbol{k}$ = (0, 0, 1).

Вычислим модуль вектора $\overrightarrow{M_0M}$: $|\overrightarrow{M_0M}|=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{3}$.

Вычислим направляющие косинусы вектора $\overrightarrow{M_0M}$, найдем отношение

$$\frac{\overrightarrow{M_0M}}{|\overrightarrow{M_0M}|}=\frac{-1\vec{i}-1\vec{j}-1\vec{k}}{\sqrt{3}}=-\frac{1}{\sqrt{3}}\vec{i}-\frac{1}{\sqrt{3}}\vec{j}-\frac{1}{\sqrt{3}}\vec{k}\to$$

$$\to\cos\alpha=-\frac{1}{\sqrt{3}};\ \cos\beta=-\frac{1}{\sqrt{3}};\ \cos\gamma=-\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Найдем производную по направлению

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma=-\frac{3}{\sqrt{3}}-\frac{12}{\sqrt{3}}-\frac{-12}{\sqrt{3}}=-\sqrt{3}.$$

Ответ: ∇u = (3, 12, – 12), $\frac{\partial u}{\partial l}=-\sqrt{3}$.

Лекция № 4

Дифференциалы функций и частные производные высших порядков и их применение при исследовании функций на экстремум

4.1. Производные и дифференциал сложной функции.

4.2. Частные производные высших порядков. Дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора.

4.3. Экстремумы функций. Исследование функций двух переменных на экстремум. Наибольшее и наименьшее значение функции.

4.1. Производная и дифференциал сложной функции

Рассмотрим функцию $z = f(u, g)$, где $u = t(x, y)$, $g = s(x, y)$, определенную в евклидовом пространстве. Функция $f(u, g)$ сложная, так как её аргументы есть так же функции независимых переменных x и y, назовем u и g – функции-аргументы. Тогда функция $z = f(u, g)$ может быть выражена через независимые переменные x и y: $z = f[t(x, y), s(x, y)]$.

Пусть в каждой точке множества определения функции $f(u, g)$ и $u = t(x, y)$, $g = s(x, y)$ существуют непрерывные частные производные по всем аргументам u, g, x, y.

Придадим приращение аргументу $(x+\Delta x)$ функции z при постоянном значении y, тогда получим приращения $\Delta_x u$, $\Delta_x g$ и $\Delta_x z = \dfrac{\Delta z}{\Delta x}$, выразим приращение функции через приращения аргументов

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\Delta_x u}{\Delta x} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\Delta_x g}{\Delta x} + \alpha\frac{\Delta_x u}{\Delta x} + \beta\frac{\Delta_x g}{\Delta x}.$$

Переходя к пределу при $\Delta x \to 0$, тогда и $\Delta_x u \to 0$, $\Delta_x g \to 0$ получаем

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial g}\frac{\partial g}{\partial x},$$

Таким образом, частная производная сложной функции по переменной x есть сумма произведений частных производных сложной функции по аргументу функции u переменной x на частную производную функции-аргумента g по переменной x.

Если переменная y зависит от x, то $y = u(x)$, тогда функции $u = t(x)$, $g = s(x)$, так же зависят только от x. Тогда полная производная функции z *по* x запишется следующим образом:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial g}\frac{\partial g}{\partial x} \quad \text{или}$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial g}\frac{\partial g}{\partial x}.$$

Аналогичными рассуждениями, оставляя постоянным значение переменной x и задавая приращения ($y+\Delta y$) получим частную производную и полную производную функции z *по* y

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial g}\frac{\partial g}{\partial y},$$

$$\frac{dz}{dy} = \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial g}\frac{\partial g}{\partial y}.$$

Рассмотрим пример: найти частные производные сложной функции:

$z = u^2 g^2$, $u = x + 2y$, $g = x^2 y$.

Решение.

Найдем частную производную по переменной x:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial g}\frac{\partial g}{\partial x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = 2u g^2 = 2(x+2y)x^4y^2; \quad \frac{\partial z}{\partial g} = 2u^2 g = 2(x+2y)^2 x^2 y;$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1; \quad \frac{\partial g}{\partial x} = 2xy;$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial g}\frac{\partial g}{\partial x}; \quad \frac{\partial z}{\partial x} = 2u g^2 + 2u^2 g \cdot 2xy;$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2(x+2y)x^4y^2 + 2(x+2y)^2 x^2 y \cdot 2xy.$$

Найдем частную производную по переменной y:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial g}\frac{\partial g}{\partial y},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2; \quad \frac{\partial g}{\partial y} = x^2,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial g}\frac{\partial g}{\partial y}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 4u g^2 + 2u^2 g \cdot x^2;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 4(x+2y)x^4y^2 + 2(x+2y)^2 x^4 y.$$

4.2. Частные производные высших порядков. Дифференциалы высших порядков

Частные производные высших порядков

Рассмотрим функцию двух переменных $z = f(x, y)$ на множестве $L_n \subset R^2$ и существующую в каждой точке множества определения функции $\{M_n\}$. В каждой точке $M(x_1, y_1)$, $M(x_2, y_2)$, …, $M(x_n, y_n)$ множества $\{M_n\}$ функция имеет частные производные первой степени $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$, которые так же есть функции аргументов (x, y). Если частные производные в точках $\{M_n\}$ существуют и непрерывные, то частные производные первой степени так же могут иметь производные в точках $\{M_n\}$.

Частные производные от производных первого порядка на одном и том же множестве определения функции $\{M_n\}$ называются ***частными производными второго***.

Частные производные второго порядка вычисляются по правилам вычисления частных производных первого порядка и обозначаются, как:

$$\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right)' = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2},\ f''_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2},\ f^{(2)}_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2},$$

$$\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)' = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2},\ f''_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2},\ f^{(2)}_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y},\ f''_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y},\ f^{(2)}_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y},$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y},\ f''_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x},\ f^{(2)}_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

Производные $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ – смешанные частные производные второго порядка функции $f(x, y)$, причем $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

Рассмотрим пример: вычислить все частные производные второго порядка в точке $M(2, 1)$ функции $f(x, y) = 2x^4 + 3x^3y^2 + 2xy + y^4 - 5x$.

Решение. Найдем частные производные функции первого порядка

$f_x'(x, y) = 8x^3 + 9x^2y^2 + 2y - 5$; $f_y'(x, y) = 6x^3y + 2x + 4y^3$.

Находим все частные производные функции второго порядка

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 24x^2 + 18xy^2\ ;\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6x^3 + 12y^2\ ;\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 18x^2y + 2\ ;\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 18x^2y + 2\ .$$

Функции смешанных частных производных функции второго порядка имеют одинаковый вид, то есть равны:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 18x^2 y + 2 \ .$$

Вычислим частные производные второго порядка в точке M (2, 1):

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 24x^2 + 18\,xy^2 = 132\ ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6x^3 + 12y^2 = 60\ ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 18x^2 y + 2 = 74.$$

Ответ: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 132$; $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 60$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 74$.

Частные производны от производных второго порядка на одном и том же множестве определения функции $\{M_n\}$ называются частными производными третьего порядка.

Частные производные третьего порядка вычисляются по общим правилам вычисления частных производных от производных второго порядка и имеют обозначения:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}, \quad f^{(3)}_{xxx} = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}; \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}, \quad f^{(3)}_{yyy} = \frac{\partial^3 f}{\partial y^3};$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}; \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial x\, \partial y^2}; \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial x\, \partial y \partial x} \ .$$

Если на множестве $L_n \subset R^n$ в каждой точке множества существует и определена функция $u = f\,(x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n)$ и имеет частные производные до $(n$ - 1)-го порядка, то частная производная n-го порядка есть производная от частной производной $(n$ - 1) - го порядка

$$f^{(n)}\,(x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n) = (f^{(n-1)}\,(x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n)'.$$

Пример. Найти частные производные третьего порядка функции:

$f\,(x, y) = 2x^4 + 3x^3y^2 + 2xy + y^4 - 5x.$

Решение. Найдем частные производные функции первого порядка:

$f_x'(x, y) = 8x^3 + 9x^2y^2 + 2y - 5;$ $\qquad f_y'(x, y) = 6x^3y + 2x + 4y^3.$

Находим все частные производные функции второго порядка:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 24x^2 + 18xy^2\ ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6x^3 + 12y^2\ ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 18x^2 y + 2\ ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 18x^2 y + 2\ .$$

Находим все частные производные функции третьего порядка:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = 48x + 18y^2\ ; \ \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = 18x^2\ ; \ \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = 36xy\ ; \ \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = 18x^2\ ; \ \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x} = 36xy\ ; \ \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y} = 18x^2\ .$$

Рассмотрим функцию двух переменных z = $f(x, y)$ для которой существуют непрерывные первые и вторые частные производные на множестве $L_n \subset R^2$, то есть функция дважды дифференцируема в каждой точке L_n . Первый дифференциал функции двух переменных z = $f(x, y)$ определяется суммой частных производных умноженных на приращения соответствующих аргументов

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy,$$

при этом дифференциал dz остается функцией от x, y. Сомножители dx и dy частных производных есть приращения аргументов x и y и не зависят от их значений.

Дифференциал функции dz двух переменных x и y, называется *вторым дифференциалом* $d(dz)$ функции z = $f(x, y)$ или *дифференциалом второго порядка.*

Запишем дифференциал от дифференциала первого порядка

$$d\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right) = \left(d\frac{\partial z}{\partial x}\right)dx + \left(d\frac{\partial z}{\partial y}\right)dy =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dy\right)dx + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy\right)dy =$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2 =$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2.$$

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2 = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 \cdot f(x, y).$$

Квадратичная форма относительно переменных dx и dy соответствующая билинейной форме дифференциала от дифференциала первого порядка называется *дифференциалом второго порядка*

Аналогичным образом определяются дифференциалы третьего и более высокого n-го порядков при условии существования непрерывных частных производных предыдущих порядков, то есть (n - 1) - го.

$$d^3 z = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^3 \cdot f(x, y).$$

В общем виде дифференциал n-го порядка определяется формулой:

$$d^n z = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \ \frac{\partial^n z}{\partial x^{n-k} \partial y^k} dx^{n-k}\, dy^k \ .$$

Таким образом, дифференциал п-го порядков, есть сумма многочлен непрерывных производных предыдущих порядков в некоторой малой окрестности точки, в которой определена функция.

Пример. Найти дифференциал третьего порядка функции

z = $f(x, y) = 2x^4 + 3x^3y^2 + 2xy + y^4 – 5x$.

Решение. Найдем дифференциал функции первого порядка:

$dz = (8x^3 + 9x^2y^2 + 2y – 5)\, dx +(6x^3y + 2x + 4y^3)\, dy$.

Найдем дифференциал функции второго порядка:

$d\,(dz) = d\,[(8x^3 + 9x^2y^2 + 2y – 5)\, dx +(6x^3y + 2x + 4y^3)\, dy]$;

$d^2z = d\,[(8x^3 + 9x^2y^2 + 2y – 5)\, dx] + d\,[(6x^3y + 2x + 4y^3)\, dy] = (24x^2 +18xy^2)\, (dx)^2 + (18x^2y +2)\, dx$

$dy +(18x^2y +2)\, dy\, dx +(6x^3 + 12y^2)\, (dy)^2$;

$d^2z = (24x^2 +18xy^2)\, (dx)^2 + 2(18x^2y +2)\, dx\, dy +(6x^3 + 12y^2)\, (dy)^2$;

Найдем дифференциал функции третьего порядка:

$d\,(d^2z) =d\,[(24x^2 +18xy^2)\, (dx)^2 + 2(18x^2y +2)\, dx\, dy +(6x^3 + 12y^2)\, (dy)^2]$;

$d^3z = [(24x^2 +18xy^2)\, (dx)^2]\, dx + [(24x^2 +18xy^2)\, (dx)^2]\, dy +$

$+ 2[(18x^2y +2)\, dx\, dy]\, dx +2[(18x^2y +2)\, dx\, dy]\, dy +$

$+ [(6x^3 + 12y^2)\, (dy)^2]\, dx + [(6x^3 + 12y^2)\, (dy)^2]\, dy =$

$= (48x +18y^2)\, (dx)^3 + 108\, xy\, (dx)^2\, dy + 54x^2\, dx\, (dy)^2 + 24y\, (dy)^3$.

Ответ: $d^3z = (48x +18y^2)\, (dx)^3 + 108\, xy\, (dx)^2\, dy + 54x^2\, dx\, (dy)^2 + 24y\, (dy)^3$.

Формула Тейлора

Рассмотрим функцию двух переменных z = $f(x, y)$ для которой существуют непрерывные частные производные до n-го порядка на множестве $L_n \subset R^n$ в точке $M_0(x_0, y_0)$, то есть функция n-раз дифференцируема в окрестности δ точки $M_0(x_0, y_0)$. В окрестности δ найдется некоторая точка $M\,(x, y)$ такая, что $M(x, y) = M\,(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$,

$\rho(M_0 M) = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} < \delta$ и существует $0 < \varepsilon = \varepsilon\,(\Delta x, \Delta y) < 1$, при этом выражение полного приращения функции есть многочлен суммы произведений приращений на соответствующие частные производные до n-го порядка включительно и малого остаточного члена, выраженного функцией $r_n\,(\Delta x,\,\Delta y)$ в этой малой окрестности точки

$$\begin{aligned}\Delta z &= f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0) = \\ &= \Delta x\frac{\partial z}{\partial x} + \Delta y\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{1}{2!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x} + \Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{\{2\}} f(x_0, y_0) + \\ &+ \frac{1}{3!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x} + \Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{\{3\}} f(x_0, y_0) + \frac{1}{4!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x} + \Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{\{4\}} f(x_0, y_0) + \ldots \\ &\ldots + \frac{1}{(n-1)!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x} + \Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{\{n-1\}} f(x_0, y_0) + r_{n-1}(\Delta x, \Delta y).\end{aligned}$$

Полное приращение функции можно записать более краткой формулой:

$$\Delta z = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{(k)!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x} + \Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{\{k\}} f(x_0, y_0) + r_{n-1}(\Delta x, \Delta y),$$

эта формула называется *формулой Тейлора* (n - 1)-го *порядка* функции z = $f\,(x,\,y)$, функция $r_{n-1}(\Delta x,\ \Delta y)$ – *остаточный член* в формуле Тейлора.

В математическом анализе используются несколько форм остаточного члена формулы Тейлора:

- *форма Лагранжа*

$$r_{n-1}(\Delta x, \Delta y) = \frac{1}{n!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x} + \Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{\{n\}} f(x_0 + \varepsilon\,\Delta x, y_0 + \varepsilon\,\Delta y);$$

- *форма Пеано*

$$r_n(\Delta x, \Delta y) = \sum_{k=0}^{n}\varepsilon_k(\Delta x, \Delta y)\Delta x^k\,\Delta y^{n-k}.$$

При $M\,(x,\,y) \to\ M_0(x_0,\,y_0)$, $\rho(M_0M) = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \to 0$ и предел функция $\varepsilon(\Delta x,\,\Delta y)$ при $\rho \to 0$ будет равен нулю для каждого слагаемого r_n, $\lim\limits_{\rho\to 0}\varepsilon_k(\Delta x, \Delta y) = 0$. Остаточный член $r_n(\Delta x,\,\Delta y)$ будет определяться величиной *бесконечно малой величиной* $o(\rho^n)\ = \varepsilon(\Delta x,\,\Delta y)\,\rho^n$, то есть

$$r_n\,(\Delta x,\,\Delta y) = o(\rho^n).$$

Формула Тейлора одна из основных формул математического анализа, имеющая применение для вычисления с определенным приближением значений функций.

Лекция № 5

Экстремумы функций. Исследование функций двух переменных на экстремум. Наибольшее и наименьшее значение функции

5.1. Экстремумы функций.

5.2. Исследование функций двух переменных на экстремум.

5.3. Наибольшее и наименьшее значение функции.

5.4. Понятие условного экстремума

5.1. Экстремумы функций. Необходимые и достаточные условия существования экстремума

Экстремумы функций

Аналогично теории определения максимума и минимума функции одной переменной с помощью производной вводятся условия максимума и минимума функции двух и более переменных.

Рассмотрим функцию двух переменных $z = f(x, y)$ которая определена на множестве $L_n \subset R^n$ и непрерывна в точке $M(x_0, y_0)$.

Определение. Если существует такая окрестность δ точки $M(x_0, y_0)$, что для всех точек $(x, y) \in \delta$ выполняются неравенства

$$f(x_0, y_0) - f(x, y) \geq 0,$$

то точка $M(x_0, y_0)$ *называется точкой максимума*,

$$f(x_0, y_0) - f(x, y) \leq 0,$$

то точка $M(x_0, y_0)$ *называется точкой минимума.*

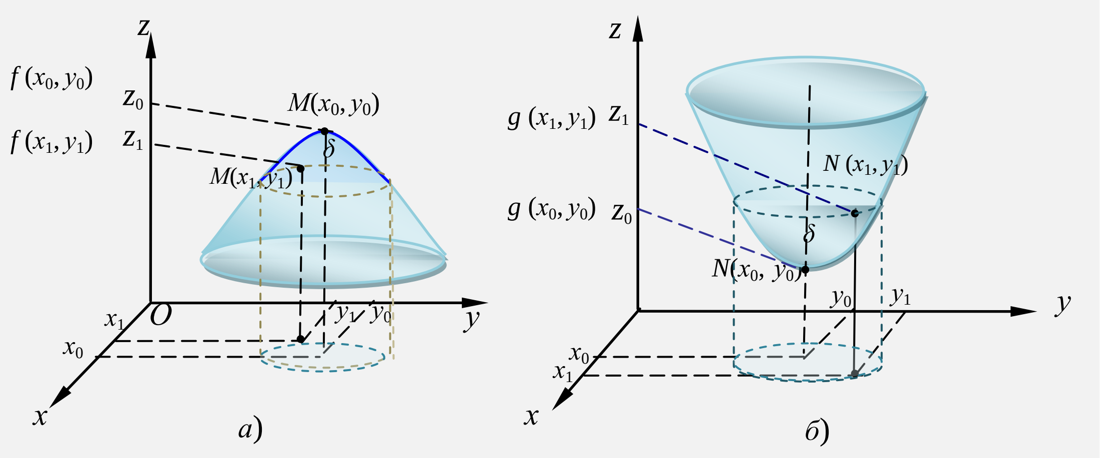


Рисунок 12

На рисунке 12 *а*) показам максимум функции z = $f(x, y)$, в некоторой окрестности δ точки $M(x_0, y_0)$, на рисунке 12 *б*) показам минимум функции z = $g(x, y)$ в окрестности δ точки $N(x_0, y_0)$. Максимальное или минимальное значение функции рассматривается в малой окрестности точек $M(x_0, y_0)$ или $N(x_0, y_0)$, то есть максимум или минимум функции имеет *локальный характер.* Точки, в которых функция достигает максимума и минимума, *называются точками экстремума*.

Необходимым условием существования точки экстремума для функции одной переменной, есть равенство нулю производной функции в этой точке. Для функции $f(x, y)$ двух переменных необходимое условие существования точки экстремума сводится к равенству нулю частных производных первого порядка.

Функция $f(x, y_{const})$ достигает экстремума в точке x, когда

$$\frac{\partial f(x, y_{const})}{\partial x} = 0,$$

аналогично $f(x_{const}, y)$ достигает экстремума в точке y, когда

$$\frac{\partial f(x_{const}, y)}{\partial y} = 0.$$

Определение. Чтобы функция двух переменных $f(x, y)$ имела точку экстремума $M(x, y)$, ***необходимо*** чтобы в этой точке *частные производные* $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$ и $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ были *равны нулю* или *не существовали*.

Если частные производные существуют, то в точках максимума или минимума градиент функции $\nabla f = 0$.

Точки, в которых частные производные функции по независимым переменным равны нулю, *называются стационарными или критическими точками функции. В стационарных точках определяется максимум или минимум функции.*

По аналогии функции одной переменной, можно утверждать: чтобы в стационарной точке M (x, y) был максимум ***необходимо существование*** *в этой точке вторых производных, не превосходящих нуль*, т.е.

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} \le 0, \ \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} \le 0,$$

необходимым условием существования минимума *есть*

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} \ge 0, \ \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} \ge 0.$$

Если по виду функции или её графика можно уверенно определить наличие точек экстремума, то достаточно определения стационарных точек и знаков вторых производных функции в этих точках. В других случаях требуется дополнительно рассматривать уже достаточные условия существования экстремума функции.

Достаточные условия существования экстремума функции

Рассмотрим функцию двух переменных $z = f(x, y)$ которая определена на множестве $L_n \subset R^n$ и непрерывна в точке $M(x_0, y_0)$, в которой существуют и непрерывны частные производные второго порядка

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}; \ \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}; \ \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x}.$$

В зависимости от знака вторых производных в стационарной точке $M(x_0,y_0)$, то есть положительные или отрицательные числовые значения производных, определяется максимум или минимум.

Введем обозначения, пусть

$$\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2} = A, \ \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y \partial x} = B, \ \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2} = C,$$

тогда:

- если число A *положительное* ($A>0$), то в точке $M(x_0, y_0)$ имеется минимум,
- если число A *отрицательное* ($A<0$), то в точке $M(x_0, y_0)$ имеется максимум,
- если $AC - B^2 > 0$, то в точке $M(x_0, y_0)$ имеется экстремум функции,
- если $AC - B^2 < 0$ функция экстремума не имеет,
- если $AC - B^2 = 0$ наличие экстремума в точке не определено.

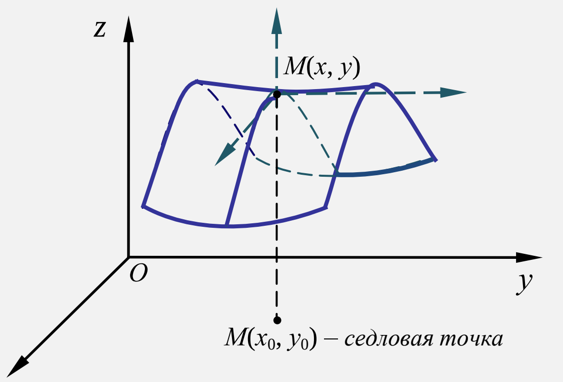


Рисунок 13

На рисунке 13 показан график функции с *седловой точкой* M (x_0, y_0), в которой функция определена и непрерывна, может иметь первые производные равные нулю, но не является точкой экстремума.

Седловая точка это точка, принадлежащая области определения функции и является стационарной, но не является локальным экстремумом.

Таким образом, *достаточным условием* существования локального максимума или минимума функции в точке, является определенность знаков в соотношениях выражений для вторых производных функции в стационарной точке (x_0, y_0):

если $\dfrac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2} < 0$ и $\dfrac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2} \cdot \dfrac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x \partial y} - \left(\dfrac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x \partial y}\right)^2 > 0$ – в точке (x_0, y_0) функция имеет *максимум*;

если $\dfrac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2} > 0$ и $\dfrac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2} \cdot \dfrac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x \partial y} - \left(\dfrac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x \partial y}\right)^2 > 0$ – в точке (x_0, y_0) функция имеет *минимум*.

5.2 Исследование функций двух переменных на экстремум

Исследование функции на экстремум двух переменных $f(x, y)$, определенной и непрерывной на множестве $L_n \subset R^2$, проводится в следующем порядке:

- определяются частные производные функции первого порядка

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \text{ и } \frac{\partial f(x,y)}{\partial y};$$

- определяют стационарные точки функции, для этого решают систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 0. \end{cases}$$

- определяются частные производные функции второго порядка

$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}$; $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}$; $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x}$ и вычисляют их значения в каждой стационарной точке;

- проверяют выполнение достаточных условий на экстремум функции в стационарных точках, выявляют виды экстремума;

- находят максимальное, минимальное значения функции в соответствующих стационарных точках.

Рассмотрим примеры определения экстремумов функций.

Пример. $z = x^3 - 3x^2y - y^3 + 3xy^2 - 1{,}5y^2 + 1{,}5x^2 - 6y$.

Решение. Найдем частные первые производные функции:

$$z'_x = 3x^2 - 6xy + 3y^2 + 3x, \quad z'_y = -3x^2 + 6xy - 3y^2 - 3y - 6.$$

Определим стационарные точки функции, составим систему уравнений:

$$\begin{cases} z'_x = 3x^2 - 6xy + 3y^2 + 3x = 0, \\ z'_y = -3x^2 + 6xy - 3y^2 - 3y - 6 = 0, \end{cases} \quad \rightarrow 3x - 3y - 6 = 0 \rightarrow \; y = x - 2,$$

найдем решения системы $\begin{cases} x^2 - 2x(x-2) + (x-2)^2 + x = 0, \\ y = x - 2. \end{cases}$

$$\begin{cases} 4 + x = 0, \\ y = x - 2. \end{cases} \quad \begin{cases} x = -4, \\ y = -6. \end{cases}$$

стационарной является точка $(-4, -6)$

Найдем частные производные функции второго порядка:

$$z''_{xx} = 6x - 6y + 3; \quad z''_{yy} = 6x - 6y - 3; \quad z''_{xy} = z''_{yx} = -6x + 6y;$$

$$A = 6(-4) - 6(-6) + 3 = 15 > 0, \quad B = -6(-4) + 6(-6) = -12 < 0$$

$$C = 6(-4) - 6(-6) - 3 = 9 > 0.$$

Проверим выполнение достаточных условий на экстремум функции в стационарных точках:

$A = 15 > 0$, $AC - B^2 = 15 \cdot 9 - (-12)^2 < 0$, в стационарной точке $(-4, -6)$ – функция экстремума не имеет.

5.3. Наибольшее и наименьшее значение функции

Определение наибольшего и наименьшего значения функции предполагает нахождение значений функции *в точках экстремума* и на *границе множества существования функции.* Наибольшее и наименьшее значение функции называется *глобальным экстремумом.*

Рассмотрим функцию двух переменных z = $f(x, y)$ непрерывную на замкнутом множестве для которой существуют частные производные, во всей области определения включая границу.

Для нахождения наибольшего и наименьшего значения функции необходимо исследовать её на экстремум и найти значения функции в граничных точках области. Покажем на примере определение наибольшего и наименьшего значения функции двух переменных.

Пример. Найти наибольшее и наименьшее значение функции

$$z = \frac{x^2}{1+x^2} - \frac{y^2}{y^2-1},$$

определенной и непрерывной во всех точках области ограниченной линией $x^2 + y^2 = 4$, это круг ограниченный окружностью с радиусом $r = 2$ и центром в начале координат.

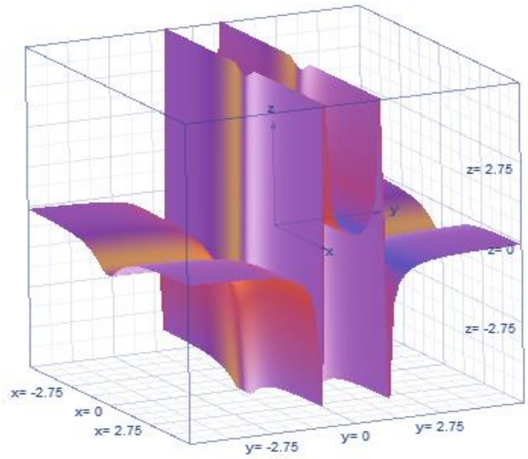


График функции: $z = \frac{x^2}{1+x^2} - \frac{y^2}{y^2-1}$

Решение. Найдем первые частные производные функции:

$$z'_x = \frac{2x}{(1+x^2)^2}\ ; \qquad z'_y = \frac{2y}{(y^2-1)^2}\ .$$

Найдем стационарные точки функции внутри области, составим и решим систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{2x}{(1+x^2)} = 0 \to x = 0; \\ \dfrac{2y}{(y^2-1)} = 0 \to y = 0; \end{cases}$$

стационарной будет точка: (0, 0), принадлежащая внутренней области.

Значение функции в стационарной точке внутренней области равно нулю, z = $f(0, 0) = 0$. В этой стационарной точке функция не имеет ни максимума, ни минимума.

Найдем стационарные точки функции на границе области, сведем заданную функцию к одной переменной для этого выразим $y^2 = 4 - x^2$ и подставим в заданное уравнение, получим:

$$g(x) = \frac{x^2}{1+x^2} - \frac{4-x^2}{3-x^2}.$$

Эту функцию будем рассматривать для $x \in [-2, 2]$. Найдем производную этой функции:

$$g'(x) = \left(\frac{x^2}{1+x^2} - \frac{4-x^2}{3-x^2}\right)' = \left(\frac{4}{x^4 - 2x^2 - 3}\right)' = \frac{-16x(x^2-1)}{(x^4 - 2x^2 - 3)^2}.$$

Найдем стационарные точки на границе, приравняем производную к нулю

$$\frac{-16x(x^2-1)}{(x^4 - 2x^2 - 3)^2} = 0, \rightarrow x = 0;\ x = \pm 1,$$

полученные стационарные точки $x = 0$, $x = 1$; $x = -1$ принадлежат интервалу [–2, 2].
Найдем значения функции в стационарных точках области и на границе:

при $x = 0, y = \pm 2$: $z = -\frac{4}{3}$; при $x = \pm 2, y = 0$: $z = \frac{4}{5} = 0{,}8$; при $x = \pm 1$, $y = \pm\sqrt{3}$: $z = -1$;

при $x = y = 0$: $z = 0$.

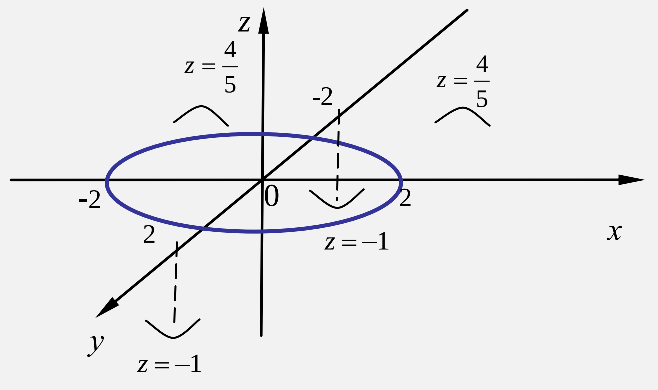


Рисунок 14

На рисунке 14 показаны точки наибольшего и наименьшего значения функции. Наибольшего значения функция достигает в точках (2, 0) и (– 2, 0), наименьшее значение функции в точках (0, 2) и (0, – 2).

Выпуклые или вогнутые функции

Выпуклые или вогнутые функции рассматриваются на выпуклых* множествах и значительно упрощают определение точек экстремума.

Рассмотрим функцию двух переменных, определенную и непрерывную на некотором выпуклом множестве D.

Определение. Функция z = $f(x, y)$ называется *выпуклой вверх*, если для любых двух точек (x_1, y_1) и (x_2, y_2) и любых положительных чисел λ_1 и λ_2, сумма которых равна единице, выполняется неравенство

$$f\left(\lambda_1(x_1+x_2), \lambda_2(y_1+y_2)\right) \geq \lambda_1 f(x_1, y_1) + \lambda_2 f(x_2, y_2).$$

Более часто выбираются числа $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}$, то есть рассматривается точка середины отрезка, соединяющего проекции точек на координатную плоскость, и формула записывается в упрощенном виде

$$f\left(\frac{(x_1+x_2)}{2}, \frac{(y_1+y_2)}{2}\right) \geq \frac{f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2)}{2}.$$

Аналогично определяется вогнутость выпуклость функции или выпуклость вниз.

Определение. Функция z = $f(x, y)$ называется *выпуклой вниз*, если для любых двух точек (x_1, y_1) и (x_2, y_2) и любых положительных чисел λ_1 и λ_2, сумма которых равна единице, выполняется неравенство

$$f\left(\lambda_1(x_1+x_2), \lambda_2(y_1+y_2)\right) \leq \lambda_1 f(x_1, y_1) + \lambda_2 f(x_2, y_2).$$

В упрощенном виде $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}$ формула записывается так

$$f\left(\frac{(x_1+x_2)}{2}, \frac{(y_1+y_2)}{2}\right) \leq \frac{f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2)}{2}.$$

- Выпуклое множество – это множество, на котором линия, соединяющая две любые внутренние точки, принадлежит множеству.

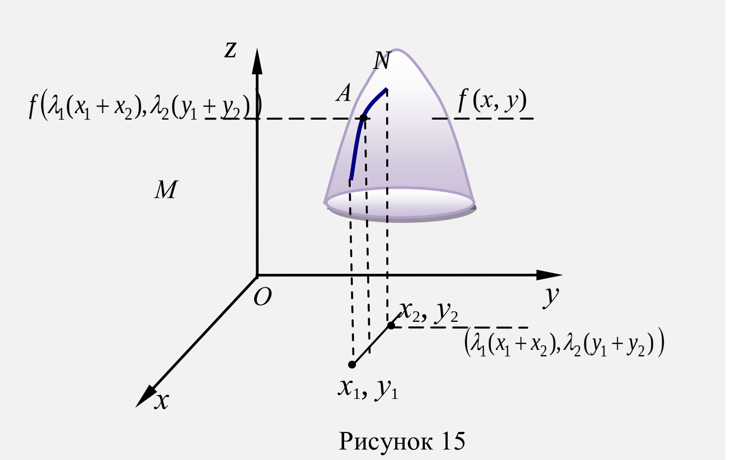


Рисунок 15

На рисунке 15 показан график функции выпуклой вверх и точка *A*, принадлежащая линии *MN* поверхности функции $f(x, y)$, $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}$.

Всякая выпуклая функция не имеет седловых точек, следовательно, для отыскания точек максимума и минимума необходимым и *достаточным* условием является равенство нулю частных производных функции.

5.4. Понятие условного экстремума

При решении различных задач, часто требуется отыскать наибольшее и наименьшее значение функции с дополнительными условиями, обусловленными содержанием задачи. Например, при поиске оптимального решения экономических задач с использованием целевой функции или при решении задач оптимизации ресурсов и т. д. При определенном условии задачи экстремумы ищутся не на всей области определения функции, а лишь на множестве удовлетворяющему добавочному условию.

Рассмотрим функцию двух переменных $z = f(x, y)$, аргументы которой связаны дополнительными условиями, удовлетворяющими определенной функции $g(x, y) = C$. Функция $g(x, y) = C$ называется уравнением связи, и одна из переменных может быть выражена через другую.

Пусть $y = s(x)$, тогда функция $z = f(x, y)$ сводится к функции одной переменной $z=f(x, s(x))$. Экстремумы функции одной переменной $z = f(x, s(x))$ есть *условные экстремумы.*

Если уравнение связи линейное или константа, то способ сведения функции одной переменной и отыскание условного экстремума не вызывает трудностей. При более сложных уравнениях связи для отыскания условного экстремума пользуются *методом множителей Лагранжа.* Этот метод «неопределенных множителей» был введен Лагранжем для исследования условных экстремумов в 1797 году и описан в работе «Теория аналитических функций».

Функция $z=f(x, s(x))$ может иметь экстремумы, если её производная по x равна нулю

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial s(x)} \frac{d(s(x))}{dx} = 0,$$

производная по x уравнения связи так же будет равна нулю

$$\frac{dg}{dx} = \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial s(x)} \frac{d(s(x))}{dx} = 0,$$

эти равенства выполняются для всех x и $y = s(x)$.

Введем некоторое число λ такое, чтобы выполнялось равенство

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial s(x)} \frac{d(s(x))}{dx}\right) + \lambda\left(\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial s(x)} \frac{d(s(x))}{dx}\right) = 0$$

или

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx}\right) + \lambda\left(\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \frac{dy}{dx}\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda\frac{\partial g}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda\frac{\partial g}{\partial y}\right)\frac{dy}{dx} = 0.$$

Множитель λ (*множитель Лагранжа*) выбран так, что

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\frac{\partial g}{\partial x}\right)=0 \text{ и } \left(\frac{\partial f}{\partial y}+\lambda\frac{\partial g}{\partial y}\right)\frac{dy}{dx}=0,$$

функция связи $g(x, y) = C$ или $g(x, y) - C = 0$.

Чтобы функция $f(x, y)$ в точке (x_1, y_1) имела условный экстремум, должно существовать число λ_1, такое, что (x_1, y_1, λ_1) есть точка экстремума функции трех переменных $F(x, y, \lambda)$.

Функция $F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\, g(x, y)$ имеет в точке условный экстремум, если выполняются условия:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}+\lambda\dfrac{\partial g}{\partial x}=0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}+\lambda\dfrac{\partial g}{\partial y}=0, \\ g(x,y)-C=0. \end{cases}$$

Пример. Найти экстремумы функции $z = (x+1)^2 + (y+1)^2$, если уравнение связи

$g(x, y) = x + 2y = 4$.

Решение. Запишем функцию $F(x, y, \lambda) = (x+1)^2 + (y+1)^2 + \lambda(x + 2y - 4)$;

найдем частные производные по каждой переменной и приравняем их к нулю

$$\begin{cases} z'_x = 2(x+1)+\lambda = 0, \\ z'_y = 2(y+1)+2\lambda = 0, \\ x+2y-4=0. \end{cases}$$

Решим систему уравнений

$$\begin{cases} 2(x+1)+\lambda = 0, \\ 2(y+1)+2\lambda = 0, \\ x+2y-4=0. \end{cases} \to \begin{cases} x = \dfrac{-2-\lambda}{2}, \\ y = -1-\lambda, \\ \dfrac{-2-\lambda}{2}-2-2\lambda-4=0 \end{cases} \to \begin{cases} x=-2, \\ y=-3, \\ \lambda = 2. \end{cases}$$

Точкой условного экстремума будет (–2, –3), в этой точке функция имеет минимум.

§2 Неопределенный интеграл

Лекция № 6

Первообразная функция. Неопределенный интеграл и его свойства

6.1. Понятие интеграла. Первообразная функция.

6.2. Неопределенный интеграл. Свойства неопределенного интеграла. Таблица интегралов элементарных функций.

6.3. Методы и примеры вычисления неопределенных интегралов.

6.1. Понятие интеграла. Первообразная функция

Основой математического анализа являются, неразрывно связанные между собой, дифференциальное и интегральное исчисления. Впервые «изобретение» интегрального исчисления было описано в трудах Архимеда за 2000 лет до теории Ньютона (1642 – 1727) и применялось Архимедом к нахождению площади сегмента параболы и в других задачах о геометрических построениях фигур и вычислении их площади. Нахождение площади криволинейной геометрической фигуры сводилось к отысканию суммы площадей прямоугольников вписанных в эту фигуру. Увеличивая (до бесконечности) число вписанных прямоугольников, получали более высокую точность величины площади фигуры. Такой, на первый взгляд, грубо описанный способ перехода к пределу суммы называется ***интегрированием***, а способ проведения такого суммирования есть ***интегральное исчисление.***

Интегральное исчисление имеет широкое применение в различных областях деятельности человека. Например, задача вычисления полного пути, который проходит тело или частица с различной скоростью за определенный промежуток времени, привела Ньютона к созданию интегрального исчисления для решения физических задач, а Эйлера к расчетам ежегодных рент, страхования, пенсий и др. описанных в его учебниках 1768 г.

Одной из основных задач интегрального исчисления является отыскание исходной, то есть *первообразной функции* по заданной её производной или по её дифференциалу.

Рассмотрим функцию $y = F(x)$ определенную и непрерывную на некотором интервале $x \in (a, b)$, тогда функция имеет производную $F'(x) = f(x)$ в каждой точке интервала.

Пусть на интервале (–1, 2) задана функция $y = F(x) = (x+1)^2 +1$, производная этой функции $f(x) = [(x+1)^2 +1]' = 2(x+1)$, тогда $y = F(x) = (x+1)^2 +1$ есть первообразная функция.

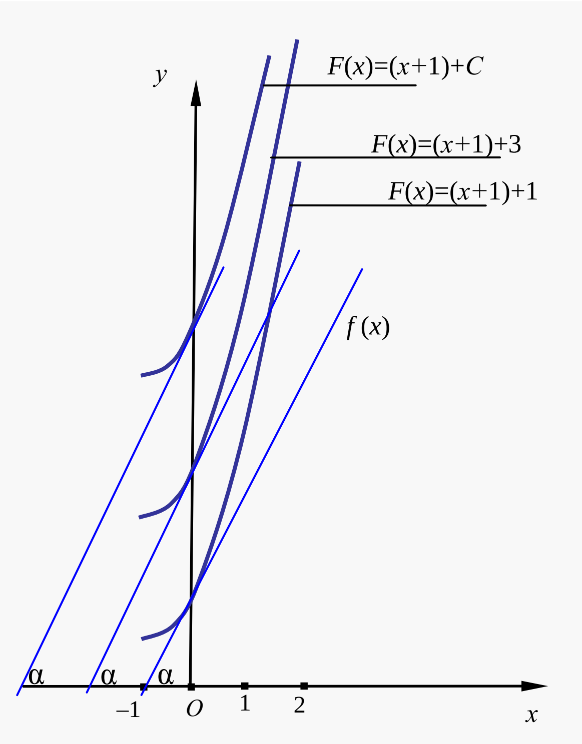
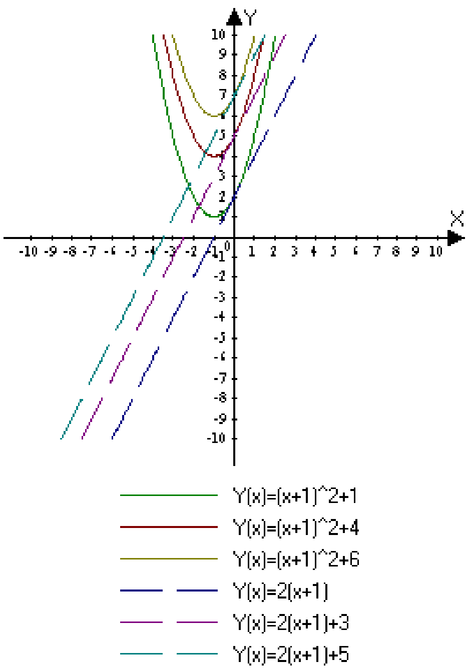


Рисунок 15

На рисунке 15 показаны графики первообразной функции с различными вторыми независимыми слагаемыми 1, 3, …C – *const*. Все эти функции имеют производные, графиком которых есть прямые совпадающие с касательными к графикам первообразных функций. Нетрудно убедится в том, что углы наклона каждой касательной с положительным направлением оси Ox одинаковые, следовательно имеют одинаковые угловые коэффициенты и соответствуют уравнению производной $F'(x) = f(x)$ на интервале (–1, 2).



Найдем производные функций:

$$F(x) = (x+1)^2 + 1, \quad F'(x) = 2(x+1) = f(x);$$
$$F(x) = (x+1)^2 + 3, \quad F'(x) = 2(x+1) = f(x);\ldots$$
$$F(x) = (x+1)^2 + C, \quad F'(x) = 2(x+1) = f(x).$$

Определение. Функция $F(x)$, определенная и непрерывная в каждой точке некоторого интервала (a, b), называется ***первообразной функцией*** для функции $f(x)$, если $F'(x) = f(x)$.

Из приведенного выше примера видно, что первообразная функция определяется неоднозначно, а с точностью до константы C. Функция $F(x) = (x+1)^2 + C$ является первообразной функции $f(x) = 2(x+1)$. Определим связь между всеми первообразными $F(x) + C$ одной и той же функции $f(x)$ и докажем следующую теорему.

Теорема. Разность двух любых первообразных функций $F(x_1)$ и $F(x_2)$ для функции $f(x)$, непрерывных и дифференцируемых на интервале (a, b), есть величина постоянная равная C: $F(x_1) - F(x_2) = C$ или $F(x_1) = F(x_2) + C$.

Доказательство.

По определению первообразной функции $F_1'(x) = f(x)$ и $F_2'(x) = f(x)$. Допустим, что разность $F(x_1) - F(x_2)$ есть некоторая функция $g(x)$, то есть $F(x_1) - F(x_2) = g(x)$, тогда $[F(x_1) - F(x_2)]' = g'(x)$, $F'(x_1) - F'(x_2) = g'(x)$. Функция $g'(x) = f(x) - f(x) = 0$, следовательно, функция $g(x) = C$ есть константа, так как её производная равна нулю. Получаем

$$F(x_1) - F(x_2) = C \text{ или } F(x_1) = F(x_2) + C.$$

На интервале непрерывности и дифференцируемости функции $f(x)$, первообразной которой есть функция $F(x)$, выражением $(F(x) + C)$ определяются все возможные первообразные для $f(x)$.

6.2. Неопределенный интеграл. Свойства неопределенного интеграла

Определение. Способ отыскания *первообразной функции* по заданной её *производной* или по её *дифференциалу* называется ***интегрированием.***

Определение. Совокупность всех первообразных функций $F(x) + C$ на интервале непрерывности и дифференцируемости функции $f(x)$, называется ***неопределенным интегралом*** функции $\int f(x)\,dx = F(x) + C$.

Функция $f(x)$ называется *подынтегральной функцией*, $f(x)\,dx$ называется *подынтегральным выражением* $f(x)\,dx$, $\int$ – знак интеграла. Из выражения $F'(x) = f(x)$ следует, что всякая производная функции есть подынтегральная функция.

Например.

$F'(x) = \cos x = f(x)$, $\int \cos x\, dx = \sin x + C$, $(\sin x + C)' = \cos x$,

$F'(x) = 3(x+1)^2 = f(x)$, $\int 3(x+1)^2\, dx = (x+1)^3 + C$, $((x+1)^3 + C)' = 3(x+1)^2$.

$(F(x) + C)' = (\int f(x)\, dx)' = f(x)$.

Пользуясь таблицей производных несложных функций, составим **таблицу основных неопределенных интегралов**:

1. $\int 0\, dx = C.$
2. $\int dx = x + C.$
3. $\int x^n\, dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C.$
4. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C.$
5. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C.$
6. $\int e^x dx = e^x + C.$
7. $\int \sin x\, dx = -\cos x + C.$
8. $\int \cos x\, dx = \sin x + C.$
9. $\int tg\, x\, dx = -\ln|\cos x| + C.$
10. $\int ctg\, x\, dx = \ln|\sin x| + C.$
11. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C, (x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ n = 0, \pm 1, \pm 2...).$
12. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C, (x \neq \pi n,\ n = 0, \pm 1, \pm 2...).$
13. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = arctgx + C,\quad \int \dfrac{dx}{a^2+x^2} = \dfrac{1}{a} arctg\dfrac{x}{a} + C;\quad \int \dfrac{dx}{1+x^2} = -arc\ ctgx + C.$
14. $\int \dfrac{dx}{1-x^2} = \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right| + C,\ (|x| \neq 1).$

$$15. \int \frac{d\,x}{\sqrt{1-x^2}} = arc\sin x + C,\ \int \frac{d\,x}{\sqrt{1-x^2}} = -arc\cos x + C,\ (-1 < x < 1).$$

$$16. \int \frac{d\,x}{\sqrt{a^2-x^2}} = arc\sin \frac{x}{a} + C,\ \int \frac{d\,x}{\sqrt{a^2-x^2}} = -arc\cos \frac{x}{a} + C,\ (-1 < \frac{x}{a} < 1).$$

$$17. \int \frac{d\,x}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm 1}\right| + C,\ (|x| > 1\ \ при\,(x^2-1)).$$

$$18.\ \int \frac{d\,x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C,\ (|x| > 1\ \ при\,(x^2-a^2)).$$

Свойства неопределенного интеграла

Одно из свойств уже отмечалось ранее, $(F(x) + C)' = (\int f(x)\,dx)' = f(x)$, то есть

**подынтегральная функция есть производная от неопределенного интеграла*

$(\int f(x)\,dx)' = f(x)$.

**Подынтегральное выражение есть дифференциал неопределенного интеграла*

$d(\int f(x)\,dx\,) = f(x)\,dx$.

Продифференцируем левую и правую части равенства, получим, по определению дифференциала функции

$d\,[d(\int f(x)\,dx)] = (\int f(x)\,dx)'\,dx = f(x)\,dx$.

**Постоянный множитель подынтегральной функции выносится за знак интеграла*

$\int k\,f(x)\,dx) = k\int f(x)\,dx$.

Запишем производные левой и правой части равенства

$(\int k\,f(x)\,dx))' = k\,f(x)$,

$(k\int f(x)\,dx.)' = k\,f(x)$,

правые части выражений одинаковые, следовательно, левые выражения равны между собой.

**Неопределенный интеграл от дифференциала функции равен сумме самой функции и произвольной константы C*

$\int dF(x) = F(x) + C$.

Дифференциал $dF(x) = f(x)\,dx$, $\int dF(x) = \int f(x)\,dx = F(x) + C$.

**Неопределенный интеграл алгебраической суммы нескольких функций равен сумме неопределенных интегралов каждой функции*

$$\int \left(f(x) \pm g(x) \mp p(x)\right) d\,x = \int f(x)\,d\,x \pm \int g(x)\,d\,x \mp \int p(x)\,d\,x\,.$$

Запишем производные левой и правой части равенства

$$\left[\int \left(f(x) \pm g(x) \mp p(x)\right) d\,x\right]' = f(x) \pm g(x) \mp p(x),$$

$$\left[\int f(x)\ d\,x \pm \int g(x)\ d\,x \mp \int p(x) d\,x\right]' =$$

$$= \left(\int f(x)\ d\,x\right)' \pm \left(\int g(x)\ d\,x\right)' \mp \left(\int p(x)\ d\,x\right)' = f(x) \pm g(x) \mp p(x),$$

правые части выражений одинаковые, следовательно, левые выражения равны между собой.

6.3. Методы и примеры вычисления неопределенных интегралов

Определение неопределенного интеграла начинается с рассмотрения возможности преобразования или упрощения подынтегральной функции и сведению к интегралам табличного вида.

Найти интегралы, пользуясь свойствами и таблицей неопределенных интегралов:

1. $\int (2x^2 + \frac{4}{(x-2)^2}) d\,x$;

$$\int 2x^2 d\,x + \int \frac{4d\,x}{(x-2)^2} = \frac{2x^3}{3} + 4\int (x-2)^{-2}\,d\,x = \frac{2x^3}{3} + \frac{4(x-2)^{-1}}{-1} + C = \frac{2x^3-12}{3(x-2)} + C.$$

2. $\int \frac{3d\,x}{5^x}$; $\int \frac{3d\,x}{5^x} = 3\int \left(\frac{1}{5}\right)^x d\,x = 3\frac{0{,}2}{\ln 0{,}2} + C.$

3. $\int (\sin x + tg\,x) d\,x$; $\int \sin x\,d\,x + \int tg\,x\,d\,x = -\cos x - \ln\left|\cos x\right| + C$.

4. $\int 3^{3x+2}\,d\,x$; $3^{3x-2} = (3^3)^x \cdot 3^{-2} = \frac{27^x}{9}$;

$$\int 3^{3x+2}\,d\,x = \frac{1}{9}\int 27^x d\,x = \frac{1}{9}\frac{27^x}{\ln 27} + C.$$

5. $\int \frac{d\,x}{\left(12-(\sqrt{3}x)^2\right)^{\frac{1}{2}}}$; $\frac{1}{\left(12-3x^2\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{2^2-x^2}}$;

$$\int \frac{d\,x}{\left(12-(\sqrt{3}x)^2\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{d\,x}{\sqrt{2^2-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\,arc\sin\frac{x}{2} + C.$$

Найти интегралы, пользуясь методом разложения подынтегральной функции:

1. $\int \frac{8x^3 - 12\sqrt{3}x^2 - 3\sqrt{3} + 18\,x}{2x - \sqrt{3}} d\,x$;

$$\int \frac{8x^3 - 12\sqrt{3}x^2 - 3\sqrt{3} + 18\,x}{2x - \sqrt{3}} d\,x = \int \frac{(2x - \sqrt{3})^3}{2x - \sqrt{3}} d\,x = \int (2x - \sqrt{3})^2 d\,x =$$

$$= \int 4x^2 dx - 4\sqrt{3}\int x\,dx + 3\int dx = \frac{4x^3}{3} - \frac{4\sqrt{3}x^2}{2} + 3 + C = \frac{4x^3 - 6\sqrt{3}x^2 + 9}{3} + C.$$

2. $\int \frac{(3\sqrt{x}-4)^2 - 1}{3x} dx$; $\frac{(3\sqrt{x}-4)^2 - 1}{3x} = \frac{9x - 24\sqrt{x} + 16 - 1}{3x} = 3 - 6x^{-\frac{1}{2}} + 5x^{-1}$;

$$\int \frac{(3\sqrt{x}-4)^2 - 1}{3x} dx = 3\int dx - 6\int x^{-\frac{1}{2}} dx + 5\int \frac{dx}{x} = 3x - 12\sqrt{x} + 5\ln|x| + C.$$

3. $\int (tg^2 x + 1)\, dx$; $tg^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}$;

$$\int (tg^2 x + 1)\, dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} = tg\, x + C; \;\; (x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n).$$

4. $\int \frac{x^2+1}{x^2+9} dx$; $\frac{x^2+1}{x^2+9} = \frac{x^2+1+8-8}{x^2+9} = 1 - \frac{1}{x^2+3^2}$;

$$\int \frac{x^2+1}{x^2+9} dx = \int dx - \int \frac{dx}{x^2+3^2} = x - \frac{8}{3} arctg\, x + C.$$

5. $\int (\sin x - \cos x)^2\, dx$; $(\sin x - \cos x)^2 = \sin^2 x - 2\sin x \cos x + \cos^2 x$;

$$\int (\sin x - \cos x)^2\, dx = \int dx - \int \sin 2x\, dx = x - \int \sin 2x \cdot 2\, dx \cdot \frac{1}{2} =$$

$$= x - \frac{1}{2}\int \sin 2x\, d(2x) = x + \frac{1}{2}\cos 2x + C.$$

Интегрирование функций, которые невозможно свести к табличным интегралам простыми преобразованиями, выполняются методами замены переменной или интегрированием по частям.

Лекция № 7

Интегрирование методами замены переменной и по частям

7.1. Интегрирование методом замены переменной.

7.2. Метод интегрирования по частям.

7.3.Некоторые приемы вычисления неопределенных интегралов.

7.1 Интегрирование методом замены переменной

Способ интегрирования путем замены переменной является одним из самых распространенных и эффективных, правильный подбор замены переменной приводит к упрощению подынтегральной функции.

В интегрирование методом замены переменной используется введение подстановки вместо аргумента x некоторой функции с переменной t, то есть $x = \varphi(t)$, или введение подстановки $t = g(x)$. Замену переменной подбирается таким образом, чтобы можно было упростить исходный интеграл и свести его к табличному интегралу.

Рассмотрим интеграл $\int f(x)\,dx$, где подынтегральная функция $f(x)$ имеет производную, но с помощью табличных интегралов не определяется. Введем подстановку $x = \varphi(t)$, тогда $dx = \varphi'(t)\,dt$, функция $\varphi(t)$ непрерывная и дифференцируема, докажем равенство

$$\int f(x)\,dx = \int (\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt,$$

здесь $f(x) = f(\varphi(t)),\ d\,x = \varphi'(t)\,dt.$

Продифференцируем левую и правую части последнего равенства, используя свойство дифференцирования интеграла, получим:

$$d\,(\int f(x)\,dx) = f(x)\,dx = f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt,$$

$$d\,(\int \varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt,$$

Правые части полученных равенств одинаковые, следовательно – равны и дифференцируемые функции

$$\int f(x)\,dx) = \int \varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt.$$

Подбор замены переменной производится таким образом, чтобы выполнялось упрощение исходного интеграла и выполнялось интегрирование.

Во многих случаях применяется замена вида $t = g(x),\ dt = g'(x)\,dx.$

Покажем применение метода подстановки на примерах нахождения интегралов.

Найти интегралы:

1. $\int 2x\sqrt{x-4}\,d\,x$,

введем подстановку $\sqrt{x-4}=t$; $x-4=t^2$; $x=4+t^2$; $d\,x=2t\;dt$; заменим переменную в исходном интеграле введенной подстановкой, получим

$$\int 2x\sqrt{x-4}\,d\,x=\int 2(4+t^2)\,2t\,dt=4\int 4t^2dt+4\int t^4dt=16\frac{t^3}{3}+4\frac{t^5}{5}+C;$$

вернемся к исходной переменной, используя введенную подстановку

$$16\frac{t^3}{3}+4\frac{t^5}{5}=\frac{16}{3}(\sqrt{x-4})^3+\frac{4}{5}(\sqrt{x-4})^5;\ \int 2x\sqrt{x-4}\,d\,x\ =\ \frac{16}{3}(\sqrt{x-4})^3+\frac{4}{5}(\sqrt{x-4})^5+C.$$

2. $\int\frac{x^2-1}{(\sqrt{2x-1})^3}\,d\,x$,

введем подстановку $\sqrt{2x-1}=t$; $2x-1=t^2$; $x=\frac{t^2+1}{2}$; $d\,x=t\;dt$; заменим переменную в исходном интеграле введенной подстановкой, получим

$$\int\frac{x^2-1}{(\sqrt{2x-1})^3}\,d\,x\ =\ \frac{1}{4}\int\frac{(t^2+1)^2-4}{t^3}\,t\,d\,t=\frac{1}{4}\int\frac{t^4+2t^2-3}{t^2}dt=\frac{1}{4}\int t^2d\,t+\frac{1}{2}\int dt-3\int t^{-2}dt=$$

$$=\frac{3}{4}t^3+\frac{t}{2}+\frac{3}{t}+C.$$

вернемся к исходной переменной, используя введенную подстановку

$$\frac{3}{4}t^3+\frac{t}{2}+\frac{3}{t}=\frac{3}{4}(\sqrt{2x-1})^3+\frac{1}{2}(\sqrt{2x-1})+\frac{3}{\sqrt{2x-1}};$$

$$\int\frac{x^2-1}{(\sqrt{2x-1})^3}\,d\,x=\ \frac{3}{4}(\sqrt{2x-1})^3+\frac{1}{2}(\sqrt{2x-1})+\frac{3}{\sqrt{2x-1}}+C.$$

3. $\int tg(4x+1)\,d\,x,$

воспользуемся приемом введения функции под знак дифференциала

$$\int tg(4x+1)\,d\,x=\int tg(4x+1)\frac{1}{4}d\,(4x+1)=-\frac{1}{4}\ln\left|\,4x+1\right|+C.$$

4. $\int\cos{}^3x\sqrt{\sin x}\;d\,x$,

преобразуем подынтегральную функцию и введем *cos x* под знак дифференциала

$$\int\cos{}^3x\sqrt{\sin x}\;d\,x=\int\cos^2x\sqrt{\sin x}\cdot\cos\,x\,d\,x=\int(1-\sin{}^2x)\sqrt{\sin x}\;d\,(\sin x)=$$

$$\int\sin^{1\backslash 2}x\;d\,(\sin x)-\int\sin^{5\backslash 2}x\;d\,(\sin x)=\frac{2}{3}\sin^{3\backslash 2}-\frac{2}{7}\sin^{5\backslash 2}+C.$$

5. $\int\frac{2x}{\sqrt{2-x^2}}\;d\,x=\int\frac{d\,(x)}{\sqrt{\sqrt{2}^2-x^2}}=arc\;\sin\frac{x}{\sqrt{2}};\quad(|x|<\sqrt{2}).$

6. $\int \frac{2x^2}{\sqrt{3-x^3}}\,dx,$

введем подстановку $\sqrt{3-x^3}=t$; $3-x^3=t^2$; $d(3-x^3)=d(t^2)$; $-3x^2\,dx=2t\,dt$; заменим переменную в исходном интеграле введенной подстановкой, получим

$$\int \frac{2x^2}{\sqrt{3-x^3}}\,dx=-2\int \frac{\frac{2}{3}t\,dt}{t}=-\frac{4}{3}t+C;\quad \int \frac{2x^2}{\sqrt{3-x^3}}\,dx=-\frac{4\sqrt{3-x^3}}{3}+C.$$

7. $\int 2xe^{-x^2}\,dx,$

введем подстановку $t=-x^2$; $dt=-2x\,dx$; ; заменим переменную в исходном интеграле введенной подстановкой, получим $\int 2xe^{-x^2}\,dx=-\int e^t dt=-e^{-x^2}+C.$

8. $\int \frac{(x^2-3)\,dx}{2(x^4-5x^2+9)\,arc\ ctg\,\frac{x^2-3}{2x}},\ (x\neq 0);$

преобразуем подынтегральную функцию, поделим числитель и знаменатель на x^2, получим

$$\int \frac{(x^2-3)\,dx}{2(x^4-5x^2+9)\,arc\ ctg\,\frac{x^2-3}{2x}}=\int \frac{(1-\frac{3}{x^2})\,dx}{[(x^2-6+\frac{9}{x^2})+1]\,arc\ ctg\,\frac{x^2-3}{x}}=\int \frac{(1-\frac{3}{x^2})\,dx}{[(x-\frac{3}{x})^2+1]\,arc\ ctg\,\frac{x^2-3}{x}};$$

введем подстановку $t=x-\frac{3}{x}$; $dt=(1-\frac{3}{x^2})\,dx$; заменим переменную в исходном интеграле введенной подстановкой, получим $\int \frac{(1-\frac{3}{x^2})\,dx}{[(x-\frac{3}{x})^2+1]\,arc\ ctg\,\frac{x^2-3}{x}}=\int \frac{dt}{(t^2+1)\,arcctg\,t},$

так как последний интеграл не является табличным, введем ещё одну подстановку: $arcctg\,t=p,\quad dp=-\frac{dt}{1+t^2}$, получим $\int \frac{dt}{(t^2+1)\,arcctg\,t}=\int \frac{dt}{t^2+1}\frac{1}{arcctg\,t}=-\int \frac{dp}{p}=-\ln|p|+C.$

Вернемся к исходной переменной, используя введенные подстановки

$$\int \frac{(x^2-3)\,dx}{2(x^4-5x^2+9)\,arc\ ctg\,\frac{x^2-3}{2x}}=-\ln|p|=-\ln|arc\ ctg\ t|=-\ln\left|arc\ ctg\,\frac{x^2-3}{x}\right|+C\cdot$$

7.2 Метод интегрирования по частям

Не менее эффективным, по сравнению с методом интегрирования путём замены переменной, является интегрирование по частям. В этом методе используется правило дифференцирования произведения двух функций.

Рассмотрим функции $u(x)$ и $v\ (x)$ определенные и дифференцируемые на некотором множестве $\{x\}$. Тогда на этом множестве существуют их производные и дифференциалы,

$$d\ (uv) = vdu + udv\ .$$

Проинтегрируем левую и правую части последнего равенства

$\int d\ (uv) = \int vdu + \int udv \to \int udv = u{\cdot}v\ - \int vdu,$

$\int udv = u{\cdot}v\ - \int vdu$ – ***формула интегрирования по частям.***

Интегрирование по частям используется в том случае, когда подынтегральная функция представленная в виде произведения $u\ {\cdot}d\ v$,

функция v находится интегрированием $v = \int d\ [v\ ] + C,\ du = u'dx.$

Рассмотрим примеры применения метода интегрирования по частям.

Найти интегралы.

1. $\int x \ln x\, d\, x,\quad u = \ln x,\ du = \dfrac{d\,x}{x},\ dv = x\,d\,x,\ v = \int x\,dx = \dfrac{x^2}{2} + C.$

В интеграле функции v константу C будем считать равной нулю.

$$\int x \ln x\, d\, x = \frac{x^2 \ln x}{2} - \int \frac{x^2}{2}\frac{d\,x}{x} = \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + C\,.$$

1$^{\bullet}$. $\int x^2 \ln x\, d\, x,\ u = \ln x,\ du = \dfrac{d\,x}{x},\ dv = x^2\,d\,x,\ v = \int x^2\,dx = \dfrac{x^3}{3} + 0.$

$$\int x^2 \ln x\, d\, x = \frac{x^3 \ln x}{3} - \int \frac{x^3}{3}\frac{d\,x}{x} = \frac{x^3 \ln x}{3} - \frac{x^3}{9} + C\,.$$

1$^{\bullet\bullet}$. $\int x^3 \ln x\, d\, x,$

$$u = \ln x,\ du = \frac{d\,x}{x},\ dv = x^3\,d\,x,\ v = \int x^3\,dx = \frac{x^4}{4} + 0.$$

$$\int x^3 \ln x\, d\, x = \frac{x^4 \ln x}{4} - \int \frac{x^4}{4}\frac{d\,x}{x} = \frac{x^4 \ln x}{4} - \frac{x^4}{16} + C\,.$$

…

1$^{\bullet\bullet\bullet}$. $\int x^k \ln x\, d\, x,$

$$u = \ln x,\ du = \frac{d\,x}{x},\ dv = x^k\,d\,x,\ v = \int x^k\,dx = \frac{x^{k+1}}{k+1} + 0.$$

$$\int x^k \ln x\,d\,x = \frac{x^{k+1}\ln x}{k+1} - \int \frac{x^{k+1}}{k+1}\frac{d\,x}{x} = \frac{x^{k+1}\ln x}{k+1} - \frac{x^{k+1}}{(k+1)^2} + C,\ (k \neq -1)\,. \qquad (1)$$

Интегралы вида I= $\int x^k \ln x\,d\,x$ для всех натуральных чисел $k \neq -1$ вычисляются по рекуррентной формуле (1).

2. $\int x \sin x\,d\,x,$

$u = x,\ \ du = d\,x,\ \ dv = \sin x\,d\,x,\ \ v = \int \sin x\,dx = -\cos x + 0.$

$\int x \sin x\,d\,x = -x\cos x - \int (-\cos x)\,d\,x = -x\cos x \sin x + \sin x + C\,.$

2'. $\int x^2 \sin x\,d\,x,$

$u = x^2,\ du = 2x\,d\,x,\ dv = \sin x\,d\,x,\ v = \int \sin x\,dx = -\cos x + 0.$

$\int x^2 \sin x\,d\,x = -x^2\cos x - 2\int (-\cos x)\,x\,d\,x = -x^2\cos x + 2\int x\cos x\,d\,x\,,$

методом интегрирования по частям найдем $\int x\cos x\,d\,x$:

$\int x\cos x\,d\,x\,,$

$u_1 = x,\ du_1 = d\,x,\ dv_1 = \cos x\,d\,x,\ v_1 = \int \cos x\,dx = \sin x + 0.$

$\int x\cos x\,d\,x = x\sin x - \int \sin x\,d\,x = x\sin x + \cos x + 0\,.$

Окончательно для исходного интеграла получаем

$\int x^2 \sin x\,d\,x = -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C.$

2''. $\int x^3 \sin x\,d\,x,$

$u = x^3,\ du = 3x^2\,d\,x,\ dv = \sin x\,d\,x,\ v = \int \sin x\,dx = -\cos x + 0.$

$\int x^3 \sin x\,d\,x = -x^3\cos x - 3\int (-\cos x)\,x^2\,d\,x = -x^3\cos x + 3\int x^2\cos x\,d\,x\,,$

методом интегрирования по частям найдем $\int x^2\cos x\,d\,x$:

$\int x^2\cos x\,d\,x\,,$

$u_1 = x^2,\ du_1 = 2x\,d\,x,\ dv_1 = \cos x\,d\,x,\ v_1 = \int \cos x\,dx = \sin x + 0.$

$\int x^2\cos x\,d\,x = x^2\sin x - 2\int x\sin x\,d\,x\,,$

методом интегрирования по частям найдем $\int x\sin x\,d\,x$:

$\int x\sin x\,d\,x = -x\cos x - \int (-\cos x)\,d\,x = -x\cos x \sin x + \sin x + 0\,,$

окончательно для интеграла $\int x^2\cos x\,d\,x$ получаем:

$$\int x^2 \cos x\, dx = x^2 \sin x - 2(-x\cos x + \sin x) = x^2 \sin x + 2x\cos x - 2\sin x + 0\,.$$

Окончательно для исходного интеграла получаем

$$\int x^3 \sin x\, dx = -x^3 \cos x + 3(x^2 \sin x + 2x\cos x - 2\sin x),$$

$$\int x^3 \sin x\, dx = -x^3 \cos x + 3x^2 \sin x + 6x\cos x - 6\sin x + C.$$

Интегрирование по частям функций приведенного вида требует интегрирование промежуточных функций, кратность которых совпадает с показателем степени x подынтегральной функции.

3. $\int \frac{\ln x^2}{x^3} dx,$ упростим подынтегральную функцию $2\int \frac{\ln x}{x^3} dx,$

$$u = \ln x,\ du = \frac{dx}{x},\ dv = \frac{1}{x^3} dx,\ v = \int x^{-3} dx = \frac{1}{2x^2} + 0.$$

$$2\int \frac{\ln x}{x^3} dx = 2\left(\frac{\ln x}{2x^2} - \int \frac{dx}{2x^3}\right) = \frac{\ln x}{x^2} - \frac{1}{2x^2} + C\,.$$

4. $\int x^2 e^{3x}\, dx\,,$

упростим подын6тегральное выражение, введем подстановку

$t = 3x;\ dt = 3dx;\ dx = \frac{dt}{3}$, получим

$$\int x^2 e^{3x}\, dx = \int \frac{t^2}{9} e^t \frac{dt}{3} = \frac{1}{27}\int t^2 e^t dt.$$

Интеграл $\int t^2 e^t dt$ найдем методом интегрирования по частям:

$$\int t^2 e^t dt\,,$$

$$u = t^2,\ du = 2t\,dt,\ dv = e^t dt,\ v = \int e^t dt + 0,\ v = e^t,$$

$$\int t^2 e^t dt = t^2 e^t - 2\int t\, e^t dt.$$

Интеграл $\int te^t dt$ так же найдем методом интегрирования по частям:

$$\int t\, e^t dt\,,$$

$$u_1 = t,\ du_1 = dt,\ dv_1 = e^t dt,\ v_1 = \int e^t dt + 0,\ v_1 = e^t,$$

$$\int t\, e^t dt = t\, e^t - e^t.$$

Возвращаясь к исходной переменной в заданном интеграле, получим

$$\int x^2 e^{3x}\, dx = \frac{1}{27}\int t^2 e^t dt = \frac{1}{27}(t^2 e^t - 2te^t + 2e^t);$$

$$\int x^2 e^{3x}\, d\,x = \frac{e^{3x}}{27}(9x^2-6x+2)+C.$$

5. $\int arc\sin x\, d\,x,$

$$u = arc\sin x,\ d\,u = \frac{d\,x}{\sqrt{1-x^2}},\ dv = d\,x,\ v = x;$$

$$\int arc\sin x\, d\,x = x\, arc\sin x - \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

найдем интеграл $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$, введем x под знак дифференциала и дифференцируемую функцию представим в виде разности $1-x^2$:

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2}\int (1-x^2)^{-1\backslash 2}\, d\,(1-x^2) = -\sqrt{1-x^2};$$

окончательно получаем

$$\int arc\sin x\, d\,x = x\, arc\sin x + \sqrt{1-x^2} + C.$$

Из приведенных примеров видно, что интегрирование рациональных функций часто требует использование как метода интегрирования по частям, метода замены переменной так и других методов.

7.3. Некоторые приёмы вычисления неопределенных интегралов

Рассмотрим способы вычисления интегралов вида

1. $I = \int \frac{d\,x}{a\,x^2+b\,x+c}$; 2. $I = \int \frac{d\,x}{\sqrt{a\,x^2+b\,x+c}}$; 3. $I = \int \frac{(k\,x+p)\,d\,x}{a\,x^2+b\,x+c}$.

1. При вычислении интегралов вида $I = \int \frac{d\,x}{a\,x^2+b\,x+c}$ в знаменателе подынтегральной функции выделяется полный квадрат, затем вводится замена переменных. Следует учитывать, что корни трехчлена могут быть рациональными или комплексными.

$$I = \int \frac{d\,x}{ax^2+b\,x+c} = \frac{1}{a}\int \frac{d\,x}{x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}} = \frac{1}{a}\int \frac{d\,x}{x^2+2\frac{b}{2a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}};$$

$$I = \frac{1}{a}\int \frac{d\,x}{x^2+2\frac{b}{2a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}} = \frac{1}{a}\int \frac{d\,x}{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}}.$$

Выражение $\left[\frac{c}{a}-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] = d$ есть число, знак которого определяет: будут ли корни трехчлена рациональными или будут комплексными.

Введем замену переменных $t=\left(x+\frac{b}{2a}\right)$; $\pm t^2=\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$; $dt=dx$, для $a>0$ значение t положительное ($+t$), для $a<0$ значение t отрицательное ($-t$), получим интеграл I_1 по переменной t: $I_1=\frac{1}{a}\int\frac{dt}{t^2\pm\sqrt{d}^{\,2}}$, этот интеграл табличный,

$$I_2=\frac{1}{a}\int\frac{dt}{t^2+\sqrt{d}^{\,2}}=\frac{1}{a}\frac{1}{\sqrt{d}}arctg\frac{t}{\sqrt{d}}+C \quad (a\neq 0,\ d\neq 0),$$

перейдем к исходной переменной x,

$$I=\int\frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{a}\frac{1}{\sqrt{d}}arctg\frac{2ax+b}{2a\sqrt{d}}dx+C \quad (a\neq 0,\ d\neq 0)$$

Пример 1. $I=\int\frac{dx}{4x^2+4x+17}$.

$$I=\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x^2+x+\frac{17}{4}}=\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x^2+2\cdot\frac{1}{2}x+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{17}{4}}=\frac{1}{4}\int\frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+2^2};$$

введем подстановку $t=\left(x+\frac{1}{2}\right)$; $dt=dx$, $I_1=\frac{1}{4}\int\frac{dt}{t^2+2^{\,2}}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}arctg\frac{t}{2}$;

$$I=\frac{1}{8}arctg\frac{2x+1}{4}+C.$$

Ответ: $I=\frac{1}{8}arctg\frac{2x+1}{4}+C$.

Пример 2. $I=\int\frac{dx}{4x^2+7x+3}$.

$$I=\int\frac{dx}{4x^2+7x+3}=\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x^2+\frac{7}{4}x+\frac{3}{4}}=\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x^2+2x\frac{7}{2\cdot 4}+\left(\frac{7}{8}\right)^2+\frac{3}{4}-\left(\frac{7}{8}\right)^2};$$

$$I=\int\frac{dx}{4x^2+7x+3}=\frac{1}{4}\int\frac{dx}{\left(x+\frac{7}{8}\right)^2-\left(\frac{1}{8}\right)^2};$$

введем подстановку $t=\left(x+\frac{7}{8}\right)$; $dt=dx$,

$$I_1=\frac{1}{4}\int\frac{dt}{t^2-\left(\frac{1}{8}\right)^2}=\frac{1}{2\cdot 4}\ln\left|\frac{t-4}{t+4}\right|;\ I=\int\frac{dx}{4x^2+7x+3}=\frac{1}{8}\ln\left|\frac{2x-1}{2x+15}\right|+C.$$

Ответ: $I=\frac{1}{8}\ln\left|\frac{2x-1}{2x+15}\right|+C$.

2. $I=\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$.

Аналогично, как и при вычислении интегралов вида $I=\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}$, в интегралах вида $I=\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ в знаменателе подынтегральной функции под корнем выделяется полный квадрат, затем вводится замена переменных.

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=\frac{1}{\sqrt{a}}\int\frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+(\sqrt{d}\,)^2}};$$

Выражение $\left[\frac{c}{a}-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right]=d$ есть число, знак которого определяет: будут ли корни трехчлена рациональными или будут комплексными.

Введем замену переменных $t=\left(x+\frac{b}{2a}\right)$; $\pm t^2=\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$; $dt=dx$, для $a>0$ значение t положительное ($+t$), для $a<0$ значение t отрицательное ($-t$), получим интеграл I_1 по переменной t: $I_1=\frac{1}{\sqrt{a}}\int\frac{dt}{\sqrt{\pm t^2\pm\sqrt{d}^{\,2}}}$, этот интеграл табличный. Затем, переходя к сходной переменной, получают значение интеграла.

Пример 1. $I=\int\frac{dx}{\sqrt{4x^2+7x+3}}$.

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{4x^2+7x+3}}=\frac{1}{\sqrt{4}}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+\frac{7}{4}x+\frac{3}{4}}}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x\frac{7}{2\cdot 4}+\left(\frac{7}{8}\right)^2+\frac{3}{4}-\left(\frac{7}{8}\right)^2}};$$

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{4x^2+7x+3}}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{7}{8}\right)^2-\left(\frac{1}{8}\right)^2}};$$

введем подстановку $t=\left(x+\frac{7}{8}\right)$; $dt=dx$,

$$I_1=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{t^2-\left(\frac{1}{8}\right)^2}}=\frac{1}{2}\ln\left|t+\sqrt{t^2-\frac{1}{64}}\right|;$$

$$I=\int\frac{d\,x}{\sqrt{4x^2+7\,x+3}}=\frac{1}{2}\ln\left|(x+\frac{7}{8})-\sqrt{\left(x+\frac{7}{8}\right)^2-\frac{1}{64}}\right|+C\,.$$

Ответ: $I=\frac{1}{2}\ln\left|(x+\frac{7}{8})-\sqrt{\left(x+\frac{7}{8}\right)^2-\frac{1}{64}}\right|+C\,.$

3. $I=\int\frac{(k\,x+p)\,d\,x}{a\,x^2+b\,x+c}.$

Представим данный интеграл в виде суммы двух интегралов

$$I=I_1+I_2=\int\frac{(k\,x+p)\,d\,x}{a\,x^2+b\,x+c}=k\int\frac{x\,d\,x}{a\,x^2+b\,x+c}+p\int\frac{d\,x}{a\,x^2+b\,x+c}\,,$$

вычисление интеграла $I_2=\int\frac{d\,x}{a\,x^2+b\,x+c}$ было рассмотрено в первом задании. Для интеграла $I_1=k\int\frac{x\,d\,x}{a\,x^2+b\,x+c}$ выполним преобразования в числителе и введем подстановку

$t=a\,x^2+b\,x+c,\;\; d\,t=2\,a\,x+b\,,$

$I_1=k\int\frac{\frac{2\,a\,x+b}{2a}d\,x-\frac{b\,d\,x}{2a}}{a\,x^2+b\,x+c}=\frac{k}{2a}\int\frac{(2\,a\,x+b)\,d\,x}{a\,x^2+b\,x+c}-\frac{k\,b}{2a}\int\frac{d\,x}{a\,x^2+b\,x+c}$, исходный интеграл запишем в виде

$$I=\int\frac{(k\,x+p)\,d\,x}{a\,x^2+b\,x+c}=\frac{k}{2a}\int\frac{(2\,a\,x+b)\,d\,x}{a\,x^2+b\,x+c}+(p-\frac{k\,b}{2a})\,I_2\,,$$

используя введенную подстановку, вычислим первый интеграл суммы:

$$I_3=\frac{k}{2\,a}\int\frac{(2\,a\,x+b)\,d\,x}{a\,x^2+b\,x+c}=\frac{k}{2\,a}\int\frac{d\,t}{t}=\frac{k}{2\,a}\ln|t|=\frac{k}{2\,a}\ln(a\,x^2+b\,x+c)\,.$$

окончательно исходный интеграл вычисляется по формуле

$$I=\int\frac{(k\,x+p)\,d\,x}{a\,x^2+b\,x+c}=\frac{k}{2\,a}\ln(a\,x^2+b\,x+c)+\left(p-\frac{k\,b}{2\,a}\right)\int\frac{d\,x}{a\,x^2+b\,x+c}+C\,.$$

Пример 1. $I=\int\frac{(3x+2)\,d\,x}{4x^2+2x-3}.$

$$I=\int\frac{(3x+2)\,d\,x}{4x^2+2x-3}=\int\frac{3x\,d\,x}{4x^2+2x-3}+2\int\frac{d\,x}{4x^2+2x-3}\,;$$

$$I_1=\int\frac{3x\,d\,x}{4x^2+2x-3}\,;\qquad I_2=\int\frac{d\,x}{4x^2+2x-3}\,;$$

для интеграла $I_1=3\int\frac{x\,d\,x}{4x^2+2x-3}$ выполним преобразование числителя в соответствии с введенной подстановкой $t=4\,x^2+2\,x-3,\;\; d\,t=2\cdot 4\,x+2,\;\; d\,t=8\,x+2\,,$

$$I_1 = 3\int \frac{x\,dx}{4x^2+2x-3} = 3\int \frac{\frac{1}{8}(8x+2)\,dx - \frac{1}{4}\,dx}{4x^2+2x-3} = \frac{3}{8}\int \frac{(8x+2)\,dx}{4x^2+2x-3} - \frac{3}{4}\int \frac{dx}{4x^2+2x-3};$$

$$I = \frac{3}{8}\int \frac{(8x+2)\,dx}{4x^2+2x-3} + (2-\frac{3}{4})\int \frac{dx}{4x^2+2x-3} = \frac{3}{8}\int \frac{dt}{t} + \frac{5}{4}\int \frac{dx}{4x^2+2x-3};$$

$$I = \frac{3}{8}\int \frac{dt}{t} + \frac{5}{4}\int \frac{dx}{4x^2+2x-3} = \frac{3}{8}\ln(4x^2+2x-3) + \frac{5}{4} I_2 + C.$$

$$I_2 = \int \frac{dx}{4x^2+2x-3} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x+2\frac{x}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-3} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{\sqrt{13}^{\,2}}{2}} = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{2x+1-\sqrt{13}}{2x+1+\sqrt{13}}\right|;$$

$$I = \frac{3}{8}\ln(4x^2+2x-3) + \frac{5}{16}\ln\left|\frac{2x+1-\sqrt{13}}{2x+1+\sqrt{13}}\right| + C.$$

Ответ: $I = \frac{3}{8}\ln(4x^2+2x-3) + \frac{5}{16}\ln\left|\frac{2x+1-\sqrt{13}}{2x+1+\sqrt{13}}\right| + C$.

Лекция № 8

Интегрирование простейших рациональных дробей. Разложение рациональной дроби на простые

8.1. Интегрирование простых дробей.
8.2. Разложение рациональной дроби на простые дроби. Интегрирование рациональных дробей.

8.1. Интегрирование простых дробей

Рациональные дроби определяются отношением двух алгебраических многочленов, и представляют тот класс функций, интегралы которых сводятся к интегрированию элементарных функций. Всякая рациональная функция представима в виде рациональной дроби $\frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$ и $Q(x)$ есть многочлены вида:

$$P(x) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_i x^{n-i} + \ldots + A_{n-1} x^1 + A_n x^0,$$
$$Q(x) = B_0 x^m + B_1 x^{m-1} + \ldots + B_i x^{m-i} + \ldots + B_{m-1} x^1 + B_m x^0,$$

не имеющие одинаковых корней, причем корни и коэффициенты A_i и B_i будем рассматривать вещественные, показатели степени натуральные числа.

Если степень n многочлена $P(x)$ больше степени m многочлена $Q(x)$, дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ – неправильная и её можно представить в виде суммы многочлена $G(x)$, полученного от деления числителя на знаменатель и правильной дроби $\frac{F(x)}{Q(x)}$, где $F(x)$ многочлен остаток от деления.

Например, представим неправильную рациональную дробь $\frac{x^4 + 2x^2 + 1}{x^2 + 4x + 3}$ в виде многочлена и правильной рациональной дроби. Разделим числитель на знаменатель по правилу деления многочленов:

$$
\begin{array}{rl|l}
 & x^4 + + 2x^2 + 1 & \underline{x^2 + 4x + 3} \\
- & \underline{x^4 + 4x^3 + 3x^2} & x^2 - 4x + 15 \\
 & -4x^3 - x^2 + 1 & \\
- & \underline{-4x^3 - 16x^2 - 12x} & \\
 & 15x^2 + 12x + 1 & \\
- & \underline{15x^2 + 60x + 45} & \\
 & -48x - 44, &
\end{array}
$$

получим: $\dfrac{x^4+2x^2+1}{x^2+4x+3}=x^2-4x+15-4\dfrac{12x+11}{x^2+4x+3}$, дробь $\dfrac{12x+11}{x^2+4x+3}$ правильная.

Далее будем рассматривать интегрирование правильных рациональных дробей.

Интегрирование рациональных дробей частично уже рассматривалось в предыдущих лекциях, так:

1. $\displaystyle\int\frac{A\,d\,x}{x-a}=\int\frac{A\,d\,(x-a)}{x-a}=A\ln\left|x-a+C\right|$ – табличный интеграл;

2. $\displaystyle\int\frac{A\,d\,x}{(x-a)^m}=\int\frac{A\,d\,(x-a)}{(x-a)^m}=A\frac{(x-a)^{-m+1}}{-m+1}+C$,

3. $\displaystyle\int\frac{Ax+B}{x^2+p\,x+q}\,d\,x=\frac{A}{2}\ln\left|x^2+p\,x+q\right|+\frac{2B-A\,p}{\sqrt{4q-p^2}}\,arctg\,\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C$,

здесь выражение $\dfrac{p^2}{4}-q$ дискриминант квадратного трехчлена и его знак определяет вид корней, если $\dfrac{p^2}{4}-q\geq 0$ – корни действительные, если $\dfrac{p^2}{4}-q<0$ – корни трехчлена комплексные. Для вычисления третьего интеграла использовалась подстановка $t=x+\dfrac{p}{2},\ d\,t=d\,x$.

Рассмотрим интегрирование простой рациональной дроби четвертого вида

4. $\displaystyle\int\frac{Ax+B}{(x^2+p\,x+q)^m}d\,x=\int\frac{Ax+B}{\left[x^2+2\frac{p}{2}x+\left(\frac{p}{2}\right)^2+q-\left(\frac{p}{2}\right)^2\right]^m}d\,x=\int\frac{Ax+B}{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)\right]^m}d\,x$.

Введем подстановку $t=x+\dfrac{p}{2},\ d\,t=d\,x$, получим

$$
\int\frac{Ax+B}{(x^2+p\,x+q)^m}d\,x=\int\frac{A\left(t-\frac{p}{2}\right)+B}{\left[t^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)\right]^m}d\,t=A\int\frac{t\,d\,t}{\left[t^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)\right]^m}+\left(B-\frac{A\,p}{2}\right)\int\frac{d\,t}{\left[t^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)\right]^m}.
$$

Обозначим $\left(q-\dfrac{p^2}{4}\right)=d^2$ и вычислим интегралы

$$I_1 = A\int \frac{t\,dt}{\left[t^2+d^2\right]^m} \text{ и } I_2 = \left(B-\frac{p}{2}\right)\int \frac{dt}{\left[t^2+d^2\right]^m} \;.$$

$$I_1 = A\int \frac{t\,dt}{\left[t^2+d^2\right]^m} = \frac{A}{2}\int \frac{d\,(t^2+d^2)}{\left[t^2+d^2\right]^m} = \frac{A}{2(m-1)}\cdot\frac{1}{(t^2+d^2)^{m-1}}\,.$$

Возвращаясь к переменной x, получим:

$$I_1 = \frac{A}{2\,(m-1)}\cdot\frac{1}{\left(x^2+p\,x+q\right)^{m-1}}{}_1\;. \qquad (1)$$

Интегралы вида $I_1 = A\int \frac{t\,dt}{\left[t^2+d^2\right]^m}$ вычисляются по формуле (1)

Вычислим интеграл I_2.

$$I_2 = \frac{2B-p}{2}\int \frac{dt}{\left(t^2+d^2\right)^m} = \frac{2B-p}{2d^2}\int \frac{t^2+d^2-t^2}{\left(t^2+d^2\right)^m}\,dt = \frac{2B-p}{2d^2}\left(\int \frac{t^2+d^2}{\left(t^2+d^2\right)^m}\,dt - \int \frac{t^2}{\left(t^2+d^2\right)^m}\,dt\right) =$$

$$= \frac{2B-p}{2d^2}\int \frac{dt}{\left(t^2+d^2\right)^{m-1}} - \frac{2B-p}{2d^2}\int \frac{t^2}{\left(t^2+d^2\right)^m}\,dt\,.$$

Обозначим интеграл $I_3 = \int \frac{t^2}{\left(t^2+d^2\right)^m}\,dt$, тогда $I_2 = \frac{2B-p}{2d^2}\left(\int \frac{dt}{\left(t^2+d^2\right)^{m-1}} - I_3\right)$, вычислим I_3.

$I_3 = \int \frac{t^2}{\left(t^2+d^2\right)^m}\,dt = \int \frac{t\,d\,(t^2+d^2)}{2\left(t^2+d^2\right)^m}$, I_3 интегрируем по частям

$$u = t,\; du = dt,\; dv = \frac{d(t^2+d^2)}{2(t^2+d^2)^m},\quad v = -\frac{1}{2(m-1)}\frac{1}{(t^2+d^2)^{m-1}}\,;$$

$$I_3 = \int \frac{t^2}{\left(t^2+d^2\right)^m}\,dt = -\frac{1}{2(m-1)}\left[\frac{t}{\left(t^2+d^2\right)^{m-1}} - \int \frac{dt}{\left(t^2+d^2\right)^{m-1}}\right],$$

тогда перепишем I_2 с учетом I_3:

$$I_2 = \frac{2B-p}{2d^2}\int \frac{dt}{\left(t^2+d^2\right)^{m-1}} + \frac{2B-p}{2d^2}\,\frac{1}{2(m-1)}\left[\frac{t}{\left(t^2+d^2\right)^{m-1}} - \int \frac{dt}{\left(t^2+d^2\right)^{m-1}}\right] =$$

$$= \frac{2B-p}{2d^2}\left[\int \frac{dt}{\left(t^2+d^2\right)^{m-1}} - \frac{1}{2(m-1)}\int \frac{dt}{\left(t^2+d^2\right)^{m-1}} + \frac{1}{2(m-1)}\,\frac{t}{\left(t^2+d^2\right)^{m-1}}\right] =$$

$$= \frac{2B-p}{2d^2}\,\frac{1}{2\,(m-1)}\,\frac{t}{\left(t^2+d^2\right)^{m-1}} + \frac{2m-3}{2d^2\,(m-1)}\int \frac{dt}{\left(t^2+d^2\right)^{m-1}}\;.$$

Возвращаясь к переменной x, получим:

$$I_2 = \frac{1}{2(m-1)} \frac{2B-p}{2\left(q-\frac{p^2}{4}\right)} \frac{x+\frac{p}{2}}{\left(x^2+px+q\right)^{m-1}} + \frac{2m-3}{2\left(q-\frac{p^2}{4}\right)(m-1)} \int \frac{d\,x}{\left(x^2+p\,x+q\right)^{m-1}} .$$

Запишем исходный интеграл

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+p\,x+q)^m} d\,x = \frac{A}{2\,(m-1)} \cdot \frac{1}{\left(x^2+px+q\right)^{m-1}} +$$

$$+\frac{1}{2\,(m-1)} \frac{2B-p}{2\left(q-\frac{p^2}{4}\right)} \frac{x+\frac{p}{2}}{\left(x^2+p\,x+q\right)^{m-1}} + \frac{2m-3}{2\left(q-\frac{p^2}{4}\right)(m-1)} \int \frac{d\,x}{\left(x^2+p\,x+q\right)^{m-1}} .$$

Последнее слагаемое содержит интеграл такого же вида как интеграл I_2 с показателем подынтегральной функции на единицу меньшим. Повторяя вычисления, приходим к подынтегральной табличной функции.

Предполагается, что *A, B, a, m, p, q* действительные числа, корни квадратного трехчлена $x^2 + px + q$ комплексные числа.

Пример. Найти интеграл $\int \frac{2x+1}{(x^2+3x+4)^2} d\,x$.

$$\int \frac{2x+1}{(x^2+3x+4)^2} d\,x = \int \frac{2x+3-2}{(x^2+3x+4)^2} d\,x = \int \frac{d\,(x^2+3x)}{(x^2+3x+4)^2} d\,x - 2\int \frac{d\,x}{(x^2+3x+4)^2} =$$

$$= -\frac{1}{x^2+3x+4} - 2\int \frac{d\,x}{(x^2+3x+4)^2}.$$

Вычислим интеграл: $\int \frac{d\,x}{(x^2+3x+4)^2}$, применяя подстановку $t = x+\frac{3}{2},\ d\,t = d\,x$, получим:

$$\int \frac{d\,x}{(x^2+3x+4)^2} = \int \frac{d\,x}{\left(\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{4}\right)^2} = \int \frac{t^2+\frac{7}{4}-t^2}{\left(t^2+\frac{7}{4}\right)^2} d\,t = \frac{2}{\sqrt{7}} arctg \frac{2t}{\sqrt{7}} - \frac{1}{2} \int \frac{t^2\,d\,t}{\left(t^2+\frac{7}{4}\right)^2}$$

Вычислим интеграл:

$$\frac{1}{2} \int \frac{t^2\,d\,t}{\left(t^2+\frac{7}{4}\right)^2} ,$$

используя метод интегрирования по частям, введем замену:

$$t = u,\ \ d\,t = d\,u,\quad d\,v = d\left(\frac{1}{t^2+\frac{7}{4}}\right),\quad v = \frac{1}{t^2+\frac{7}{4}} .$$

$$\int \frac{t^2\,dt}{\left(t^2+\frac{7}{4}\right)^2} = -\frac{1}{2}\int \frac{t\,d\left(t^2+\frac{7}{4}\right)}{\left(t^2+\frac{7}{4}\right)^2} = -\frac{1}{2}\frac{t}{t^2+\frac{7}{4}} + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+\frac{7}{4}} = -\frac{1}{2}\frac{t}{t^2+\frac{7}{4}} + \frac{1}{\sqrt{7}} arctg \frac{2t}{\sqrt{7}}.$$

Окончательно получим:

$$\int \frac{2x+1}{(x^2+3x+4)^2}dx = -\frac{1}{x^2+3x+4} - \frac{2}{\sqrt{7}} arctg \frac{4x+6}{\sqrt{7}} - \frac{2x+3}{4(x^2+3x+4)} + C.$$

8.2. Разложение рациональной дроби на простые. Интегрирование рациональных дробей

Рассмотрим правильную рациональную дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$, в знаменателе которой многочлен $Q(x)$ степени m. Этот многочлен будет иметь m корней. Корни могут быть кратные, действительные или комплексные числа. Пусть коэффициент старшего члена многочлена равен единицы, тогда можно записать разложение многочлена на множители, причем действительные корни представляют произведение двучленов, а комплексные корни – произведение квадратных трехчленов

$$Q(x) = (x-a)^n \cdot (x-b)^p \cdot (x-c)^\kappa \cdot \ldots \cdot (x^2+px+q)^b \cdot \ldots.$$

Правильную рациональную дробь можно представить в виде суммы простых дробей, в числителях которых будут действительные числа, знаменатели каждый множитель разложения многочлена $Q(x)$:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(x-a)} + \ldots + \frac{A_i}{(x-a)^i} + \ldots + \frac{A_n}{(x-a)^n} + \frac{B_1}{(x-b)} + \ldots + \frac{B_j}{(x-b)^j} + \ldots + \frac{C_1x+D_1}{(x^2+px+q)} + \ldots$$

числа A_i, …, B_i, …, $(C_i x + D_i)$ … есть действительные числа, которые следует определять, разлагая рациональную дробь на простые дроби.

На практике используется два способа разложения рациональной дроби на простые, это *метод сравнения коэффициентов и метод частных значений.*

Метод сравнения коэффициентов

Пусть требуется найти интеграл правильной рациональной дроби:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int \frac{k_1x^n + k_2x^{n-1} + \ldots + k_{n-1}x + k_n}{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_{n-1})(x-a_n)}dx,$$

представим подынтегральную функцию в виде суммы простых дробей:

$$\frac{k_1x^n + k_2x^{n-1} + \ldots + k_{n-1}x + k_n}{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_{m-1})(x-a_m)} = \frac{A_1}{(x-a_1)} + \frac{A_2}{(x-a_2)} + \ldots + \frac{A_{n-1}}{(x-a_{n-1})} + \frac{A_n}{(x-a_n)}.$$

В правой части сумма простых дробей приводится к общему знаменателю, так как знаменатели дробей слева и справа одинаковые, то равны и их числители

$$k_1x^n + k_2x^{n-1} + \ldots + k_{n-1}x + k_n = A_1[(x-a_2)\ldots(x-a_n)] + \ldots + A_n[(x-a_1)\ldots(x-a_{n-1})], \qquad (2)$$

раскрывая, справа скобки и приводя подобные члены, получим некоторые суммы коэффициентов при переменных различных степеней. Приравнивая, суммы коэффициентов справа, к соответствующему коэффициенту той же степени переменной слева получим систему уравнений, из которой находятся коэффициенты A_2, A_2, …, A_{n-1}, A_n.

Метод частных значений

Так как выражение (2) есть тождество, придавая произвольно выбранные значения переменным справа и слева, получим систему уравнений для определения коэффициентов A_1, A_2, …, A_{n-1}, A_n. Для упрощения вычислений при отыскании коэффициентов удобно в качестве произвольных значений переменной брать значения корней знаменателя дроби, так это приводит к равенству нулю правой части слагаемых в тождестве (2).

Рассмотрим примеры нахождения интегралов рациональных дробей.

Пример 1. $I = \int \frac{5x^2 - 2x - 9}{x^3 - 6x^2 + 3x + 10}\,dx$.

Решение. Подынтегральная функция есть правильная рациональная дробь, разложим её знаменатель на множители: $x^3 - 6x^2 + 3x + 10 = (x-5)(x+1)(x-2)$, корни кубического многочлена все действительные и простые. Представим подынтегральную функцию в виде суммы трех простых дробей: $\frac{5x^2 - 2x - 9}{(x-5)(x+1)(x-2)} = \frac{A_1}{x-5} + \frac{A_2}{x+1} + \frac{A_3}{x-2}$,

справа приведем дроби к общему знаменателю и приравняем числители:

$$5x^2 - 2x - 9 = A_1(x+1)(x-2) + A_2(x-5)(x-2) + A_3(x+1)(x-5),$$

справа перемножим слагаемые и приведем подобные члены:

$$5x^2 - 2x - 9 = (A_1 + A_2 + A_3)x^2 - (A_1 + 7A_2 + 4A_3)x - (2A_1 - 10A_2 + 5A_3).$$

Приравняем соответствующие коэффициенты, составим систему уравнений, решим её и найдем значения A_1, A_2, A_3:

$$\begin{cases} A_1+A_2+A_3=5 \\ A_1+7A_2+4A_3=2 \\ 2A_1-10A_2+5A_3=9 \end{cases}; \quad \begin{cases} A_1=5-A_2-A_3 \\ 6A_2+3A_3=-3 \\ -12A_2+3A_3=-1 \end{cases}; \quad \begin{cases} A_1=5-A_2-A_3 & \to A_1=\dfrac{53}{9} \\ 3A_3=-3-6A_2 & \to A_2=-\dfrac{7}{9} \\ -18A_2=2 & \to A_2=-\dfrac{1}{9} \end{cases}.$$

Выразим заданный интеграл через интегралы простых дробей

$$I=\int\frac{5x^2-2x-9}{x^3-6x^2+3x+10}dx=\frac{53}{9}\int\frac{dx}{x-5}-\frac{1}{9}\int\frac{dx}{x+1}-\frac{7}{9}\int\frac{dx}{x-2}=$$

$$=\frac{53}{9}\ln|x-5|-\left(\frac{1}{9}\ln|x+1|+\frac{7}{9}\ln|x-2|\right)=\ln\left|\sqrt[9]{\frac{(x-5)^{53}}{(x+1)(x-2)^7}}\right|+C.$$

Ответ: $I=\dfrac{53}{9}\ln|x-5|-\left(\dfrac{1}{9}\ln|x+1|+\dfrac{7}{9}\ln|x-2|\right)=\ln\left|\sqrt[9]{\dfrac{(x-5)^{53}}{(x+1)(x-2)^7}}\right|+C.$

Пример 2. $I=\displaystyle\int\frac{3x^2+5x-18}{x^3-6x^2+9x}dx$.

Решение. Подынтегральная функция – правильная рациональная дробь, представим знаменатель в виде произведения $x^3-6x^2+9x=x(x-3)^2$,

знаменатель подынтегральной функции содержи кратные корни. Представим подынтегральную функцию в виде суммы простых дробей:

$$\frac{3x^2+5x-18}{x(x-3)}=\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{(x-3)^2}+\frac{A_3}{x-3};$$

$$3x^2+5x-18=A_1(x-3)^2+A_2x+A_3x(x-3)=(A_1+A_3)x^2+(-6A_1+A_2-3A_3)x+9A_1.$$

Составим систему уравнений и определим A_1, A_2, A_3:

$$\begin{cases} A_1+A_3=3 & \to A_3=5 \\ -6A_1+A_2-3A_3=5 & \to A_2=8 \\ 9A_1=-18 & \to A_1=-2 \end{cases}.$$

Выразим заданный интеграл через интегралы простых дробей

$$I=\int\frac{3x^2+5x-18}{x^3-6x^2+9x}dx=-2\int\frac{dx}{x}+8\int\frac{dx}{(x-3)^2}+5\int\frac{dx}{x-3}=-2\ln|x|-\frac{8}{x-3}+5\ln|x-3|+C;$$

$$I=\int\frac{3x^2+5x-18}{x^3-6x^2+9x}dx=-2\ln|x|-\frac{8}{x-3}+5\ln|x-3|+C=\ln\left|\frac{(x-3)^5}{x^2}\right|-\frac{8}{x-3}+C.$$

Ответ: $\displaystyle\int\frac{3x^2+5x-18}{x^3-6x^2+9x}dx=\ln\left|\frac{(x-3)^5}{x^2}\right|-\frac{8}{x-3}+C.$

Покажем вычисление коэффициентов *методом частных значений.* Будем придавать переменной x произвольно выбранные значения и определим коэффициенты A_1, A_2, A_3 из ранее полученного тождества.

Запишем тождество $3x^2+5x-18=A_1(x-3)^2+A_2x+A_3\,x(x-3)$,

1) пусть $x = 0$, $-18 = 9A_1 \to A_1 = -2$;

2) пусть $x = 3$, $3\cdot 9 + 5\cdot 3 - 18 = 3A_2 \to A_2 = 8$;

3) пусть $x = 1$, $3\cdot 1 + 5\cdot 1 - 18 = -2\cdot 4 + 8 - 2A_3 \to A_3 = 5$.

Далее, решение выполняется так же, как было уже показано выше.

Пример 3. $I=\int\frac{2x^3+x^2+2x+1}{x^4+3x^3+6x^2+7x+3}d\,x$.

Решение. Подынтегральная функция – правильная рациональная дробь, представим знаменатель в виде произведения $x^4 + 3x^3 + 6x^2 + 7x + 3 = (x+1)^2(x^2 + x + 3)$, знаменатель подынтегральной функции содержи кратные корни и квадратный трехчлен с комплексными корнями. Представим подынтегральную функцию в виде суммы простых дробей:

$$\frac{2x^3+x^2+2x+1}{(x+1)^2(x^2+x+3)}=\frac{A_1}{(x+1)^2}+\frac{A_2}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+3};$$

$$2x^3+x^2+2x+1=A_1(x^2+x+3)+A_2(x+1)(x^2+x+3)+(Bx+C)(x+1)^2,$$

Составим систему уравнений и определим A_1, A_2, B, C:

$$\begin{cases}A_1+B=2\\2A_1+A_2+2B+C=1\\4A_1+A_2+B+2C=2\\3A_1+3A_2+C=1\end{cases};$$

решив эту систему, получим следующие значения коэффициентов:

$$A_1=\frac{16}{9};\ \ A_2=-\frac{6}{9};\ \ B=\frac{2}{9};\ \ C=-\frac{21}{9}.$$

Выразим заданный интеграл через интегралы простых дробей

$$I=\int\frac{2x^3+x^2+2x+1}{x^4+3x^3+6x^2+7x+3}d\,x=\frac{16}{9}\int\frac{d\,x}{x+1}-\frac{6}{9}\int\frac{d\,x}{(x+1)^2}+\frac{1}{9}\int\frac{2x-21}{x^2+x+3}d\,x;$$

$$I=\frac{16}{9}\ln|x+1|+\frac{6}{9}\frac{1}{x+1}+\frac{1}{9}\int\frac{2x-21}{x^2+x+3}d\,x;$$

вычислим интеграл $\int\frac{2x-21}{x^2+x+3}d\,x$.

$$\int \frac{2x-21}{x^2+x+3}dx = \int \frac{(2x+1)}{x^2+x+3}dx - 22\int \frac{dx}{x^2+x+3} = \ln\left|x^2+x+3\right| - 22\int \frac{d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(x^2+x+\frac{1}{4}\right)+\frac{11}{4}} =$$

$$= \ln\left|x^2+x+3\right| - 22\int \frac{d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(x^2+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{11}}{2}\right)^2} = \ln\left|x^2+x+3\right| - 4\sqrt{11}\,arctg\frac{2x+1}{\sqrt{11}} + C.$$

$$I = \frac{16}{9}\ln|x+1| + \frac{6}{9}\frac{1}{x+1} + \frac{1}{9}\left[\ln\left|x^2+x+3\right| - 4\sqrt{11}\,arctg\frac{2x+1}{\sqrt{11}}\right] + C\,.$$

Ответ: $I = \frac{16}{9}\ln|x+1| + \frac{6}{9}\frac{1}{x+1} + \frac{1}{9}\left[\ln\left|x^2+x+3\right| - 4\sqrt{11}\,arctg\frac{2x+1}{\sqrt{11}}\right] + C\,.$

Лекция № 9

Интегрирование простейших алгебраических иррациональностей и некоторых тригонометрических функций

9.1. Интегрирование простейших алгебраических иррациональностей

Будем рассматривать интегралы, подынтегральные функции которых есть простейшие алгебраические иррациональности. Путем определенных преобразований, заменой переменной в подынтегральной функции интегрирование некоторых иррациональных выражений сводятся к интегралу от рациональных функций, то есть выполняется *рационализация* интеграла. Следует иметь в виду, что не от всякой иррациональной функции можно выполнить его рационализацию.

Факт того, что подынтегральная функция есть рациональная функция от дробных степеней своих аргументов, вводится обозначение $R(x, x^{m_1/n_1},\ldots,x^{m_k/n_k})$, $R\left(x,\left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_1/n_1},\ldots,\left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_k/n_k}\right)$ и т.д., то есть над всеми величинами степени x выполняются рациональные операции. Рационализация интеграла производится путем введения подстановок $x=t^p$ или $\dfrac{ax+b}{cx+d}=t^p$, где показатель p есть наименьшее общее кратное знаменателей степеней показателей, то есть n_1, …, n_k.

Рассмотрим примеры и способы нахождения интегралов некоторых иррациональных выражений

Пример 1. $I=\displaystyle\int\frac{\sqrt[3]{x^2}+x^{1/3}+\sqrt[6]{x}}{x+x\sqrt[3]{x}}\,dx.$

Решение. Наименьшее общее кратное (н.о.к.), всех знаменателей дробных показателей степени x, равно 6. Введём подстановку:

$$x=t^6,\ t=\sqrt[6]{x},\ dx=6t^5dt,\ \sqrt[3]{x^2}=t^4,\ x^{1/3}=t^2,\ x\sqrt[3]{x}=t^8.$$

$$I=\int\frac{t^4+t^2+t}{t^6+t^8}6t^5\,dt=6\int\frac{t^6(t^3+t+1)}{t^6(t^2+1)}dt=6\int\frac{t(t^2+1)+1}{t^2+1}dt=6\int t\,dt+6\int\frac{dt}{t^2+1}\ ;$$

$$I=6\int t\,dt+6\int\frac{dt}{t^2+1}=3t^2+6\,arctg\,t=3\sqrt[3]{x}+6\,arctg\sqrt[6]{x}+C.$$

Ответ: $\displaystyle\int\frac{\sqrt[3]{x^2}+x^{1/3}+\sqrt[6]{x}}{x+x\sqrt[3]{x}}dx=3\sqrt[3]{x}+6\,arctg\sqrt[6]{x}+C.$

Пример 2. $\displaystyle I=\int\frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt[3]{x+2}+3}dx.$

Решение. Н.о.к. знаменателей дробных показателей степени (x + 2), равно 6. Введём подстановку

$$x+2=t^6,\ t=\sqrt[6]{x+2},\ dx=6t^5dt,\ \sqrt{x+2}=t^3,\ \sqrt[3]{x+2}=t^2.$$

$$I=\int\frac{t^3}{t^2+3}6t^5dt=6\int\frac{t^8}{t^2+3}dt=6\int\frac{(t^2+3-3)t^6}{t^2+3}dt=6\int t^6\,dt+6\int\frac{-3t^6}{t^2+3}dt=$$

$$=\frac{6}{7}t^7-18\int\frac{(t^2+3-3)t^4}{t^2+3}dt=\frac{6}{7}t^7-\frac{18}{5}t^5+18t^3-162t+486\int\frac{dt}{t^2+3}=$$

$$=\frac{6}{7}t^7-\frac{18}{5}t^5+18t^3-162t+\frac{486}{\sqrt{3}}arctg\frac{t}{\sqrt{3}}+C.$$

Перейдем к аргументу x:

$$I=\int\frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt[3]{x+2}+3}dx=\frac{6}{7}(x+2)^{7/6}-\frac{18}{5}(x+2)^{5/6}+18(x+2)^{1/2}-162(x+2)^{1/6}+\frac{486}{\sqrt{3}}arctg\frac{(x+2)^{1/6}}{\sqrt{3}}+C.$$

Ответ: $\displaystyle I=\frac{6}{7}(x+2)^{7/6}-\frac{18}{5}(x+2)^{5/6}+18(x+2)^{1/2}-162(x+2)^{1/6}+\frac{486}{\sqrt{3}}arctg\frac{(x+2)^{1/6}}{\sqrt{3}}+C.$

9.2. Подстановки Эйлера

Для вычисления интегралов вида $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$, где квадратный трехчлен имеет различные корни, используются *подстановки Эйлера*, с помощью которых достигается рационализация подынтегрального выражения.

В случае, если первый коэффициент квадратного трехчлена положительный (a > 0), применяется первая подстановка Эйлера $\sqrt{ax^2+bx+c}=t\pm x\sqrt{a},\quad a>0;$

$$ax^2+bx+c=(t-x\sqrt{a})^2;\quad ax^2+bx+c=t^2-2tx\sqrt{a}+ax^2;$$

$$bx+c=t^2-2tx\sqrt{a};\quad x(b+2t\sqrt{a})=t^2-c;\quad x=\frac{t^2-c}{b+2t\sqrt{a}};$$

$$dx=\frac{2(t^2\sqrt{a}-bt+c\sqrt{a})}{(b+2t\sqrt{a})^2}.$$

Пример 1. $I=\int\frac{d\,x}{x\sqrt{2x^2+2x+1}}$; $a>0.$

Решение. Введем первую подстановку Эйлера

$$\sqrt{2x^2+2x+1}=t-x\sqrt{2};\quad 2x^2+2x+1=(t-x\sqrt{2})^2\to x=\frac{t^2-1}{2+2\sqrt{2}\,t};\quad d\,x=\frac{\sqrt{2}\,t^2+2t+\sqrt{2}}{2(1+\sqrt{2}t)^2}\,d\,t.$$

Выразим иррациональное выражение $\sqrt{2x^2+2x+1}$ через переменную t:

$$\sqrt{2x^2+2x+1}=t-\frac{\sqrt{2}(t^2-1)}{2+2\sqrt{2}\,t}=\frac{\sqrt{2}t^2+2t+\sqrt{2}}{2+2\sqrt{2}\,t}.$$

Запишем интеграл с переменной t:

$$\int\frac{(\sqrt{2}\,t^2+2t+\sqrt{2})\;d\,t}{\dfrac{t^2-1}{2(1+\sqrt{2}\,t)}\cdot\dfrac{\sqrt{2}\,t^2+2t+\sqrt{2}}{2(1+\sqrt{2}\,t)}\cdot 2(1+\sqrt{2}\,t)^2}=2\int\frac{d\,t}{t^2-1}=\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C.$$

Перейдем к переменной x, получим:

$$\int\frac{d\,x}{x\sqrt{2x^2+2x+1}}=\ln\left|\frac{x\sqrt{2}+\sqrt{2x^2+2x+1}-1}{x\sqrt{2}+\sqrt{2x^2+2x+1}+1}\right|+C.$$

Ответ: $I=\ln\left|\dfrac{x\sqrt{2}+\sqrt{2x^2+2x+1}-1}{x\sqrt{2}+\sqrt{2x^2+2x+1}+1}\right|+C.$

Если свободный член квадратного трехчлена положительный ($c>0$) применяется вторая подстановка Эйлера $\sqrt{a\,x^2+b\,x+c}=t\,x-\sqrt{c},\quad c>0;$

Пример 3. $I=\int\frac{d\,x}{(1+2x)\sqrt{2x-2x^2+1}}$; $a<0,\,c>0.$

Решение. Введем вторую подстановку Эйлера:

$$\sqrt{2x-2x^2+1}=tx-1;\quad 2x-2x^2+1=(t\,x-1)^2\to x=\frac{2(1+t)}{t^2+2};\quad d\,x=\frac{-2\,(t^2+2t-2)}{(t^2+2)^2}\,d\,t.$$

Выразим иррациональное выражение $\sqrt{2x-2x^2+1}$ через переменную t:

$$\sqrt{2x-2x^2+1}=\frac{t^2+2t-2}{t^2+2}.$$

Запишем интеграл с переменной t:

$$I=\int\frac{-2(t^2+2t-2)\;d\,t}{(t^2+2)^2\left(1+\dfrac{4(1+t)}{t^2+2}\right)\cdot\dfrac{t^2+2t-2}{t^2+2}}=-2\int\frac{d\,t}{t^2+4t+6}=-2\int\frac{d\,t}{(t+2)^2+2}=-\sqrt{2}\,arctg\frac{t+2}{\sqrt{2}}+C.$$

Перейдем к переменной x, получим:

$t=\dfrac{\sqrt{2x-2x^2+1}+1}{x}$; $\dfrac{t+2}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2x-2x^2+1}+1+2x}{x\sqrt{2}}$;

$$\int\frac{dx}{(1+2x)\sqrt{2x-2x^2+1}}=-\sqrt{2}\ arctg\,\frac{\sqrt{2x-2x^2+1}+(1+2x)}{x\sqrt{2}}+C.$$

Ответ: $I=-\sqrt{2}\ arctg\,\dfrac{\sqrt{2x-2x^2+1}+(1+2x)}{x\sqrt{2}}+C.$

Если квадратный трехчлен имеет два различных действительных корня $x_1 \neq x_2$, $\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)}$, то применяется *третья подстановка Эйлера.*

Пример 4. $I=\int\dfrac{dx}{\sqrt{2x^2-7x+6}}$; $a>0,\ c>0,\ x^2-5x+6=(x-2)(x-\dfrac{3}{2}).$

Решение. Введем третью подстановку Эйлера

$$\sqrt{2x^2-7x+6}=(x-2)t;\quad 2x^2-7x+6=(x-2)^2t^2\to x-\frac{3}{2}=(x-2)t^2\to x=\frac{3-4t^2}{2(1-t^2)};$$

$$dx=\frac{-4t}{2(1-t^2)}dt;\quad \sqrt{2x^2-7x+6}=\left(\frac{3-4t^2}{2(1-t^2)}-2\right)t=-\frac{t}{2(1-t^2)};\quad t=\frac{\sqrt{2x^2-7x+6}}{x-2}.$$

Запишем интеграл с переменной t :

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{2x^2-7x+6}}=\int\frac{-4t\,dt}{2(1-t^2)\left(-\dfrac{t}{2(1-t^2)}\right)}=4t+C.$$

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{2x^2-7x+6}}=4\frac{\sqrt{2x^2-7x+6}}{x-2}+C.$$

Ответ: $I=4\dfrac{\sqrt{2x^2-7x+6}}{x-2}+C.$

9.3. Интегрирование некоторых тригонометрических функций

Вычисление интегралов рациональных функций, содержащих $sin\,x$ и $cos\,x$, то есть $\int R(sin\,x,\,cos\,x)$, выполняется с помощью подстановок. Подстановка

$tg\,\dfrac{x}{2}=t,\quad(-\pi<x<\pi)-$ *универсальная тригонометрическая подстановка.*

Если рациональная функция R (- $sin\,x$, $cos\,x$) = - R($sin\,x$, $cos\,x$), то целесообразней применить подстановку $cos\,x = t$, если R($sin\,x$, - $cos\,x$) = - R($sin\,x$, $cos\,x$), то берется подстановка $sin\,x = t$. Если R (- $sin\,x$, – $cos\,x$) = R($sin\,x$, $cos\,x$) или R (tgx), то применяется подстановка $tg\,x = t$, ctg $x = t$.

Пример 5. $I=\int\frac{d\,x}{\sin x(\sin x-2\cos x-1)}$.

Воспользуемся универсальной подстановкой $tg\frac{x}{2}=t,\quad (-\pi<x<\pi)$ и выразим *sin x*, *cos x* и *dx* через *t* и *dt*:

$$\sin x=\frac{2tg\,{}^{x}\!/_{2}}{1+tg^{2}\,{}^{x}\!/_{2}}\rightarrow\sin x=\frac{2t}{1+t^{2}};$$

$$\cos x=\frac{1-tg^{2}\,{}^{x}\!/_{2}}{1+tg^{2}\,{}^{x}\!/_{2}}\rightarrow\cos x=\frac{1-t^{2}}{1+t^{2}};$$

$$\frac{x}{2}=arctg\,t\rightarrow x=2\,arctg\,t;\quad d\,x=d\,(2\,arctg\,t)\rightarrow d\,x=\frac{2\,dt}{1+t^{2}}.$$

Решение. Введем подстановку, получим:

$$I=\int\frac{\frac{2\,d\,t}{1+t^{2}}}{\frac{2t}{1+t^{2}}\left(\frac{2t}{1+t^{2}}-2\frac{1-t^{2}}{1+t^{2}}-1\right)}=\int\frac{(1+t^{2})\,d\,t}{t\left(t^{2}+2t-3\right)}=\int\frac{(1+t^{2})\,d\,t}{t\,(t+3)\,(t-1)}.$$

Подынтегральную функцию разлагаем на простые дроби, получим

$$\frac{1+t^{2}}{t\,(t+3)\,(t-1)}=\frac{A_{1}}{t}+\frac{A_{2}}{t+3}+\frac{A_{3}}{t-1}.$$

Вычислим коэффициенты методом частных значений. Определим коэффициенты A_1, A_2, A_3 из тождества

$$1+t^{2}=A_{1}(t^{2}+2t-3)+A_{2}(t^{2}-t)+A_{3}(t^{2}+3t),$$

1) пусть $t = 0$, $\quad 1 = -3A_1 \rightarrow A_1 = -1/3$;

2) пусть $t = -3$, $\quad 10 = 12\,A_2 \rightarrow A_2 = 5/6$;

3) пусть $t = 1$, $\quad 2 = 4\,A_3 \rightarrow A_3 = 1/2$.

Выразим интеграл с переменной *t* через интегралы простых дробей

$$I=\int\frac{(1+t^{2})\,d\,t}{t\left(t^{2}+2t-3\right)}=\int\frac{(1+t^{2})\,d\,t}{t\,(t+3)\,(t-1)}=-\frac{1}{3}\int\frac{d\,t}{t}+\frac{5}{6}\int\frac{d\,t}{t+3}+\frac{1}{2}\int\frac{d\,t}{t-1}=$$

$$=-\ln|\,t\,|+\frac{5}{6}\ln|t+3|+\frac{1}{2}\ln|t-1|=\ln\frac{(t+3)\,(t-1)}{t}+C.$$

Перейдем к переменной *x*, получим:

$$I=\int\frac{d\,x}{\sin x(\sin x-2\cos x-1)}=\ln\left|\frac{(tg\,{}^{x}\!/_{2}+3)\,(tg\,{}^{x}\!/_{2}-1)}{tg\,{}^{x}\!/_{2}}\right|+C.$$

Ответ: $I = \ln\left|\dfrac{(tg\,{}^{x}\!/_{2}+3)(tg\,{}^{x}\!/_{2}-1)}{tg\,{}^{x}\!/_{2}}\right| + C.$

Пример 6. $I = \int \dfrac{(tg\,x-2)\,d\,x}{2\sin^2 x + 3\cos^2 x}.$

Воспользуемся подстановкой $tg\,x = t,\quad (-\pi < x < \pi)$ и выразим dx через t и dt:

так как $\quad d\,(tg\,x) = d\,t,\quad \dfrac{d\,x}{\cos^2 x} = d\,t\,.$

Решение. Числитель и знаменатель подынтегральной функции разделим на cos^2x и введем подстановку, получим

$$I = \int \frac{(t\,g\,x-2)\,\dfrac{d\,x}{\cos^2 x}}{2tg^2\,x+3} = \int \frac{(t-2)\,dt}{2tg^2\,t+3} = \int \frac{t\,dt}{2tg^2\,t+3} - \int \frac{2dt}{2tg^2\,t+3} =$$

$$= \frac{1}{4}\ln\left|2t^2+3\right| - \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{d(\sqrt{2}t+\sqrt{3})}{(\sqrt{2}\,tg\,t)^2+\sqrt{3}^2} = \frac{1}{4}\ln\left|2t^2+3\right| - \frac{1}{\sqrt{6}}\,arctg\,\frac{\sqrt{6}}{3}\,t + C.$$

Перейдем к переменной x, получим:

$$I = \int \frac{(t\,g\,x-2)\,d\,x}{2\sin^2 x+3\cos^2 x} = \frac{1}{4}\ln\left|2tg^2 x+3\right| - \frac{1}{\sqrt{6}}\,arctg\,\frac{\sqrt{6}\,tg\,x}{3} + C.$$

Ответ: $I = \dfrac{1}{4}\ln\left|2tg^2 x+3\right| - \dfrac{1}{\sqrt{6}}\,arctg\,\dfrac{\sqrt{6}\,tg\,x}{3} + C.$

§3 Определенный интеграл

Как уже было сказано в предыдущих лекциях, интегральное исчисление проявлялось ещё в античную эпоху при решении задач механики, построения военных сооружений, экономических расчетов. Появлялись новые открытия математических истин. Архимед, выполняя с помощью исследования различных приближенных вычисление, сравнений неравенств, решал задачи определения площадей и объемов различных криволинейных фигур и тел, применяя методы нижних и верхних приближенных сумм (интегральных сумм). Символ «∫» впервые был введен Яковом Бернулли в 1690 году, он же дал название «интеграл». В более обобщенном виде интегральное исчисление было завершено в XVII и XVIII вв. в трудах И. Ньютона и Г. Лейбница.

Понятие «*определенный интеграл*» функции $f(x)$ на интервале $[a, b]$ есть разность первообразных функций $F(b) - F(a)$ и по выражению Эйлера, всякий интеграл является *неопределенным*, но становится *определенным*, если аргумент имеет конкретное значение $x = a$, а интеграл получает конкретное значение «I». Определенный интеграл в отличие от неопределенного интеграла есть вполне конкретное число, когда неопределенный интеграл есть функция.

Лекция № 10

Понятие определенного интеграла как предела суммы. Интегральные суммы

10.1. Определение площади криволинейной трапеции. Интегральные суммы. Некоторые свойства сумм Дарбу.

10.2. Понятие определенного интеграла. Формула Ньютона–Лейбница.

10.3.Необходимые и достаточные условия существования определенного интеграла. Интегрируемость функций.

10.1. Определение площади криволинейной трапеции. Интегральные суммы и их пределы

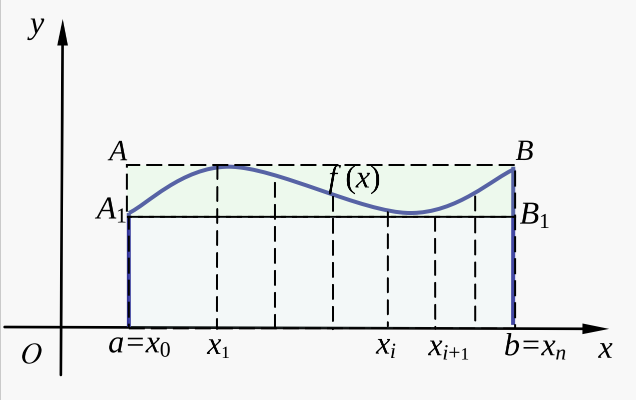


Рисунок 16

Задача. Определить площадь S криволинейной трапеции aA_1Bb, ограниченной графиком непрерывной функции $y = f(x)$ определенной в каждой точке отрезка $[a, b]$ и параллельными, оси Oy, прямыми: $x = a$, $x = b$ (рисунок 16).

Из непрерывности функции $f(x)$ следует, что на отрезке $[a, b]$ функция ограничена, поэтому существует нижняя $m = f(a)$ и верхняя $M = f(b)$ граница значений функции, то есть

$$f(a) = m \leq f(x) \leq M = f(b).$$

Из рисунка 16 видно, что S больше площади прямоугольника $aA_1B_1b = s$, но меньше площади прямоугольника $aABb = S^*$, то есть $s < S < S^*$.

Интегральные суммы. Некоторые свойства сумм Дарбу

Разобьем отрезок $[a, b]$ на отрезки малой величины $[x_i, x_{i+1}]$ такой, что

$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i \ (i = \overline{1, n}).$$

Внутри каждого элементарного отрезка $[x_i, x_{i+1}]$ найдется точка ξ_i $(x_i < \xi_i < x_{i+1})$ такая, что

$$m_i \leq f(\xi_i) \leq M_i$$

и произведение

$$\Delta x_i \cdot f(\xi_i) = S_i, \quad s_i < S_i < S_i^*.$$

Суммы

$$s = \sum_{i=1}^{n} s_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \, \Delta x_i \, ,$$

$$S^* = \sum_{i=1}^{n} S_i^* = \sum_{i=1}^{n} M_i \, \Delta x_i \, ,$$

определяющие наименьшее и наибольшее приближенное значение площади криволинейной трапеции и называются *нижней* и *верхней суммами Дарбу*:

нижняя сумма Дарбу

$$s = \sum_{i=1}^{n} s_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \, \Delta x_i \text{ – \textit{называется нижней интегральной суммой,}} \tag{1}$$

$$\lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} m_i \, \Delta x_i = \lim_{\Delta x_i \to 0} s = I_* \text{ – \textit{называется нижним интегралом Дарбу,}} \tag{2}$$

верхняя сумма Дарбу

$$S^* = \sum_{i=1}^{n} S_i^* = \sum_{i=1}^{n} M_i \, \Delta x_i \text{ – \textit{называется верхней интегральной суммой,}} \tag{3}$$

$$\lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} M_i \, \Delta x_i = \lim_{\Delta x_i \to 0} S^* = I^* \text{ – \textit{называется верхним интегралом Дарбу.}} \tag{4}$$

Таким образом, сумма площадей всех элементарных трапеций над каждым разбиением Δx_i отрезка $[a, b]$ есть $\sum_{i=1}^{n} S_i$,

$$\sum_{i=1}^{n} s_i \le \sum_{i=1}^{n} S_i \le \sum_{i=1}^{n} S_i^* \text{ и } \quad I_* < \sum_{i=1}^{n} S_i < I^* \, , \tag{5}$$

по определению интеграла

$$\lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} S_i = \lim_{\Delta x_i \to 0} S = I \, , \qquad I_* \le I \le I^* \, . \tag{6}$$

Так как $a < f(\xi_i) < b$, то, не ограничено производя разбиение отрезка $[a, b]$ на элементарные $[x_i, x_{i+1}]$ и *переходя к пределу* при $\Delta x_i \to 0$, где Δx_i *наибольший* из n элементарных отрезков, получим:

$$\sum_{i=1}^{n} s_i = \sum_{i=1}^{n} f(a) \, \Delta x_i ; \qquad \sum_{i=1}^{n} S_i^* = \sum_{i=1}^{n} f(b) \, \Delta x_i \, ,$$

тогда сумма $s = \sum_{i=1}^{n} s_i = \sum_{i=1}^{n} f(a) \, \Delta x_i$ – называется *нижней интегральной суммой*,

сумма $S^* = \sum_{i=1}^{n} S_i^* = \sum_{i=1}^{n} f(b) \, \Delta x_i$ – называется *верхней интегральной суммой*.

Определение. *Интегральной суммой* для функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$ называется сумма вида:

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i\,.$$

Интегральная сумма зависит от выбора точек x_i, разбивающих отрезок $[a, b]$ на элементарные отрезки и от выбора точек ξ_i на каждом элементарном отрезке.

Рассмотрим некоторые свойства сумм Дарбу:

1) с увеличением числа точек x_i , разбивающих отрезок $[a, b]$ на отрезки $[x_i, x_{i+1}]$ нижняя сумма Дарбу может только возрастать, а верхняя сумма может только уменьшаться. *Действительно*, разобьём отрезок $[x_i, x_{i+1}]$ еще на k отрезков, в нижней интегральной сумме добавится k слагаемых. Так как m_i нижняя граница значения функции, тогда $m_i\,\Delta x_i$ *нижнее* значение площади трапеции над отрезком $[x_i, x_{i+1}]$. Пусть $s_{i_k}^*$ – сумма Дарбу k слагаемых, на которые разбит интервал $[x_i, x_{i+1}]$, тогда $s_{i_k}^*$ будет больше или равной $m_i\,\Delta x_i$, следовательно

$$\sum_{i=1}^{n} s_{i_k}^* \geq \sum_{i=1}^{n} m_i\,\Delta x_i\,,$$

аналогичным образом доказывается, что верхняя сумма Дарбу может только уменьшаться;

2) при неограниченном увеличении числа точек x_i , разбивающих отрезок $[a, b]$ на элементарные отрезки *нижняя и верхняя интегральные суммы имеют пределы.* *Действительно*, так как $f(x) \leq M$, то функция ограничена сверху, и выполняется неравенство:

$$S^* = \sum_{i=1}^{n} M_i\,\Delta x_i \leq M(b-a)$$

из которого следует, что на всем отрезке $[a, b]$ верхняя интегральная сумма ограничена и, следовательно, имеет конечный предел, аналогичным образом доказывается, что нижняя интегральная сумма имеет конечный предел.

10.2 Понятие определенного интеграла. Формула Ньютона–Лейбница

Определение. Предел I интегральной суммы независящей от выбора точек x_i разбивающих отрезок $[a, b]$ на элементарные отрезки и от выбора точек ξ_i на каждом элементарном отрезке, при стремлении к нулю наибольшего Δx_i называется *определенным интегралом*

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,dx .$$

Подынтегральная функция $f(x)$ называется ***интегрируемой*** *на отрезке* $[a,b]$, ***если она непрерывна*** *и существует предел интегральной суммы*:

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i ,$$

независящей от выбора точек x_i и от выбора точек ξ_i на каждом отрезке Δx_i .Предел интегральной суммы или определенный интеграл:

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

от подынтегральной функции $f(x)$, взятой в пределах интегрирования между нижним пределом $x = a$ и верхним пределом $x = b$, определяет величину площади криволинейной трапеции aA_1Bb (рисунок 16).

Вычисление определенного интеграла для конкретных функций с помощью интегральных сумм задача довольно сложная и не всегда интегральную сумму можно привести к виду, дающему возможность нахождения её предела.

Поиски способов нахождения определенного интеграла позволили установить связь между неопределенным и определенным интегралом, представив неопределенный интеграл заданной функции как определенный интеграл той же функции с переменным верхним пределом.

Интеграл с переменным верхним пределом

Пусть непрерывная функция $f(x)$ интегрируема в каждой точке отрезка $[a, b]$, тогда она будет интегрируема на отрезке $[a, x]$, принадлежащем $[a, b]$.

Для всякого $x \in [a, b]$ $(a < x < b)$ может существовать интеграл вида:

$$F(x) = \int_a^x f(x)\,dx = \int_a^x f(t)\,dt ,$$

верхний предел интеграла x есть аргумент функции $F(x)$ определенной на отрезке $[a, b]$, может не являться аргументом подынтегральной функции, поэтому аргумент подынтегральной функции обозначен через *t*. *Функция F(x) называется интегралом с переменным верхним пределом.*

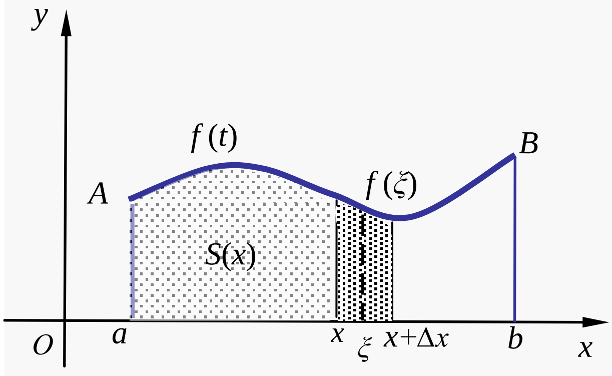


Рисунок 17

Значение функции $F(x)$ равно площади криволинейной трапеции на отрезке $[a, x]$ под графиком функции $f(t)$. На рисунке 17 показана площадь $S(x)$, соответствующая значению функции $F(x)$, а, следовательно, значению определенного интеграла с переменным верхним пределом:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

Рассмотрим основные свойства функции $F(x)$, которая определяет интеграл с переменным верхним пределом.

Теорема. Если функция $f(x)$ непрерывна и интегрируема в каждой точке $[a, b]$, тогда функция $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ так же непрерывна на $[a, b]$.

Доказательство. Если функция $f(x)$ непрерывна и интегрируема в каждой точке отрезка $[a, b]$, то она ограничена на $[a, b]$, $|f(x)| \le M$. Зададим приращение аргументу x, такое, что $(x + \Delta x) \in [a, b]$ (рисунок 17), тогда:

$$F(x+\Delta x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt = \int_a^x f(t)\,dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt \Rightarrow F(x+\Delta x) - F(x) = \Delta F(x);$$

$$\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt = \Delta F(x).$$

Так как $|f(x)| \le M$, тогда и

$$\left|\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt\right| = |\Delta F(x)| \le \left|\int_x^{x+\Delta x} M\,dt\right| \le M\,|\Delta x|,$$

получим:

$$\lim_{\Delta x \to 0} M\,|\Delta x| = 0 \to \lim_{\Delta x \to 0} \Delta F(x) = 0,$$

следовательно, функция

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

непрерывна в каждой точке отрезка $[a, b]$.

Теорема. Если функция $f(x)$ непрерывна и интегрируема в каждой точке отрезка $[a, b]$, то функция $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ дифференцируема в каждой точке отрезка $[a, b]$ и её производная равна подынтегральной функции.

Доказательство. Если функция $f(x)$ непрерывна в каждой точке отрезка $[a, b]$, то достаточно показать, что производная функции $F(x)$ равна подынтегральной функции $f(x)$. На отрезке $[a, b]$ произвольно выберем точку ξ, пусть $x < \xi < x + \Delta x$, тогда $f(x) < f(\xi) < f(x+\Delta x)$ и $\lim\limits_{\Delta x \to 0} f(\xi) = f(x)$.

Производная функции $F'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta F}{\Delta x}$, покажем, что $F'(\xi) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta F}{\Delta x} = f(\xi)$.

$$\left| \frac{\Delta F}{\Delta x} - f(\xi) \right| = \left| \frac{\int_{\xi}^{\xi+\Delta x} f(t)\,dt}{\Delta x} - f(\xi) \right|,$$

представим функцию $f(\xi)$ в виде интеграла $f(\xi) = \Delta x \cdot \int_{\xi}^{\xi+\Delta x} f(\xi)\,dt$, тогда

$$\left| \frac{\Delta F}{\Delta x} - f(\xi) \right| = \left| \frac{\int_{\xi}^{\xi+\Delta x} f(t)\,dt - \int_{\xi}^{\xi+\Delta x} f(\xi)\,dt}{\Delta x} \right| = \left| \frac{\int_{\xi}^{\xi+\Delta x} [f(t) - f(\xi)]\,dt}{\Delta x} \right|.$$

Так как функция $f(x)$ непрерывная на отрезке $[a, b]$, то существует малое положительное число ε и в точке ξ найдется как угодно малое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, такое, что для $x \in [a, b]$ выполняется $|x - \xi| < \delta$, следовательно, выполняется $|f(x) - f(\xi)| < \varepsilon$.

Пусть $\Delta x < \varepsilon$, тогда для $t \in [a, b]$ будет выполняться неравенство $|t - \xi| \le |\Delta x| < \delta$, а, следовательно, выполняется:

$$\left| \frac{\Delta F}{\Delta x} - f(\xi) \right| \le \left| \frac{\int_{\xi}^{\xi+\Delta x} \varepsilon\,dt}{\Delta x} \right| = \varepsilon \to \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f(\xi) = f(\xi).$$

В силу произвольного выбора точки $\xi \in [a, b]$ и непрерывности $f(x)$ справедливо равенство $\lim\limits_{\Delta x \to 0} f(\xi) = f(t)$. окончательно получаем:

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta x} = f(\xi).$$

Следствие. Для функции $f(x)$ непрерывной на отрезке $[a, b]$, существует на этом же отрезке её первообразная функция.

Формула Ньютона-Лейбница является основной формулой интегрального исчисления.

Теорема. Если функция $f(x)$ непрерывна и интегрируема в каждой точке $[a, b]$ и $F(x)$ первообразная для функции $f(x)$ в любой точке отрезка $[a, b]$, то определенный интеграл равен приращению первообразной на отрезке $[a, b]$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Доказательство. Если функция $f(x)$ непрерывна и интегрируема на $[a, b]$, то существует её первообразная в каждой точке отрезка $[a, b]$ и

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt; \quad F^*(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

Первообразные $F(x)$ и $F^*(x)$ первообразные одной и той же функции и могут отличаются друг от друга на некоторую константу C, то есть $F(x) = F^*(x) + C$. Первообразные для точек a и b соответственно будут $F(b) = F^*(b) + C$ и $F(a) = F^*(a) + C$. Приращение первообразных на отрезке $[a, b]$ запишутся в виде: $F(b) - F(a) = F^*(b) + C - F(a) - F^*(a) - C = F^*(b) - F^*(a)$ или

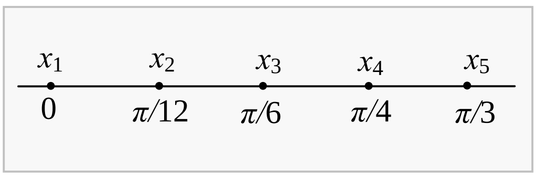
$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \text{ – } \textit{формула Ньютона-Лейбница.}$$

При записи решения введены обозначения для определения первообразной:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Определенный интеграл вычисляется по общим правилам интегрирования. После нахождения неопределенного интеграла полученную функцию вычисляют по формуле Ньютона-Лейбница. Чтобы найти значение интеграла надо подставить в результат интегрирования число верхней границы, затем вычесть значение интеграла посчитанного с нижней границей.

Пример. Найти нижние и верхние интегральные суммы для интеграла $\int_0^{\pi/3} \cos x\,dx$ на отрезке $[0, \pi/3]$ и вычислить интеграл.



Решение. Разобьём отрезок $[0, \pi/3]$ на четыре элементарных отрезка как показано на рисунке. Для определения верхней интегральной суммы S^* возьмем точки элементарных отрезков $x_1 = 0$, $x_2 = \pi/12$, $x_3 = \pi/6$, $x_4 = \pi/4$; для нижней интегральной суммы s возьмем точки $x_2 = \pi/12$, $x_3 = \pi/6$, $x_4 = \pi/4$ и $x_5 = \pi/3$. Длина наибольшего элементарного отрезка $\Delta x = \pi/12$.

Нижняя интегральная сумма есть произведение суммы значений функции в выбранных точках и $\Delta x = \pi/12$,

$$s = \frac{\pi}{12}\left(\cos\frac{\pi}{12} + \cos\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{12}\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\right) \approx 0{,}815;$$

верхняя интегральная сумма определится аналогично,

$$S^* = \frac{\pi}{12}\left(\cos 0 + \cos\frac{\pi}{12} + \cos\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{12}\left(1 + \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \approx 0{,}923.$$

Выполняются неравенства $s < S < S^*$, $s = 0{,}815 < S < 0{,}923 = S^*$.

Вычислим интеграл

$$\int_0^{\pi/3} \cos x\, d\,x = \sin x\Big|_0^{\pi/3} = \sin\frac{\pi}{3} - \sin 0 = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}866$$

Значение интеграла $\int_0^{\pi/3} \cos x\, d\,x$ на отрезке $[0, \pi/3]$ равно 0, 866.

Найдем среднее арифметическое значение нижней и верхней интегральных сумм: $S_{ср} = \frac{0{,}815 + 0{,}923}{2} = 0{,}869$. Из разности среднего значения интегральной суммы и значения интеграла определяется допущенная погрешность ≈ 0, 003. определение погрешностей существенно при решении конкретных физических и экономических задач.

Вычисляя площади криволинейных фигур, берется абсолютная величина полученного результата, так как площадь есть величина положительная.

Пример. Найти площадь криволинейной трапеции расположенной на отрезке [0, 2] под кривой $f(x) = \frac{8 - x^2}{2}$ (рисунок 18).

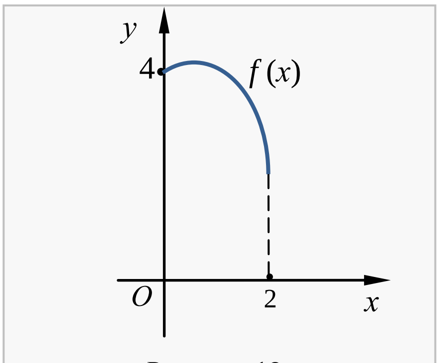


Рисунок 18

Решение. $S = \int_0^2 \frac{8 - x^2}{2} d\,x$. Так как площадь есть величина положительная, то берется модуль значения интеграла:

$$S = \int_0^2 \frac{8 - x^2}{2} dx = \left| 4x\Big|_0^2 - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3}\Big|_0^2 \right|$$

$$S = \int_0^2 \frac{8 - x^2}{2} dx = \left| 4x\Big|_0^2 - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3}\Big|_0^2 \right|,$$

Чтобы найти значение интеграла надо подставить в результат интегрирования число верхней границы, затем вычесть значение интеграла посчитанного с нижней границей:

$$S=\int_0^2 \frac{8-x^2}{2}dx=\left| 4x\Big|_0^2-\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}\Big|_0^2 \right|=8-\frac{8}{6}=\frac{20}{3};\quad S=6\frac{2}{3}.$$

Ответ: $S=6\frac{2}{3}$.

10.3. Необходимые и достаточные условия существования определенного интеграла

Теорема. Чтобы для непрерывной и ограниченной функции $y = f(x)$ на всем отрезке $[a, b]$ существовал определенный интеграл *необходимо и достаточно* равенство нулю предела разности верхней и нижней интегральных сумм при стремлении к нулю элементарного отрезка разбиения $\Delta x_i < \delta$

$$\lim_{\Delta x_i \to 0}(S^* - s) = 0\,.$$

Последнее равенство означает, что для всякого как угодно малого положительного числа ε существует такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что при сколь угодно малых разбиениях Δx_i выполняется неравенство:

$$\left|S_i^* - s_i\right| < \varepsilon \text{ или } \quad S_i^* - s_i < \varepsilon,\ S_i^* \ge s_i\,.$$

Доказательство необходимости. Функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$ значит, существует интеграл $I=\int_a^b f(x)d\,x$, равный пределу суммы S при сколь угодно малых разбиениях Δx_i: $\lim\limits_{\Delta x_i \to 0} S = I$, следовательно, найдется как угодно малое положительное число ε и найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что если при $\Delta x_i < \delta$ выполняется $\left|S-I\right|<\varepsilon$ или $I-\varepsilon<S<I+\varepsilon$. Тогда существуют верхняя и нижняя суммы Дарбу и

$$I-\varepsilon \le s \le S \le S^* \le I+\varepsilon\,,$$

или

$$I-\varepsilon \le s \le S^* \le I+\varepsilon;\quad I-\varepsilon \le S^* - s \le I+\varepsilon;$$

$$0 \le S^* - s \le 2\varepsilon\,.$$

Это значит, условие необходимости выполняется.

Доказательство достаточности. Функция $f(x)$ непрерывна и ограничена на всем отрезке $[a, b]$ и будем считать, что выполняется условие:

$$\lim_{\Delta x_i \to 0} (S^* - s) = 0\,,$$

тогда из определения верхнего и нижнего интеграла Дарбу (2,4) запишем

$$\lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} M_i\, \Delta x_i = \lim_{\Delta x_i \to 0} S^* = I^* \to 0 < I^* - S^* < \varepsilon,\quad I^* > S^*$$

$$\lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} m_i\, \Delta x_i = \lim_{\Delta x_i \to 0} s = I_* \to 0 < I_* - s < \varepsilon,\quad I_* > s\,,$$

вычитая из первого выражения второе, получим:

$$\lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta x_i = \lim_{\Delta x_i \to 0} (S^* - s) = I^* - I_*;$$

$$0 < (I^* - I_*) - (S^* - s) < 0 \to I^* - I_* = S^* - s = 0\,,$$

а это значит, что

$$\lim_{\Delta x_i \to 0} (S^* - s) = 0\,.$$

Определение. Если на элементарном отрезке $[x_i, x_{i+1}] \in [a, b]$ функция $f(x)$ достигает своего наибольшего значения $\sup f(x) = M_i$ и наименьшего значения $\inf f(x) = m_i$, то разность:

$$M_i - m_i = \omega_i$$

называется колебанием функции $f(x)$ на элементарном отрезке $[x_i, x_{i+1}]$.

Следствие. Чтобы ограниченная на всем отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ была интегрируема *необходимо и достаточно* равенство нулю суммы колебаний этой функции на всем отрезке $[a, b]$:

$$\lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \omega_i(f)\Delta x_i = 0.$$

Действительно, так как

$$I^* - I_* = S^* - s = 0\,,$$

$$\lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta x_i = \lim_{\Delta x_i \to 0} (S^* - s) = I^* - I_* = S^* - s,$$

и по определению выполняется равенство:

$$\lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta x_i = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \omega_i(f)\Delta x_i = 0,$$

то справедливо равенство:

$$\lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \omega_i(f)\Delta x_i = 0.$$

Теорема. Если функция $y = f(x)$ определена и непрерывна на всем отрезке $[a, b]$, то она интегрируема на этом отрезке.

Доказательство. Пусть функция $f(x)$ равномерно непрерывная на отрезке $[a, b]$ и для всякого как угодно малого положительного числа ε существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, тогда найдутся такие точки $\xi \in [a, b]$ и $\zeta \in [a, b]$, что при условии $|\xi - \zeta| < \delta$ выполняется соотношение:

$$|f(\xi) - f(\zeta)| < \frac{\varepsilon}{b-a} . \tag{7}$$

Производя разбиение отрезка $[a, b]$ на элементарные отрезки $[x_i, x_{i+1}]$ непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция будет иметь и на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ наибольшее и наименьшее значения.

На элементарном отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ найдутся такие точки $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ и $\zeta_i \in [x_i, x_{i+1}]$, что

$$|\xi_i - \zeta_i| < \Delta x_i ,$$

тогда наибольшее значение функции $\sup f(\xi_i) = M_i$ и наименьшее значение $\inf f(\zeta_i) = m_i$.
На отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ функция $f(x)$ равномерная и непрерывная, тогда для точек ξ_i и ζ_i найдется δ_i такое, что

$$|\xi_i - \zeta_i| < \Delta x_i \leq \delta_i < \delta.$$

Следовательно, в соответствии с соотношением (7):

$$|f(\xi_i) - f(\zeta_i)| \leq |f(\xi) - f(\zeta)| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Теорема. Если функция $y = f(x)$ определена и монотонна на всем отрезке $[a, b]$, то она интегрируема на этом отрезке.

Доказательство. Пусть функция $f(x)$ монотонно возрастает или монотонно убывает на отрезке $[a, b]$. Тогда для любой точке x_i отрезка $[a, b]$ выполняются неравенства:

$$f(a) \leq f(x) \leq f(b), \quad a < x < b \ (f(x) \text{ монотонно возрастает});$$

$$f(a) \geq f(x) \geq f(b), \quad a > x > b \ (f(x) \text{ монотонно убывает}),$$

следовательно, функция $f(x)$ ограничена на отрезке $[a, b]$.

Разобьем отрезок $[a, b]$ на малые элементарные отрезки $[x_i, x_{i+1}]$ $(i = \overline{1,n})$ и далее, будем рассматривать монотонно возрастающую функцию. Тогда на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ $f(x_i) = m_i$, $f(x_{i+1}) = M_i$ и $\sum\limits_{i=1}^{n}(M_i - m_i)\Delta x_i = S_i^* - s_i$, значит, найдется $\delta_i < \Delta x_i$ такое, что

$$\sum_{i=1}^{n}[f(x_{i+1}) - f(x_i)]\Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n}[f(x_{i+1}) - f(x_i)]\cdot \delta_i = \delta_i[f(b) - f(a)].$$

Из полученных соотношений следует, что

$$\lim_{\delta_i \to 0}[f(b) - f(a)]\delta_i = 0 \text{ и } \lim_{\delta_i \to 0}\sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)\delta_i = \lim_{\delta_i \to 0}(S^* - s) = 0 ,$$

следовательно, функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$.

Лекция № 11

Основные свойства определенного интеграла. Способы вычисления определенного интеграла

11.1. Основные свойства определенного интеграла.
11.2. Способы вычисления определенного интеграла.

11.1. Основные свойства определенного интеграла

Рассмотрим основные свойства интегрируемых функций на отрезках их интегрируемости.

Для определенного интеграла общепринятыми считаются следующие соотношения:

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0;\quad \int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx;\quad \int_a^b dx = b-a.$$

1) постоянный множитель подынтегральной функции можно выносить за знак интеграла (аналогично как в неопределенном интеграле):

$$\int_a^b k\,f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx;\ k\in D - \textit{множество действительных чисел};$$

2) если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на одном и том же отрезке, то интеграл от алгебраической суммы этих функций равен алгебраической сумме интегралов каждой функции:

$$\int_a^b [f(x)\pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx.$$

Доказательство. Производя разбиение отрезка $[a, b]$ на элементарные отрезки $[x_i, x_{i+1}]$ на каждом элементарном отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ найдутся такие точки $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ такие, что

$$\sum_{i=1}^{n}[f(\xi_i)\pm g(\xi_i)]\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i \pm \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\,\Delta x_i,$$

переходя к пределу алгебраической суммы при стремлении к нулю наибольшего отрезка разбиения $max\,\Delta x_i \to 0$, получим:

$$\int_a^b [f(x)\pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx;$$

3) если функции $f(x)$ интегрируемы на всем отрезке $[a, b]$, и существует точка, такая, что $\xi \in [a, b]$ и $a < \xi < b$, тогда

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{\xi} f(x)\,dx + \int_{\xi}^{b} f(x)\,dx.$$

Доказательство. В силу интегрируемости функции на всем отрезке $[a, b]$, следует равенство сумм:

$$\sum_a^b f(x)\Delta x = \sum_a^\xi f(x)\Delta x + \sum_\xi^b f(x)\Delta x,$$

переходя к пределу при стремлении к нулю наибольшего отрезка разбиения $max\ \Delta x_i \to 0$, получим $S = S_1 + S_2$ (рисунок 19) или

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^\xi f(x)dx + \int_\xi^b f(x)dx.$$

Следствие. Если функции $f(x)$ интегрируемы на всем отрезке $[a, b]$, существует точка ξ, такая, что $b < \xi$ и $a < b < \xi$, тогда, если функции $f(x)$ интегрируемы на всем отрезке $[a, \xi]$, выполняется равенство $S = S_1 - S_2$ (рисунок19*) или

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^\xi f(x)dx - \int_b^\xi f(x)dx.$$

Если функции $f(x)$ интегрируемы на всем отрезке $[a, b]$, то она интегрируема на любом отрезке $[\xi, \psi] \subset [a, b]$;

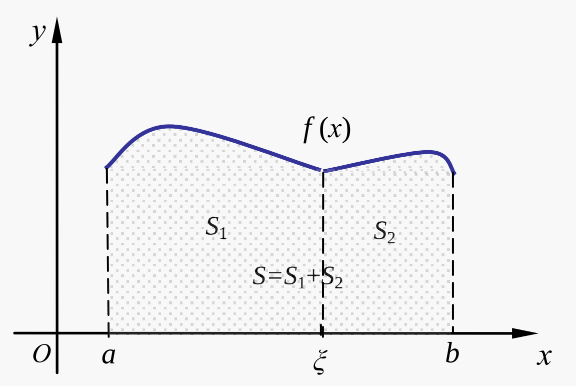


Рисунок 19

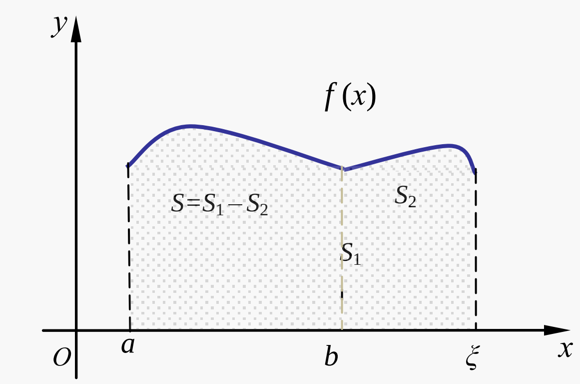


Рисунок 19*

4) если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на одном и том же отрезке и удовлетворяют условию $f(x) \geq g(x)$, $a \leq x \leq b$, то выполняется следующее неравенство:

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx, \quad (b > a).$$

Доказательство. В силу интегрируемости функции на всем отрезке $[a, b]$, и производя разбиение отрезка $[a, b]$ на элементарные отрезки $[x_i, x_{i+1}]$ на каждом элементарном отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ найдутся такие точки $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ такие, что

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i)dx \geq \sum_{i=1}^n g(\xi_i)\Delta x_i \quad ,$$

переходя к пределу при стремлении к нулю наибольшего отрезка разбиения $max\ \Delta x_i \to 0$, получим:

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx, \quad (b > a).$$

Следовательно, неравенства интегрируемых функций можно интегрировать.

Теорема о среднем

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на всем отрезке $[a, b]$ и $(a<b)$, тогда на отрезке $[a, b]$ функция ограничена, поэтому существует нижняя m и верхняя M граница значений функции, то есть $m \leq f(x) \leq M$.

Проинтегрируем это неравенство по переменной x, получим:

$$\int_a^b M\,dx \geq \int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b m\,dx \to M(b-a) \geq \int_a^b f(x)\,dx \geq m(b-a).$$

На отрезке $[a, b]$ найдется такая точка ξ, что $m \leq f(\xi) \leq M$. Последнее неравенство представим в виде:

$$M \geq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \geq m, \quad \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi), \quad \int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a)$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a) \ - \textit{формула среднего значения.}$$

Для всякой неотрицательной и интегрируемой на всем отрезке $[a, b]$ функции $f(x)$ найдется такая точка $\xi \in [a, b]$, что площадь криволинейной трапеции на $[a, b]$ под функцией $f(x)$ будет равна площади прямоугольника со сторонами $(b - a)\cdot f(\xi)$, как показано на рисунке 20.

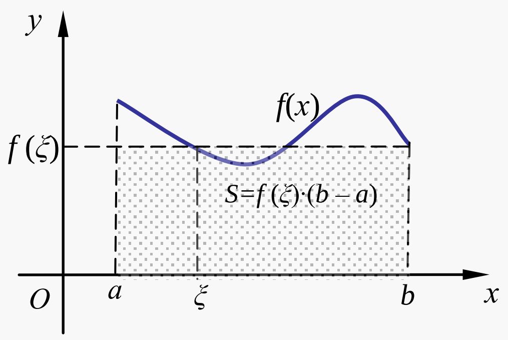


Рисунок 20

Поясним геометрический смысл *теоремы о среднем*: *средним значением функции* $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, *называется число*:

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Средним квадратичным значением функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, является число равное корню квадратному из среднего значения квадрата функции:

$$\sqrt{\frac{1}{b-a}\int_a^b f^2(x)\,dx}\,.$$

11.2. Способы вычисления определенного интеграла

Метод замены переменной

Теорема. Если функция $f(x)$ непрерывна на интервале (a, b) , а функция $g(t)$ непрерывна на отрезке $[\alpha, \beta]$ ($t \in [\alpha, \beta]$) и имеет непрерывную производную $g'(t)$, причем, в каждой точке интервала (a, b) выполняются равенства: $g(t) = x$, $g(\alpha) = a$, $g(\beta) = b$, тогда справедлива следующая формула:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))\,g'dt\,.$$

Эта формула называется *формула замены переменной в определенном интеграле.*

Доказательство. В силу непрерывности функций $f(x)$ и $g(t)$ на интервале (a, b), следует существование и непрерывность функции $f(g(t))g'$, значит, на этом интервале существуют интегралы функций $f(g(t))g'$ и $f(x)$.

Пусть на (a, b) одной из первообразных функции $f(x)$ будет функция $F(x)$, тогда для переменной t на отрезке $[\alpha, \beta]$ одной из первообразных функции $f(g(t))g'$ будет функция $F(g(t))$. Используя формулу Ньютона – Лейбница запишем первый и второй интегралы:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a),$$

$$\int_\alpha^\beta f(g(t))\,g'dt = F(g(\beta)) - F(g(\alpha)) = F(b) - F(a),$$

следовательно, формула:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))\,g'dt$$

справедлива.

Вычисление интегралов с помощью замены переменных используется не только подстановка $x = g(t)$, но и обратная подстановка $t = g(x)$. При обратной подстановке границы интегрирования определяются непосредственно из значений функции $\alpha = g(a)$, $\beta = g(b)$.

Рассмотрим примеры вычисления определенного интеграла методом замены переменной. Для замены переменной следует выбирать монотонную непрерывно дифференцируемую функцию. В результате вычисления определенного интеграла методом замены переменной не возвращаются к первоначальной переменной.

Пример 1. Вычислить интеграл $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{d\,x}{3\cos^2 x + 4\sin^2 x}$.

Решение. Введем подстановку: $tg\,x = t$; $d\,t = \frac{d\,x}{\cos^2 x}$, введенная подстановка удовлетворяет условиям теоремы о замене переменной заданного интеграла.

Заменим границы интегрирования: $\left(\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4};\quad t = 1, \\ x = \frac{\pi}{3};\quad t = \sqrt{3} \end{array} \right)$.

Перепишем данный интеграл с учетом подстановки

$$\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{d\,x}{3\cos^2 x + 4\sin^2 x} = \int\limits_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{d\,x}{\cos^2 x\,(3 + 4tg^2 x)} =$$

$$= \int\limits_{1}^{\sqrt{3}} \frac{d\,t}{\sqrt{3}^2 + 4t^2} = \frac{1}{4} \int\limits_{1}^{\sqrt{3}} \frac{d\,t}{\sqrt{\frac{3}{4}}^2 + t^2} = \frac{1}{4}\left(arc\,tg\,\frac{2t}{\sqrt{3}}\Bigg|_1^{\sqrt{3}} \right) = \frac{1}{4}\left(arc\,tg\,2 - arc\,tg\,\frac{2}{\sqrt{3}} \right).$$

Ответ: $\frac{1}{4}\left(arc\,tg\,2 - arc\,tg\,\frac{2}{\sqrt{3}} \right)$.

Пример 2. Вычислить интеграл $\int\limits_{3}^{6} \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x^4} d\,x$.

Решение. Введем подстановку и заменим границы интегрирования:

$$x = \frac{3}{\cos t};\, d\,x = \frac{3\sin t}{\cos^2 t}; \qquad x = 3; t = 0; \qquad x = 6; t = \pi/3.$$

Перепишем данный интеграл с учетом подстановки

$$\int\limits_{3}^{6} \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x^4} d\,x = \int\limits_{0}^{\pi/3} \frac{\sqrt{\frac{9}{\cos^2 t} - 9}}{81\cos^{-4} t} \frac{3\sin t}{\cos^2 t} d\,t = \int\limits_{0}^{\pi/3} \frac{3\sin t}{81\cos^{-1} t} \frac{3\sin t}{1} d\,t =$$

$$= \frac{1}{9} \int\limits_{0}^{\pi/3} \sin^2 t \cos t\, d\,t = \frac{1}{27} \sin^3 t \,\Big|_0^{\pi/3} = \frac{\sqrt{3}}{72}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{72}$.

Пример 3. Вычислить интеграл $I = \int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{\cos 2x}{2\cos^3 x - 4\sin^2 x - \cos x + 2} d\,x$.

Решение. Упростим подынтегральную функцию

$$\frac{\cos 2x}{2\cos^3 x - 4\sin^2 x - \cos x + 2} = \frac{\cos 2x}{\cos x(2\cos^2 x - 1) + 2(1 - 2\sin^2 x)} = \frac{1}{\cos x + 2}.$$

Тогда $I = \int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{d\,x}{\cos x + 2}$.

Введем подстановку и заменим границы интегрирования:

$$t = tg\,\frac{x}{2};\ x = arc\,tg\,t;\ d\,x = \frac{2dt}{1+t^2}; \qquad x = 0; t = 0; \qquad x = \frac{\pi}{2}; t = 1.$$

Введенная подстановка удовлетворяет условиям теоремы о замене переменной заданного интеграла.

Перепишем данный интеграл с учетом подстановки, получим:

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{d\,x}{\cos x + 2} = \int_0^1 \frac{2\,dt}{\left(2 + \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)(1+t^2)} = \int_0^1 \frac{2\,dt}{2+2t^2+1-t^2} =$$

$$= 2\int_0^1 \frac{dt}{3+t^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}\,arc\,tg\,\frac{t}{\sqrt{3}}\Big|_0^1 = \frac{2}{\sqrt{3}}\,arc\,tg\,\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\,\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

Использование метода замены переменной при вычислении определенных интегралов дает возможность упростить подынтегральное выражение до вида табличных интегралов.

Метод интегрирования по частям

Теорема. Если функции $u(x)$ и $v(x)$ непрерывны и обладают непрерывными производными на отрезке $[a, b]$, то выполняется равенство:

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,d\,x = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)\,u'(x)\,d\,x$$

или

$$\int_a^b u(x)\,d\,v = u\,v\,\Big|_a^b - \int_a^b v\,d\,u,$$

эти формулы называются формулами интегрирования по частям.

Доказательство. Выражение: $u(x)v(x)\Big|_a^b$ очевидно есть разность произведения функций в пределах интегрирования:

$$u(x)v(x)\Big|_a^b = u(b)v(b) - u(a)v(a).$$

Производная функций $[u\ v]' = u'v + uv'$, это значит, что (uv) есть первообразная функции $u'v + uv'$ на отрезке $[a, b]$, тогда

$$uv\Big|_a^b = \int_a^b (uv' + u'v)\,d\,x = \int_a^b u\,d\,v + \int_a^b u\,d\,v$$

или

$$\int_a^b u(x)\,d\,v = u\,v\,\Big|_a^b - \int_a^b v\,d\,u\,.$$

Рассмотрим примеры вычисления определенного интеграла по частям.

Пример 1. Вычислить интеграл $I = \int_1^2 \ln(2+x)\,d\,x.$

Решение. Положим $ln(2 + x) = u$, $dx = dv$, найдем $du = d[ln(2 + x)]$ и $v =, \int dx = x + C$.

Пользуясь формулой интегрирования по частям, запишем следующее равенство:

$$\int_1^2 \ln(2+x)\,d\,x = x\ln(2+x)\Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{x\,d\,x}{2+x} = 2\ln 4 - \ln 3 - \int_1^2 \frac{2+x-2}{2+x}\,d\,x =$$
$$= 2\ln 4 - \ln 3 - \int_1^2 d\,x + \int_1^2 \frac{d\,(2+x)}{2+x} = 2\ln 4 - \ln 3 - x\Big|_1^2 + 2\ln(2+x)\Big|_1^2 = \quad .$$
$$= 2\ln 4 - \ln 3 - 2 + 1 + 2\ln 4 - 2\ln 3 = 4\ln 4 - 3\ln 3 - 1.$$

Ответ: $I = 4\ln 4 - 3\ln 3 - 1$.

Пример 2. Вычислить интеграл $I = \int_{\pi/6}^{\pi/3} x^2\,arctg\,x\;d\,x.$

Решение. Положим $arc\ tg\ x = u$, $x^2dx = dv$, найдем $du = d(arc\ tg\ x)$ и $v = \int x^2 d\,x,$ тогда

$$du = \frac{d\,x}{1+x^2}; \quad v = \frac{x^3}{3}.$$

Пользуясь формулой интегрирования по частям, запишем следующее равенство:

$$\int_{\pi/6}^{\pi/3} x^2\,arctg\,x\;d\,x = \frac{x^3}{3}\,arctgx\Bigg|_{\pi/6}^{\pi/3} - \frac{1}{3}\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{x^3\,d\,x}{1+x^2} = \frac{23\pi^3}{648} - \frac{1}{3}\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{x^3\,d\,x}{1+x^2}.$$

Найдем значение интеграла: $I_1 = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{x^3\,d\,x}{1+x^2}.$

Представим неправильную рациональную дробь $\frac{x^3}{1+x^2}$ в виде многочлена и правильной рациональной дроби.

Разделим числитель на знаменатель по правилу деления многочленов:

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 0\cdot x^2 + 0\cdot x & x^2+1 \\ \cline{2-2} -\ \underline{x^3 + x} & x \\ -x & \end{array}$$

, получим подынтегральную функцию в виде:

разности $\dfrac{x^3}{1+x^2}=x-\dfrac{x}{x^2+1}$, тогда

$$I_1=\int\limits_{\pi/6}^{\pi/3}\frac{x^3\,d\,x}{1+x^2}=\int\limits_{\pi/6}^{\pi/3}x\,d\,x-\int\limits_{\pi/6}^{\pi/3}\frac{x\,d\,x}{1+x^2}=\frac{x^2}{2}\Bigg|_{\pi/6}^{\pi/3}-\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)\Bigg|_{\pi/6}^{\pi/3}=$$

$$=\frac{\pi^2}{24}-\frac{1}{2}\left[\ln\left(\frac{\pi^2}{9}+1\right)-\ln\left(\frac{\pi^2}{36}+1\right)\right]=\frac{\pi^2}{24}-\frac{1}{2}\ln\frac{\pi^2+9}{6\,(\pi^2+36)}.$$

Запишем значение исходного интеграла

$$\int\limits_{\pi/6}^{\pi/3}x^2\,arctg\,x\,d\,x=\frac{23\pi^3}{648}-\frac{\pi^2}{72}+\frac{1}{6}\ln\frac{\pi^2+9}{6(\pi^2+36)}.$$

Ответ: $I=\dfrac{23\pi^3}{648}-\dfrac{\pi^2}{72}+\dfrac{1}{6}\ln\dfrac{\pi^2+9}{6(\pi^2+36)}$.

Лекция № 12

Практические приложения определенного интеграла

12.1. Вычисление пределов с помощью определенного интеграла.

12.2. Геометрические приложения определенного интеграла.

12. 3. Вычисление средних значений функции.

12.1. Вычисление пределов с помощью определенного интеграла

В решении практических задач нередко возникает необходимость вычисления предела сумм при неограниченном возрастании числа слагаемых. При определенных условиях, такие пределы можно определить с помощью определенного интеграла. Если сумму, предел которой нужно найти, можно представить, как интегральную сумму функции, то используется определенный интеграл.

Если сумму, предел которой надо найти, можно представить в виде:

$$f(x)=\frac{1}{n}\left[f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+f\left(\frac{3}{n}\right)+\dots+f\left(\frac{n}{n}\right)\right],$$

то предел такой функции будет:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+f\left(\frac{3}{n}\right)+\dots+f\left(\frac{n}{n}\right)\right]=\int_0^1 f(x)\,dx.$$

Пример 1. Найти предел суммы: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3}{\sqrt{2n^2-1^2}}+\frac{3}{\sqrt{2n^2-2^2}}+\frac{3}{\sqrt{2n^2-3^2}}+\dots+\frac{3}{\sqrt{2n^2-n^2}}\right).$

Преобразуем сумму, предел которой надо найти, вынесем 3 за знак предела, а из каждого слагаемого вынесем множитель $\frac{1}{n}$, под знаком предела получим сумму:

$$3\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{\sqrt{2-\frac{1^2}{n^2}}}+\frac{1}{\sqrt{2-\frac{2^2}{n^2}}}+\frac{1}{\sqrt{2-\frac{3^2}{n^2}}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{2-\frac{n^2}{n^2}}}\right).$$

Рассматривая каждое слагаемое как точку деления отрезка [0, 1] можно считать, что эта сумма, есть *интегральная сумма* функции $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2-x^2}}$ на отрезке [0, 1]. Предел этой суммы равен определенному интегралу от функции $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2-x^2}}$ в границах интегрирования от 0 до 1.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{\sqrt{2n^2-1^2}}+\frac{3}{\sqrt{2n^2-2^2}}+\frac{3}{\sqrt{2n^2-3^2}}+\cdots+\frac{3}{\sqrt{2n^2-n^2}}\right).=$$

$$=3\int_0^1\frac{d\,x}{\sqrt{2-x^2}}=3arc\sin\frac{x}{\sqrt{2}}\Bigg|_0^1=3\frac{\pi}{4}.$$

Ответ: $\dfrac{3}{4}\pi.$

Пример 2. Найти предел суммы $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\dfrac{3}{n^2}+\cdots+\dfrac{n-1}{n^2}\right).$

Рассматривая каждое слагаемое как точку деления отрезка [0, 1] можно записать интеграл $\int\limits_0^1 f(x)\,d\,x$, где $f(x)$ есть общий член последовательности. Так как числители слагаемых есть арифметическая прогрессия с разностью d =1, получим: $x_n=\dfrac{1-n}{2n}$ следовательно,

$f\ (x)=\dfrac{1-x}{2x}$ интегрируемая на отрезке [0, 1].

Предел суммы $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\dfrac{3}{n^2}+\cdots+\dfrac{n-1}{n^2}\right).=\int\limits_0^1\dfrac{x\,d\,x}{2\,x}-\dfrac{1}{2}\int\limits_0^1\dfrac{d\,x}{x}=\dfrac{1}{2}.$

Ответ: 1/2.

12.2. Геометрические приложения определенного интеграла

Вычисление площадей плоских геометрических фигур

Как уже рассматривалось выше, по геометрическому смыслу определенного интеграла площадь под непрерывной и положительной кривой $f(x)$, есть площадь криволинейной трапеции.

Например, найти площадь фигуры ограниченной линиями $y=2\sin x, 0\le x\le\pi$ и $y = 0$.

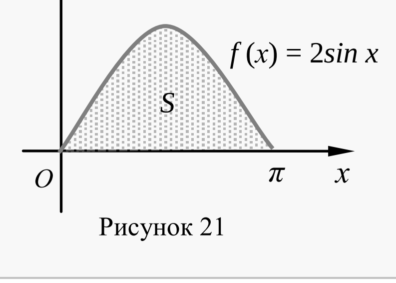


Рисунок 21

На рисунке 21 показана фигура ограниченная заданными линиями, это криволинейный треугольник, площадь которого надо найти.

Искомая площадь числено, равна величине определенного интеграла:

$$S=\int_0^{\pi} 2\sin x\,d\,x = 2\,(-\cos x)\Big|_0^{\pi} = -2(-1-1) = 4.$$

Если функция $y = f\,(x)$ непрерывная, но неположительная на отрезке $[a,\ b]$, то есть кривая функции $f\,(x)$ находится под осью абсцисс, то площадь такой фигуры будет равна площади симметричной фигуры на том же отрезке кривой $y = -f\,(x)$.

Например, найти площадь фигуры ограниченной линиями $y=-(4-x^2),\ \ x=0,\ \ y=-1/2$.

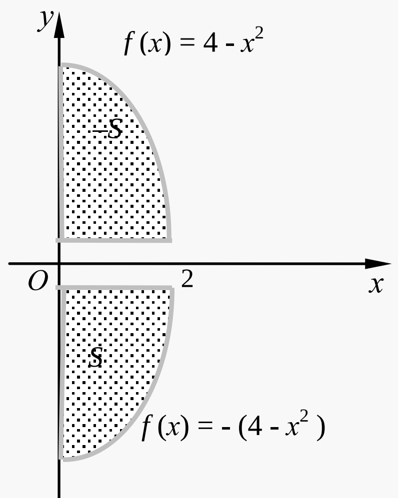


Рисунок 22

$$S=\int_0^2 -(4-x^2)\,d\,x;\ -S=\int_0^2 (4-x^2)\,d\,x\,.$$

Таким образом, для неположительной функции $y = f\,(x)$ на отрезке $[a,\ b]$, площадь S над кривой функции $f\,(x)$ отличается от площади такой же положительной функции только знаком.

На рисунке 22 показана фигура ограниченная заданными линиями, площадь которой S и симметричная ей фигура относительно оси абсцисс площадь которой $(-S)$.

$$S=-\int_0^2(-4+x^2)\,d\,x=-\left(-4x\Big|_0^2-\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^2\right)=8+\frac{8}{3}=10\frac{2}{3},$$

$$S=\int_0^2(4-x^2)\,d\,x=\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^2+4x\Big|_0^2=\frac{8}{3}+8=10\frac{2}{3}.$$

Рассмотрим примеры определения площадей плоских фигур.

Пример 1. Найти площадь фигуры ограниченной линиями $y=3,\ \ y=x^2-1.$

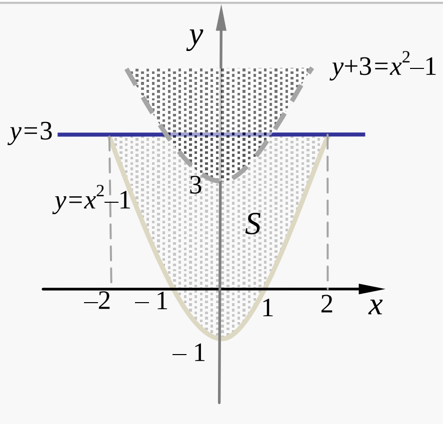


Рисунок 23

Решение. Для простоты определения площади выполним параллельный перенос оси абсцисс на прямую, параллельную оси Ox: $y = 3$, тогда началом координат будет точка (0, 3), а уравнение примет вид:

$$y + 3 = x^2 - 1 \text{ или } \quad y = x^2 - 4.$$

Искомая площадь S равна модулю определенного интеграла функции $y = x^2 - 4$ на отрезке [–2, 2].

$$S = \left|\int_{-2}^{2}(x^2-4)\right| = \left|\frac{x^3}{3}\Big|_{-2}^{2} - 4x\Big|_{-2}^{2}\right| = \left|\frac{8}{3}+\frac{8}{3}-8-8\right| = \left|\frac{16}{3}-16\right| = 10\frac{2}{3}.$$

Ответ: $S = 10\frac{2}{3}$.

Пример 2. Найти площадь фигуры ограниченной линиями $y=0,\ \ y=x-4,\ \ 2y+x^2=0.$

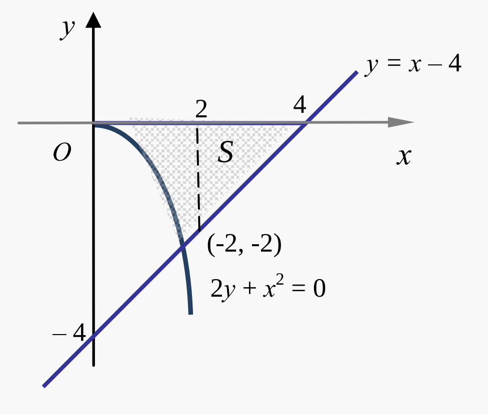


Рисунок 24

Решение. Искомая площадь S равна сумме определенного интеграла функции $2y+x^2=0 \to y=-\frac{x^2}{2}$ на отрезке [0, 2] и определенного интеграла функции $y = x - 4$ на отрезке [2, 4]. Так как искомая площадь расположена под осью абсцисс, то интегралы надо брать с противоположным знаком или по абсолютной величине:

$$S_1 = -\int_0^2\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx = \frac{1}{2}\frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = \frac{4}{3}.$$

$$S_2 = -\int_2^4 (x-4)\,dx = -\left(\frac{x^2}{2}\Big|_2^4 - 4x\Big|_2^4\right) = -(8-2-16+8) = 2.$$

Искомая площадь $S = S_1 + S_2 = 3^1/_3$.

Ответ: $S = 3^1/_3$.

Пример 3. Найти площадь фигуры ограниченной линиями $y=\sqrt{3x}\,,\ \ y=3(x-2)\,.$

Решение.

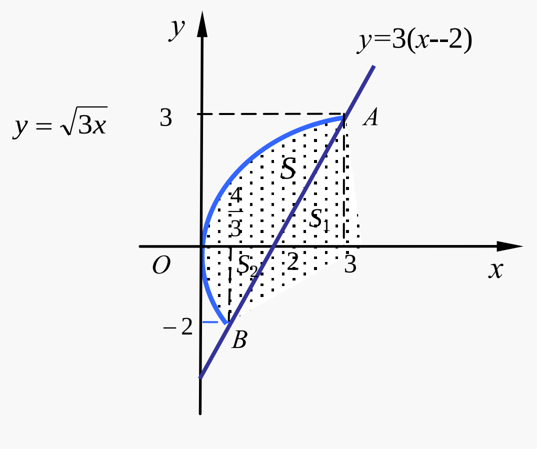


Рисунок 25

На рисунке 25 показана фигура ограниченная заданными линиями, площадь которой S. Искомую площадь S_{B0A} находим как сумму интегралов и площадей треугольников S_1 и S_2:

Границы интегрирования определяются совместным решением уравнений, задающих границы геометрической фигуры:

$$\sqrt{3x} = 3(x-2);\ \ 3x - \sqrt{3x} - 6 = 0;\ \ \to\ x_1 = 3;\ \ x_2 = 4/3.$$

Координаты точки B (4/3, – 2), точки A(3, 3), тогда площади S_1 и S_2 можно вычислить по формуле площади прямоугольного треугольника и по определенному интегралу.

$$S_1 = 3\int_2^3 (x-2)\,dx = \frac{3}{2};\quad S_2 = 3\int_{4/3}^2 (x-2)\,dx = \frac{2}{3} \text{ или } S_1 = \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 1 = \frac{3}{2};\quad S_2 = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}.$$

Тогда

$$S_{B0A} = \int_0^3 \sqrt{3x}\,dx + \int_0^{4/3} \sqrt{3x}\,dx + \frac{2}{3} - \frac{3}{2} = \sqrt{3}\frac{2x^{3/2}}{3}\bigg|_0^3 + \sqrt{3}\frac{2x^{3/2}}{3}\bigg|_0^{4/3} - \frac{5}{6} =$$

$$= \sqrt{3}\left(\frac{2x\sqrt{x}}{3}\bigg|_0^3 + \frac{2x\sqrt{x}}{3}\bigg|_0^{4/3}\right) - \frac{5}{6} = \sqrt{3}\left(\frac{6\sqrt{3}}{3} + \frac{16\sqrt{3}}{9}\right) - \frac{5}{6} = 10{,}5.$$

Ответ: S = 10,5.

12. 3 Вычисление средних значений функции

Вычисление средних значений функции часто применяются в геометрических, физических, экономических задачах. Средним значением функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$, есть число μ:

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx,$$

а среднеквадратичным значением функции есть:

$$\widehat{\mu}_{ср.кв.} = \sqrt{\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx}.$$

Рассмотрим несколько примеров на определение среднего значения функции.

Пример 1. Определить среднее значение длин вертикальных хорд гиперболы $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{1} = 1$ на интервале [± 2, ± 6].

Решение. Так как гипербола состоит из двух симметричных кривых, достаточно определить среднее значение длин вертикальных хорд, в правой полуплоскости ($x > 0$) на интервале [2, 6].

Запишем уравнение гиперболы в явном виде: $y = \frac{1}{2}\sqrt{x^2-4}$. Среднее значение функции на интервале [2, 6] определится формулой:

$$\mu = \frac{1}{6-2}\,\frac{1}{2}\int_2^6 \sqrt{x^2-4}\,dx;\quad \mu = \frac{1}{8}\int_2^6 \sqrt{x^2-4}\,dx.$$

Дальнейшее решение задачи сводится к вычислению интеграла:

$$I = \frac{1}{8}\int_2^6 \sqrt{x^2-4}\,dx.$$

Применим метод вычисления по частям $u=\sqrt{x^2-4}$, $dv=dx$; $du=\dfrac{x\,dx}{\sqrt{x^2-4}}$, $v=x$;

$$I=\frac{1}{8}\left(x\sqrt{x^2-4}\Big|_2^6-\int_2^6\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-4}}\right)=3\sqrt{2}-\frac{1}{8}\int_2^6\frac{(x^2+4-4)dx}{\sqrt{x^2-4}}=.$$

$$=3\sqrt{2}-\frac{1}{8}\int_2^6\frac{(x^2-4)dx}{\sqrt{x^2-4}}--\frac{1}{2}\int_2^6\frac{dx}{\sqrt{x^2-4}}=3\sqrt{2}-\frac{1}{8}\int_2^6\sqrt{x^2-4}\,dx-\frac{1}{2}\int_2^6\frac{dx}{\sqrt{x^2-4}}.$$

Исходный интеграл запишется так:

$$I=\frac{1}{8}\int_2^6\sqrt{x^2-4}\,dx=3\sqrt{2}-\frac{1}{8}\int_2^6\sqrt{x^2-4}\,dx-\frac{1}{2}\int_2^6\frac{dx}{\sqrt{x^2-4}}=$$

$$=\frac{2}{8}\int_2^6\sqrt{x^2-4}\,dx=3\sqrt{2}-\frac{1}{2}\int_2^6\frac{dx}{\sqrt{x^2-4}}.$$

Окончательно

$$I=\frac{1}{8}\int_2^6\sqrt{x^2-4}\,dx=\frac{3\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{4}\ln\left(x+\sqrt{x^2-4}\right)\Big|_2^6=\frac{3\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{4}\ln\left(3+2\sqrt{2}\right).$$

Ответ: Среднее значение длин вертикальных хорд гиперболы равно

$\dfrac{3\sqrt{2}}{2}-\dfrac{1}{4}\ln\left(3+2\sqrt{2}\right).$

Пример 2. Определить среднее значение давления p при его изменении от 10 до 10^2 *атм*. С увеличением давления изменение объема определяется формулой $pV^{3/2}=800$.

Решение. Выразим объем через давление $V=\sqrt[3]{\left(\dfrac{800}{p}\right)^2}$, изменение величины объема с изменением давления определят границы интегрирования по переменной величине объема:

$$V=\sqrt[3]{\left(\frac{800}{10}\right)^2}=4\sqrt[3]{100};\quad V=\sqrt[3]{\left(\frac{800}{10^2}\right)^2}=4.$$

Вычислим среднее значение давления:

$$p_{cp}=\frac{1}{4(\sqrt[3]{100}-1)}\int_4^{4\sqrt[3]{100}}800V^{-3/2}dV=-\frac{1600}{4(\sqrt[3]{100}-1)}V^{-1/2}\Big|_4^{4\sqrt[3]{100}}=$$

$$=-\frac{400}{\sqrt[3]{100}-1}\left(\frac{1}{2\sqrt[3]{10}}-\frac{1}{2}\right)=-\frac{200(1-\sqrt[3]{10})}{\sqrt[3]{100}-1}=\frac{200}{\sqrt[3]{10}+1}\approx 63{,}3.$$

Ответ: Среднее значение давления 63,3 *атм.*

В экономических задачах не редко используются технико-экономические показатели средних величин. Например, для освоения производства нового вида изделия x отводится некоторое время t и по количеству выпущенных изделий за это время, определяется среднее значение времени

$$t_{ср.} = \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} t(x)\, d\,x\, .$$

Функция времени зависит от затрат времени a на первое изделие и показателя производственного процесса b: $t(x) = a\,x^{-b}$.

Пример 3. В процессе освоения новых технологий определена партия в количестве изделий от x_1 = 50 до x_2 = 72. На первое изделие из выбранной партии затрачивалось 220 мин. Найти среднее время, затрачиваемое на изготовление одного изделия, если показатель производственного процесса b= 0,5.

Решение.

$$t_{ср.} = \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} t(x)\, d\,x = \frac{1}{72-50} \int_{50}^{72} 240 x^{-1/2} = \frac{220}{22} \sqrt{x}\Big|_{50}^{72} = 11(\sqrt{72} - \sqrt{50}) = 11\sqrt{2} \approx 15{,}5 .$$

Ответ: 15,5 мин.

Лекция № 13

Практические приложения определенного интеграла

13.1. Несобственные интегралы с бесконечным пределом интегрирования.
13.2. Геометрические приложения определенного интеграла:
- площадь криволинейного сектора;
- длина криволинейной дуги;
- объем геометрических тел.

13.1. Несобственные интегралы с бесконечным пределом интегрирования

Ранее рассматривалось нахождение интегралов непрерывных (интегрируемых) функций на ограниченных отрезках интегрирования. Геометрический смысл определенных интегралов, это вычисление площади замкнутой геометрической фигуры на ограниченном отрезке. Практический интерес представляет интегрирование функций неограниченных на отрезке или интервал интегрирования, которых неограничен либо с одной, либо с обеих сторон.

Рассмотрим функцию $f(x)$ определенную и интегрируемую на полуоткрытом интервале $[a, b)$, где значения $b > a$ и $b \to +\infty$, переменная x изменяется от a до $+\infty$ ($a \le x < +\infty$). Верхняя граница интегрирования конкретно не определена и может изменяться, то есть b есть независимая переменная величина функции $G(b) = \int_a^{b \to +\infty} f(x)\,d\,x.$

Определение. *Несобственным интегралом* $\int_a^{+\infty} f(x)\,d\,x$ *от функции* $f(x)$*, называется конечный предел функции* $G(b)$ *при* $b \to \infty$*, на полуоткрытом интервале* $[a, +\infty)$:

$$\lim_{b \to \infty} G(b) = \lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x)\,d\,x = \int_a^{+\infty} f(x)\,d\,x\,.$$

Если предел $\lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x)\,d\,x$ имеет конечное значение (существует), то несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)\,d\,x$ *называется сходящимся к данному пределу.*

Если предел $\lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_a^b f(x)\,dx$ не имеет конечного значения (не существует), то несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *называется расходящимся.*

Для бесконечных интервалов $(-\infty,\ b)$ и $(-\infty,\ +\infty)$ несобственные интегралы определяются аналогичным образом:

$$\lim_{a\to-\infty}\int\limits_a^b f(x)\,dx=\int\limits_{-\infty}^b f(x)\,dx;$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=\int\limits_{-\infty}^{k} f(x)\,dx+\int\limits_{k}^{+\infty} f(x)\,dx;\quad -\infty<k<+\infty;$$

$$\lim_{a\to-\infty}\int\limits_a^k f(x)\,dx=\int\limits_{-\infty}^{k} f(x)\,dx;\ \text{и}\ \lim_{b\to+\infty}\int\limits_k^b f(x)\,dx=\int\limits_{k}^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Геометрический смысл несобственного интеграла заключается в понятии выражения площади неограниченной (полубесконечной или бесконечной) фигуры.

Пример 1. Найти площадь фигуры ограниченной линиями

$$x=\frac{1}{k},\ (k=1,2,3),\quad y=0,\quad y=\frac{1}{x^n},\ (n=2,3,4...).$$

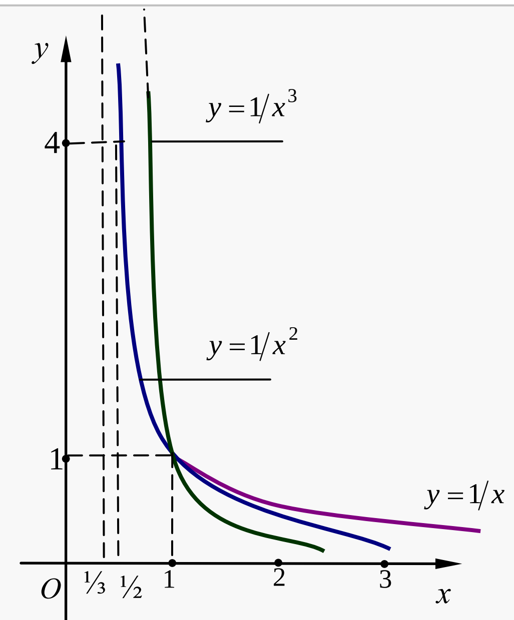


Рисунок 26

Решение. Изобразим графики функций $y=\dfrac{1}{x^2}$, $y=\dfrac{1}{x^3}$ (рисунок 26). На рисунке показаны криволинейные трапеции по заданным функциям на полуограниченных интервалах:

$$y=\frac{1}{x^2},\quad [\frac{1}{2},+\infty);\ [1,+\infty);$$

$$y=\frac{1}{x^3},\quad [\frac{1}{3},+\infty);\ [1,+\infty).$$

Найдем несобственные интегралы для каждой функции. Если интегралы существуют (сходятся), то соответствующие полубесконечные фигуры имеют конечную площадь.

$$n=2,\quad \int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}=\lim_{b\to\infty}\int\limits_1^b\frac{dx}{x^2}=-\frac{1}{x}\Bigg|_1^{+\infty}=0+1=1,\quad S=1;$$

$$n=3,\quad \int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^3}=\lim_{b\to\infty}\int\limits_1^b\frac{dx}{x^3}=-\frac{1}{2x^2}\Bigg|_1^{+\infty}=\frac{1}{2},\quad S=\frac{1}{2};$$

$$n = 4, \quad \int_1^{+\infty} \frac{d\,x}{x^3} = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{d\,x}{x^3} = -\frac{1}{3x^2}\Bigg|_1^{+\infty} = \frac{1}{3}, \quad S = \frac{1}{3};$$

…

$$n = p, \quad \int_1^{+\infty} \frac{d\,x}{x^p} = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{d\,x}{x^p} = -\frac{1}{(p-1)x^{p-1}}\Bigg|_1^{+\infty} = \frac{1}{p-1}, \quad S = \frac{1}{p-1}.$$

Последнее выражение верно для всех натуральных значений $p > 1$. Площади трапеций имеют конкретные числовые значения на полуограниченном интервале $[1, +\infty)$. Несобственные интегралы $\int_1^{+\infty} \frac{d\,x}{x^p}$ сходятся к значению дроби $\frac{1}{p-1}$ в границах изменения p от 2 до $+\infty$.

Криволинейные фигуры, образованные частью графика гиперболы, лежащей выше прямой $y = 1$, или совпадают с гиперболой $y = \frac{1}{x}$, то такие фигуры имеют бесконечную площадь.

Пример 2. Вычислить несобственные интегралы:

$$a)\ \int_{e-1}^{+\infty} \frac{d\,x}{(x+1)\ln^3(x+1)}\ ; \qquad б)\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\,x}{x^2+x+3}\ .$$

$$a)\ I = \int_{e-1}^{+\infty} \frac{d\,x}{(x+1)\ln^3(x+1)}\ ,$$

Решение. Введем подстановку $\ln(x+1) = t, \quad d\,t = \frac{d\,x}{(x+1)}$, тогда

$$I = \int_{e-1}^{+\infty} \frac{d\,t}{t^3} = -\frac{1}{2}\frac{1}{t^2} = -\frac{1}{2}\frac{1}{\ln^2(x+1)}\Bigg|_{e-1}^{+\infty} = -\frac{1}{2}\frac{1}{\infty} + \frac{1}{2}\frac{1}{\ln^2(e-1+1)} = \frac{1}{2}.$$

Ответ: $I = \frac{1}{2}$.

$$б)\ I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\,x}{x^2+x+3} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\,x}{(x+1)^2+2}.$$

Решение. Точкой промежуточного предела интегрирования возьмем точку $x = 0$, представим данный интеграл как сумму пределов интегралов:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\,x}{(x+1)^2+2} = \lim_{a\to-\infty}\int_a^0 \frac{d\,x}{(x+1)^2+2} + \lim_{b\to+\infty}\int_0^b \frac{d\,x}{(x+1)^2+2}\,.$$

Вычислим каждый предел промежуточного интеграла:

$$\lim_{a\to-\infty}\int_a^0 \frac{d\,x}{(x+1)^2+2} = \lim_{a\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{2}}\,arc\,tg\,\frac{x+1}{\sqrt{2}}\Bigg|_a^0 =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(arc\,tg\,\frac{1}{\sqrt{2}} - \lim_{a\to-\infty} arc\,tg a) = \frac{1}{\sqrt{2}}\,arc\,tg\,\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^0 \frac{d\,x}{(x+1)^2+2} = \lim_{b\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{2}}\,arc\,tg\,\frac{x+1}{\sqrt{2}}\Bigg|_0^b =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\lim_{b\to+\infty} arc\,tg\,b - arc\,tg\,\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\,arc\,tg\,\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Следовательно, данный интеграл равен сумме значений пределов промежуточных интегралов

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\,x}{x^2+x+3} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Ответ: $I = \dfrac{\pi}{\sqrt{2}}$.

13.2. Геометрические приложения определенного интеграла

Площадь криволинейного сектора

Рассмотрим в полярных координатах сектор, ограниченный кривой $r = g(\varphi)$, где $g(\varphi)$ непрерывная функция на интервале $[\alpha, \beta]$ $(\alpha < \beta)$ и радиус–векторами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$. Так же как при вычислении площади криволинейной трапеции, разобьем сектор на n частей (рисунок 27).

Построим ступенчатый сектор, состоящий из элементарных секторов-треугольников. Выберем наибольший из элементарных секторов с радиусом r_i и углом $\overline{\varphi}_i$ ($\varphi_i < \overline{\varphi}_i < \varphi_{i+1}$). Площадь такого элементарного сектора равна:

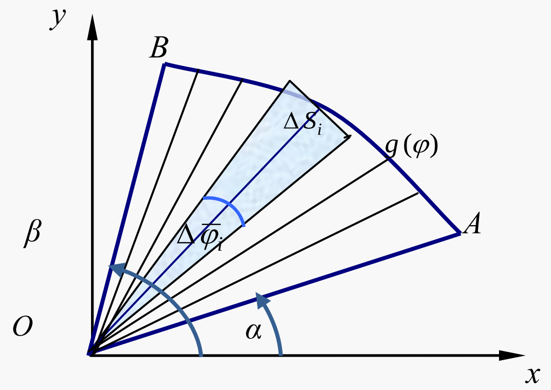


Рисунок 27

$$\Delta S_i = \frac{1}{2}\Delta\varphi_i r_i^2,$$

сумма всех элементарных площадей будет равна площади ступенчатого сектора

$$S_n = \sum_{i=1}^{n}\Delta S_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\Delta\varphi_i g(\overline{\varphi}_i)^2 .$$

Так как функция $g(\varphi)$ непрерывная функция на интервале $[\alpha, \beta]$, то она интегрируема и предел суммы равен:

$$\lim_{\max \Delta\varphi_1 \to 0} \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \Delta\varphi_i\, g(\overline{\varphi}_i\ )^2 = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} g(\varphi)^2\, d\,\varphi\,.$$

Площадь S криволинейного сектора $0AB$ равна интегралу $S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} g(\varphi)^2\, d\,\varphi\,.$

Пример. Найти площадь сектора (рисунок 28) ограниченного дугой параболы и лучами, заданными в полярных координатах:

$$g(\varphi) = \frac{6}{1-\cos\varphi},\ 2a = 6(\text{параметрпараболы})\ ,\alpha = \frac{\pi}{4},\quad \beta = \frac{\pi}{2}.$$

Решение. Площадь сектора S определим по формуле $S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} g(\varphi)^2\, d\,\varphi$:

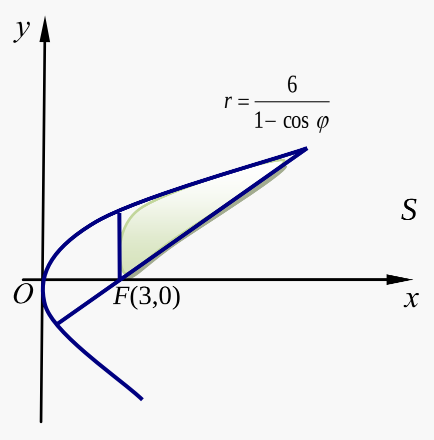


Рисунок 28

$$S = \frac{1}{2}\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{36}{(1-\cos\varphi)^2}\, d\,\varphi =$$

$$= 18\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{d\,\varphi}{(1-\cos\varphi)^2} = 18\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{d\,\varphi}{(2\sin^2\frac{\varphi}{2})^2}.$$

Воспользуемся универсальной подстановкой:

$$ctg\frac{\varphi}{2} = t;\quad d\,t = d(ctg\frac{\varphi}{2}) = -\frac{d\,\varphi}{2\sin^2\frac{\varphi}{2}};$$

вычислим границы интегрирования по переменной t:

для $\alpha = \frac{\pi}{4},\ t = ctg\frac{\pi}{8};$ для $\beta = \frac{\pi}{2},\ t = ctg\frac{\pi}{4} = 1.$

Перепишем интеграл по переменной t

$$S = 9\int_{1}^{ctg(\pi/8)} (1+t^2)\, d\,t = 9(t+\frac{t^3}{3})\Big|_{1}^{ctg(\pi/8)} = 9(ctg\frac{\pi}{8} + \frac{1}{3}ctg\frac{\pi}{8} - 1 - \frac{1}{3}).$$

Пользуясь формулой половинного угла для котангенса, вычислим значение $ctg\frac{\pi}{8}$:

$$ctg\frac{\pi}{4\cdot 2} = \frac{1+\cos(\pi/4)}{\sin(\pi/4)} = \sqrt{2}+1,$$

окончательно получим:

$$S = 9(\sqrt{2}+1+\frac{1}{3}(\sqrt{2}+1)^3 - \frac{4}{3}) = 9(\frac{8}{3}\sqrt{2}+2) = 24\sqrt{2}+18.$$

Ответ: $S = 24\sqrt{2}+18.$

Длина криволинейной дуги

Пусть уравнением непрерывной и дифференцируемой функции $y = f(x)$ в декартовых координатах задана плоская кривая, длину дуги которой надо определить на отрезке $[a, b]$ при $a \le x \le b$ (рисунок 29). Условие дифференцируемости функции определяет существование производной $f'(x)$
в каждой точке на отрезке $[a, b]$ при $a \le x \le b$.

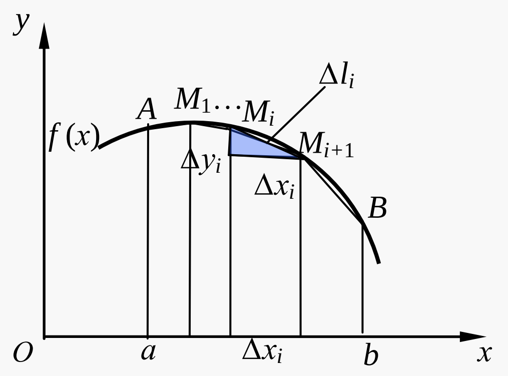


Рисунок 29

В дугу AB вписана ломаная линия $AM_1 ... M_i M_{i+1} \ldots B$, состоящая из *n элементарных отрезков*. Длина ломаной линии равна сумме всех Δl_i элементарных отрезков:

$$l = \sum_{i=1}^{n} \Delta l_i \ .$$

Длина дуги $L = AB$ будет равна пределу суммы всех элементарных отрезков при стремлению к нулю наибольшего значения Δl_i, то есть

$$L = \lim_{\max \Delta l_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta l_i \ .$$

Рассмотрим элементарный прямоугольный треугольник с катетами Δx_i, $\Delta y_i = f(\Delta x_i) - f(\Delta x_{i+1})$ и гипотенузой Δl_i, который показан на рисунке 29. На элементарном отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ найдется такая точка $x_i < \xi < x_{i+1}$,
что

$$\Delta y_i = f(\Delta x_i) - f(\Delta x_{i+1}) = f'(\xi) \Delta x_i \ .$$

Выразим Δl_i через Δx_i и Δy_i, получим:

$$\Delta l_i = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} = \sqrt{\Delta x_i^2 + [f'(\xi)]^2 \Delta x_i^2} = \sqrt{1 + [f'(\xi)]^2} \Delta x_i \ .$$

Длина дуги $L = AB$ будет равна

$$L = \lim_{\max \Delta l_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta l_i = \lim_{\max \Delta l_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(\xi)]^2} \, \Delta x_i \ ,$$

в силу непрерывности и дифференцируемости функции $f(x)$, функция $\sqrt{1 + [f'(x)]^2}$ будет интегрируема, следовательно,

$$L = \lim_{\max \Delta l_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,\Delta x_i = \int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,d x = \int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{d y}{d x}\right)^2}\,d x.$$

Таким образом, длина дуги на определенном отрезке $[a, b]$ определяется формулой:

$$L = \int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{d y}{d x}\right)^2}\,d x.$$

Если верхний предел интегрирования есть переменная величина, то

$$L = \int_a^x \sqrt{1+\left(\frac{d y}{d x}\right)^2}\,d x \text{ и } \frac{dL}{d x} = \sqrt{1+\left(\frac{d y}{d x}\right)^2}\,.$$

Если плоская дуга задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$ и $y = y(t)$, то её длина вычисляется по формуле:

$$L = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\,d t.$$

Пример. Вычислить длину дуги полукубической параболы $y^2 = 2x^3$, заключенной между осью ординат и прямой $x = 8/3$.

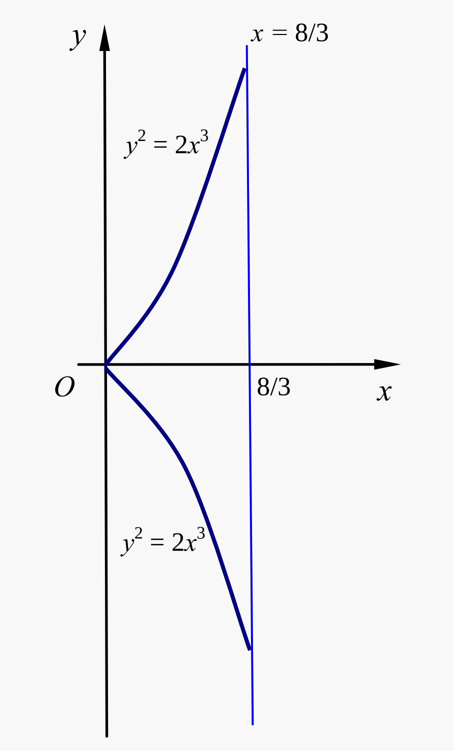


Рисунок 30

Решение. Заданная функция определена для всех $x \geq 0$. Найдем производную функции:

$$y' = (2x^{3/2})' = 3\sqrt{x}.$$

Длина дуги определится интегралом

$$L = \int_0^{8/3} \sqrt{1+(3\sqrt{x})^2}\,d x = \int_0^{8/3} \sqrt{1+9x}\,d x =$$

$$= \frac{1}{9}\int_0^{8/3} \sqrt{1+9x}\,d(9x+1) = \frac{1}{9}\cdot\frac{2}{3}(1+9x)^{3/2}\Big|_0^{8/3} =$$

$$= \frac{2}{27}(125-1) = \frac{248}{27}.$$

Ответ: $L = \dfrac{248}{27}.$

Пример. Вычислить длину дуги плоской кривой, заключенной между точками пересечения дуги с осями координат, заданной параметрически

$$x = \frac{t^4}{6}(t^2+6) - t^4;\quad y = \frac{t^4}{4} - 4.$$

Решение. Найдем пределы интегрирования: пересечение с осью ординат $x = 0$, $t_1 = 0$; пересечение с осью абсцисс $y = 0$, $t_2 = 2$.

Дифференцируем параметрические уравнения по t, получим

$x_t' = t^5$; $\quad y_t' = t^3$, тогда

$$L = \int_0^2 \sqrt{t^{10} + t^6}\, dt = \int_0^2 t^3 \sqrt{t^4 + 1}\, dt = \frac{1}{4} \int_0^2 \sqrt{t^4 + 1}\, d(t^4 + 1) =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} \left(t^4 + 1\right)^{3/2} \Big|_0^2 = \frac{17\sqrt{17} - 1}{6}.$$

Ответ: $L = \dfrac{17\sqrt{17} - 1}{6}$.

Объем геометрических тел

На рисунке 31 показано объемное тело произвольной формы, ограничивающее замкнутую область V. Если существует такое тело V_1, состоящее из частей правильной геометрической формы и полностью вмещающее тело V, причем $V_1 - V = \Delta V_1$. Тогда найдется такое значение ΔV_1, что V_1 будет точная верхняя граница V. Аналогично, если существует такое тело V_2, состоящее из частей правильной геометрической формы и полностью вмещающееся в тело V, причем $V - V_2 = \Delta V_2$. Тогда найдется такое значение ΔV_2, что V_2 будет точная нижняя граница V. Если точная верхняя и нижняя границы совпадают, то V *есть объем тела* (V).

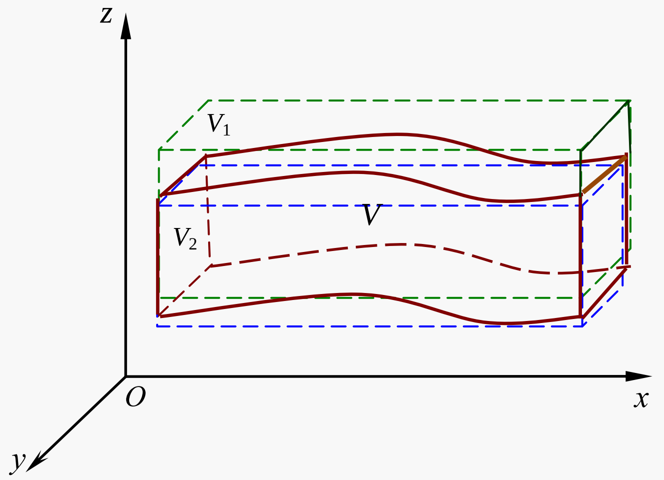


Рисунок 31

Чтобы тело имело объём V *необходимо и достаточно,* существование предела всех внешних $(V_1)_n$, включающих тело V, равного пределу всех внутренних $(V_2)_n$, заключенных в тело V:

$$\lim_{n\to\infty} (V_1)_n = \lim_{n\to\infty} (V_2)_n = V.$$

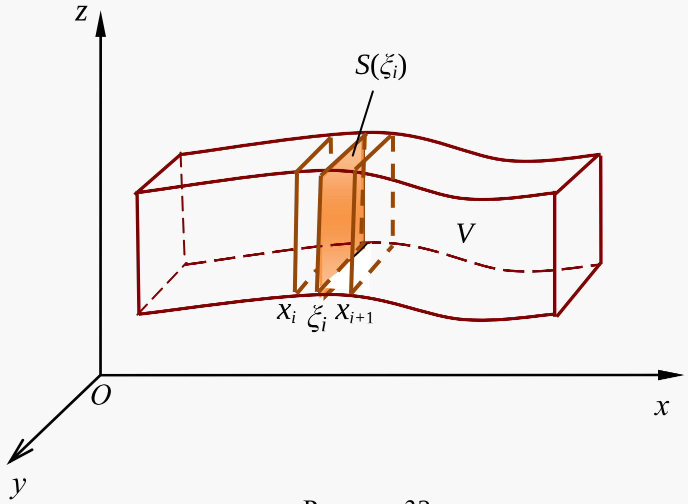


Рисунок 32

Одним из способов вычисления объёма, это вычисление с помощью определенного интеграла по площадям параллельных сечений. Секущие плоскости выбираются параллельно координатной плоскости $y0z$ и перпендикулярно $y0x$ (рис. 32). Каждая площадь сечения зависит от x и является функцией $S(x)$. Такая функция ограничена и непрерывная, а значит, интегрируема. Параллельные сечения разбивают объём V на слои, образующие элементарные объёмы, каждый из которых равен:

$$V_1 = S(\xi_1)\Delta x_1,\ \ V_2 = S(\xi_2)\Delta x_2,\ \ldots,\ V_i = S(\xi_i)\Delta x_i,\ \ldots, V_n = S(\xi_n)\Delta x_n;$$

где $x_i \le \xi_i \le x_{i+1},\ i = \overline{1,n}.$

Переходя к пределу при неограниченном увеличении числа сечений и стремлении максимального значения Δx_i к нулю получим значение объёма тела при изменении x от a до b $(a \le x \le b)$

$$V = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} S(\xi_i)\Delta x_i ,$$

Учитывая непрерывность суммы $\sum_{i=1}^{n} S(\xi_i)\Delta x_i$ при $a \le x \le b$, запишем интеграл

$$V = \int_a^b S(x)\, dx .$$

Пример. Вычислить объём треугольной пирамиды, площадь основания которой $S_{осн}$ = 21, высота h = 4.

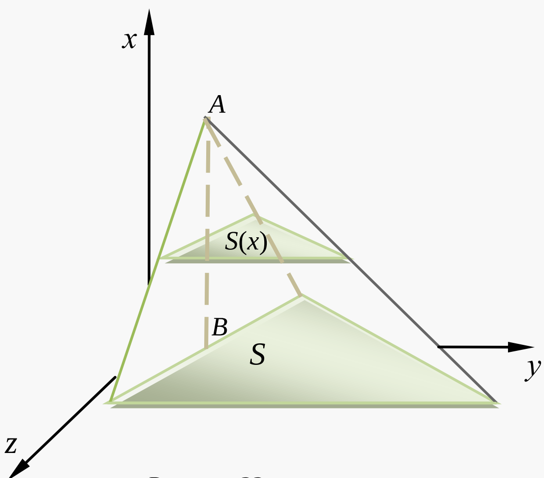


Рисунок 33

Решение. Параллельно основанию пирамиды проведены сечения, которые являются функцией от x , $S(x)$. Используя соотношения, между площадями сечений и высотами пирамиды, получим:

$$\frac{S(x)}{S_{осн}} = \frac{x^2}{h^2}.$$

Выразим функцию $S(x)$, получим:

$$S(x)=\frac{S_{осн}}{h^2}x^2.$$

Определим объём пирамиды:

$$V=\int_0^h S(x)\,dx=\frac{S_{осн}}{h^2}\int_0^4 x^2\,dx=\frac{21}{16}\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^4=28.$$

Ответ: $V = 28$.

Объём тела вращения

Тело вращения это тело, образованное от вращения некоторой непрерывной, плоской кривой $y = f(x)$ вокруг оси Ox и заключенное между параллельными прямыми $x = a$, $x = b$.

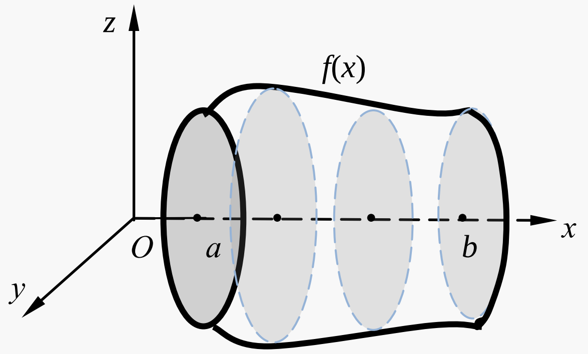


Рисунок 34

Любое сечение тела плоскостью (рисунок 34), перпендикулярной оси абсцисс есть круг, площадь которого определяется формулой $S = \pi r^2$, где $r = f(x)$. Тогда, объём тела вращения в границах: $a \le x \le b$ выразится формулой:

$$V=\pi\int_a^b [f(x)]^2\,dx.$$

Пример. Вычислить объём тела, образованного от вращения вокруг оси абсцисс площади фигуры ограниченной линиями $y=\sqrt{2x-1}$ и $y=\dfrac{2x-1}{3}$.

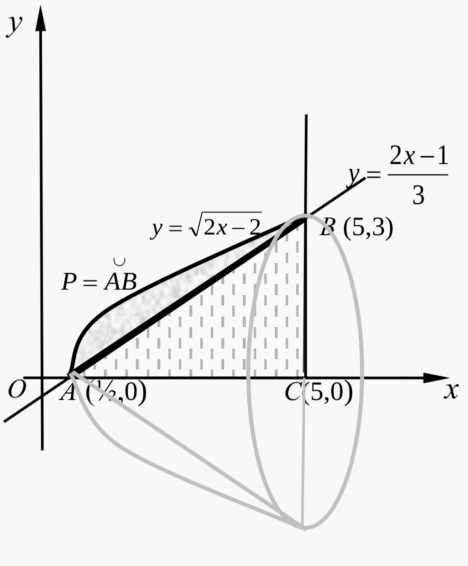


Рисунок 35

Решение. Фигура, образующая тело вращения, показано на рисунке 35. Требуется найти объём, полученный от вращения площади фигуры ограниченной дугой AB и отрезком AC.

Тело такой же формы, получается от вращения криволинейного треугольника $APBC$ вокруг оси Ox, а искомый объём V будет равен разности объёма V_1 криволинейного треугольника и объёма V_2 конуса, полученного при вращении прямоугольного треугольник ABC, $V = V_1 - V_2$.

Границы интегрирования определятся как абсциссы точек пересечения линий, образующих фигуру вращения:

$$\begin{cases} y = \sqrt{2x-1} \\ y = \dfrac{2x-1}{3} \end{cases},$$

получаем $x_A = 1/2$; $x_C = 5$.

Вычислим объёмы V_1 и V_2:

$$V_1 = \pi \int_{1/2}^{5} \left(\sqrt{2x-1}\right)^2 \, dx = \pi \int_{1/2}^{5} (2x-1) \, dx = \pi \left(x^2 - x\right)\Big|_{1/2}^{5} = \frac{81}{4}\pi;$$

$$V_2 = \pi \int_{1/2}^{5} \frac{(2x-1)^2}{9} \, dx = \frac{\pi}{9}\left(4\frac{x^3}{3} - 4\frac{x^2}{2} + x\right)\Bigg|_{1/2}^{5} =$$

$$= \frac{4\pi}{27}x^3\Big|_{1/2}^{5} - \frac{4\pi}{18}x^2\Big|_{1/2}^{5} + \frac{\pi}{2} = \frac{37\pi}{2} - \frac{11\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \frac{27\pi}{2}.$$

Следовательно,

$$V = V_1 - V_2 = \frac{81\pi}{4} - \frac{27\pi}{2} = \frac{27\pi}{4} = 6{,}75\pi.$$

Ответ: $V = 6{,}75\pi.$

Пример. Вычислить объём тела, образованного от вращения вокруг оси ординат площади фигуры ограниченной линиями $y = \sqrt{2x-1}$ и $y = \dfrac{2x-1}{3}$.

Для определения объёма тела вращения вокруг оси ординат выразим из уравнений x, считая y независимой переменной:

$$y = \sqrt{2x-1} \to x = \frac{y^2+1}{2}; \qquad y = \frac{2x-1}{3} \to x = \frac{3y+1}{2}.$$

Решение. Фигура, образующая тело вращения, показано на рисунке 36. Требуется найти объём, полученный от вращения площади фигуры ограниченной дугой AB и отрезком AC. Тело, такой же формы, получается от вращения трапеции $OABC$ вокруг оси Oy. Тело искомого объёма V находится внутри образованного тела и равен разности объёма V_1 тела, образованного вращением $OABC$ вокруг оси Oy и объёма V_2 тела, образован-

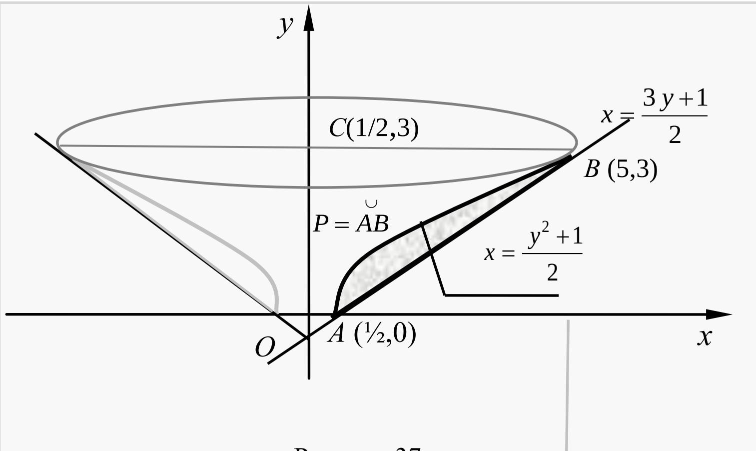


Рисунок 37

ного вращением криволинейной трапеции *OAPBC* вокруг оси *Oy*, то есть

$$V = V_1 - V_2.$$

Границы интегрирования берутся по оси *Oy* от $y_1 = 0$ и $y_2 = 3$.

Вычислим объёмы V_1 и V_2:

$$V_1 = \pi\int_0^3\left(\frac{3y+1}{2}\right)^2 d\,y = \frac{\pi}{4}\int_0^3\left(9y^2+6y+1\right)d\,y =$$

$$\frac{\pi}{4}\left(\frac{9y^3}{3}+\frac{6y^2}{2}+y\right)\Bigg|_0^3 = \frac{\pi}{4}\left(81+27+3\right) = \frac{111}{4}\pi.$$

$$V_2 = \pi\int_0^3\left(\frac{y^2+1}{2}\right)^2 d\,y = \frac{\pi}{4}\int_0^3\left(y^4+2y^2+1\right)d\,y =$$

$$\frac{\pi}{4}\left(\frac{y^5}{5}+2\frac{y^3}{3}+y\right)\Bigg|_0^3 = \frac{\pi}{4}\left(\frac{243}{5}+2\frac{27}{3}+3\right) = \frac{87}{5}\pi;$$

$$V = V_1 - V_2 = \frac{111}{4}\pi - \frac{87}{5}\pi = \frac{207}{20}\pi = 10{,}35\pi.$$

Лекция № 14

Способы приближенного вычисления определенных интегралов

14.1.Приближенное интегрирование

Определенные интегралы функций, имеющих первообразные функции, в основном, вычисляются по формуле Ньютона-Лейбница. Однако, не для всякой непрерывной функции её первообразная может быть выражена элементарной функцией, возникают существенные трудности при нахождении первообразной, приводящие к усложнению подынтегральной функции. В случаях, когда вычисление определенных интегралов затруднено или слишком сложно используется *численное интегрирование* (*численные методы*), которые рассматривают способы приближенных вычислений определенных интегралов и дают возможность находить значения интеграла с требуемой точностью. Приближенное вычисление определенных интегралов аналитическими методами сводится к замене подынтегральной функции $f(x)$ каким – либо более простым выражением. Обычно подынтегральную функцию заменяют интерполяционным многочленом, совпадающим в некоторых точках x_i (узлах интерполяции) с функцией $f(x_i)$. В результате получаем *квадратурные формулы* численного интегрирования вида

$$I=\int_a^b f(x)\,dx=\sum_{i=1}^{n} A_i(x_1,x_2,...,x_i,...,x_n,a,b)\,f(x_i)+R,$$

$$I=\int_a^b f(x)\,dx\approx\sum_{i=1}^{n} A_i(x_i)\,f(x_i),$$

где A_i – некоторые числа (коэффициенты), x_i – точки (узлы) разбиения отрезка $[a, b]$, $R=R(n)$ – погрешность формулы приближенного интегрирования.

Для повышения точности формул приближенного интегрирования и получения более простых коэффициентов A_i $[a , b]$ разбивают на части и к каждой части применяют формулу приближенного интегрирования.

Численные методы позволяют находить приближенные значения с высокой требуемой точностью приближения. Практически используются для вычисления вероятностей, различных видов распределений случайных величин.

На практике используются простейшие формулы Ньютона-Котеса, к которым относятся формулы прямоугольников, формулы трапеций, формулы парабол.

14.2. Формула средних прямоугольников

Геометрический смысл определенного интеграла есть площадь фигуры, ограниченной кривой графика функции $f(x)$, прямыми: $x = a$, $x = b$, $y = 0$. Основание трапеции $[a, b]$ разобьем на n равных отрезков точками $a \le x_i \le b$, где i изменяется от 0 до n.

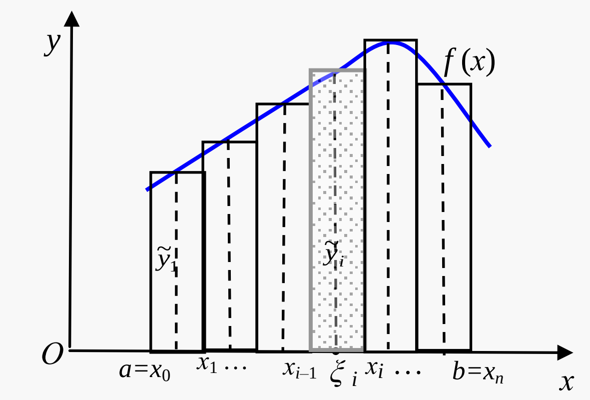


Рисунок 38

Длина каждого элементарного отрезка разбиения $\Delta x = x_i - x_{i-1} = \dfrac{b-a}{n} = h$ называется *шагом* разбиения (рис.38). Любой узел шага (точку x_i) можно определить как $x_i = i \cdot h$.

Площадь каждого элементарного прямоугольника построенного на отрезке Δx, высота которого будет ордината $\tilde{y}_i = f(\xi_i)$, где ξ_i середина элементарного отрезка $\xi_i = \dfrac{x_{i-1} + x_i}{2}$, получим $S_i = h \cdot f(\xi_i)$.

Площадь криволинейной трапеции приближенно равна сумме площадей элементарных прямоугольников, тогда интеграл $I = \int\limits_a^b f(x)\,dx$ можно приближенно заменить суммой площадей прямоугольников с высотой $\tilde{y}_i = f(\xi_i)$ и основанием $\dfrac{b-a}{n} = h$:

$$I = \int\limits_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}[f(\xi_1) + f(\xi_2) + \ldots + f(\xi_n)];$$

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i); \quad \int\limits_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right).$$

Погрешность вычисления методом средних квадратов оценивается по формуле:

$$\Delta=\left|\int_a^b f(x)\,dx-\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)\right|.$$

Выведена и доказана формула абсолютной погрешности вычисления методом средних квадратов

$$|R|=\left|\frac{(b-a)^3}{24n^2}\,f''\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)\right|,\quad a\le\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\le b;$$

$$|R|=\left|\frac{(b-a)^3}{24\,n^2}M_2\right|;\ \ M_2=\max\ f''\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right).$$

14.3 Формула трапеций

Для приближенного вычисления приближенного значения определенного интеграла часто используется *формула трапеций.*

Пусть непрерывная функция $f(x)$ задана на отрезке $[a, b]$ и $f(x) \ge 0$ как показано на рисунке 39. Интеграл $I=\int_a^b f(x)\,dx$ численно равен площади криволинейной трапеции, ограниченной кривой графика функции $f(x)$ и прямыми: $x = a$, $x = b$, $y = 0$. Отрезок $[a, b]$ разобьем на n равных частей точками $a \le x_i \le b$, где i изменяется от 1 до n. Длина каждого отрезка разбиения будет $\frac{b-a}{n}=h$ и $x_i = i{\cdot}h$, на кривой над отрезком $[a, b]$ получим ломаную линию, образованную хордами (рис. 39) стягивающими точки кривой соответствующие разбиению.

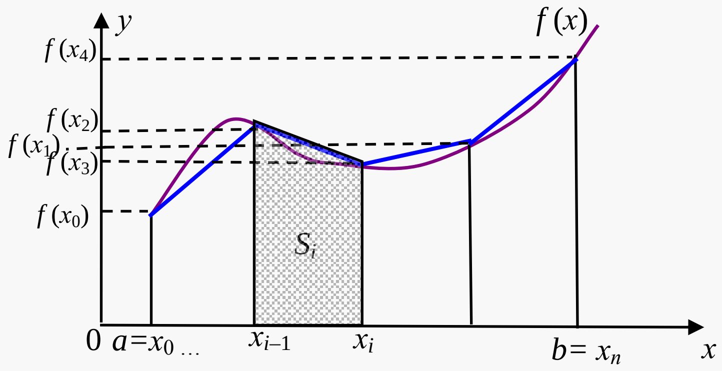


Рисунок 39

Площадь криволинейной трапеции $S=\int_a^b f(x)\,dx$,

а площадь трапеции, ограниченная ломаной линией равна сумме элементарных трапеций

$$S\approx\sum_{i=1}^{n} h\frac{f(x_i)+f(x_{i-1})}{2}.$$

Записывая сумму каждой элементарной трапеции на всем отрезке $[a, b]$ заметим, что все слагаемые этой суммы встречаются дважды кроме слагаемых $\frac{f(x_0)}{2}$ и $\frac{f(x_n)}{2}$:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx h\left(\frac{f(a)+f(x_1)}{2}+\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}+\ldots+\frac{f(x_{n-2})+f(x_{n-1})}{2}+\frac{f(x_{n-1})+f(b)}{2}\right);$$

где $a = x_0$, $b = x_n$;

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx h\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}+f(x_1)+f(x_2)+\ldots f(x_{n-2})+f(x_{n-1})\right);$$

окончательно запишем формулу трапеций в виде

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}+f(x_1)+f(x_2)+\ldots f(x_{n-2})+f(x_{n-1})\right),$$

или, обозначая сумму площадей элементарных трапеций

$$S_n = \frac{b-a}{n}\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}+f(x_1)+f(x_2)+\ldots f(x_{n-2})+f(x_{n-1})\right)$$

формула трапеций будет

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx S_n\,.$$

Эта формула применима не только для $f(x) \geq 0$, но и в общем случае.

Абсолютная погрешность Δ значения определенного интеграла при его вычислении по формуле трапеций есть разность

$$\Delta = \left|\int_a^b f(x)\,dx - S_n\right|.$$

Погрешность вычисления методом трапеций оценивается по формуле:

$$\Delta = \left|\int_a^b f(x)\,dx - \frac{b-a}{n}\,\frac{f(a)+f(b)}{2}\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right|.$$

Выведена и доказана формула абсолютной погрешности вычисления методом трапеций

$$|R| = \left|\frac{(b-a)^3}{24n^2}\, f''\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)\right|,\quad a \leq \frac{x_{i-1}+x_i}{2} \leq b;$$

$$|R| = \left|\frac{(b-a)^3}{12\,n^2} M_2\right|;\quad M_2 = \max\, f''(x),\ a \leq x \leq b.$$

Пример. Вычислить приближенно интеграл $I = \int_1^2 \frac{dx}{x+x^2}$ по формуле трапеций и оценить погрешность при $n = 10$.

Решение. По формуле трапеций $\int_1^2 \frac{dx}{x+x^2} \approx \frac{1}{10}\left(\frac{f(1)+f(2)}{2}+\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right)$. Составим таблицу значений $y_i = f(x_i)$ с шагом 0,1 и порядка 10^{-4}.

x_i	$x_i + x_i^2$	$\frac{1}{x_i + x_i^2}$	x_i	$x_i + x_i^2$	$\frac{1}{x_i + x_i^2}$
1,0000	2,0000	0,5000	1,6000	4,1600	0,2403
1,1000	2,3100	0,4329	1,7000	4,5900	0,2178
1,2000	2,6400	0,3787	1,8000	5,0400	0,1984
1,3000	2,9900	0,3344	1,9000	5,5100	0,1814
1,4000	3,3600	0,2976	2,0000	6,0000	0,1666
1,5000	3,7500	0,2666			

Вычисленные значения подставим в формулу трапеций, получим:

$$I \approx \frac{1}{10}\left(0{,}3333 + 0{,}4329 + 0{,}3787 + 0{,}3344 + 0{,}2976 + 0{,}2666 + 0{,}2403 + 0{,}2178 + 0{,}1984 + 0{,}1814\right);$$

$$I = \int_1^2 \frac{dx}{x + x^2} \approx 0{,}2881.$$

Для оценки погрешности вычислим вторую производную подынтегральной функции при $x = 2$:

$$y'' = \left(\frac{1}{x + x^2}\right)'' = \left(-\frac{1 + 2x}{(x + x^2)^2}\right)' = \left.\frac{2(3x^2 + 3x + 1)}{(x + x^2)^3}\right|_{x=2} = 0{,}1759. \cdot$$

Находим оценку погрешности:

$$|R| \le \frac{f''(x)(b-a)^2}{12n^2} = \frac{0{,}1759}{1200} = 0{,}00014.$$

Вычислим заданный интеграл по формуле Ньютона-Лейбница

$$I = \int_1^2 \frac{dx}{x + x^2} = \int_1^2 \frac{dx}{x + x^2} = \int_1^2 \frac{A\,dx}{x} - \int_1^2 \frac{B\,dx}{1 + x} = ln\left.\frac{x}{1 + x}\right|_1^2 = \ln\frac{4}{3} \approx 0{,}2877.$$

Вычисление интеграла по формуле трапеций дают незначительную погрешность $\Delta = |0,2877 - 0,2881| = 0,0004$ и можно сделать вывод, что получен результат с тремя верными знаками.

Общая погрешность, возникающая от применения формулы трапеций и округления приближенных значений ординат, не превосходи величины 0,00015.

14.4. Формула парабол (Симпсона)

Более высокая точность вычисления определенного интеграла дает формула парабол. Пусть непрерывная функция $f(x)$ задана на отрезке $[a, b]$ и площадь криволинейной трапеции ограничена прямыми: $x = a$, $x = b$, $y = 0$, $S = \int_a^b f(x)\ dx$. Отрезок $[a, b]$ разобьем на четное число $2n$ равных частей с шагом разбиения $h\frac{b-a}{2n}$.

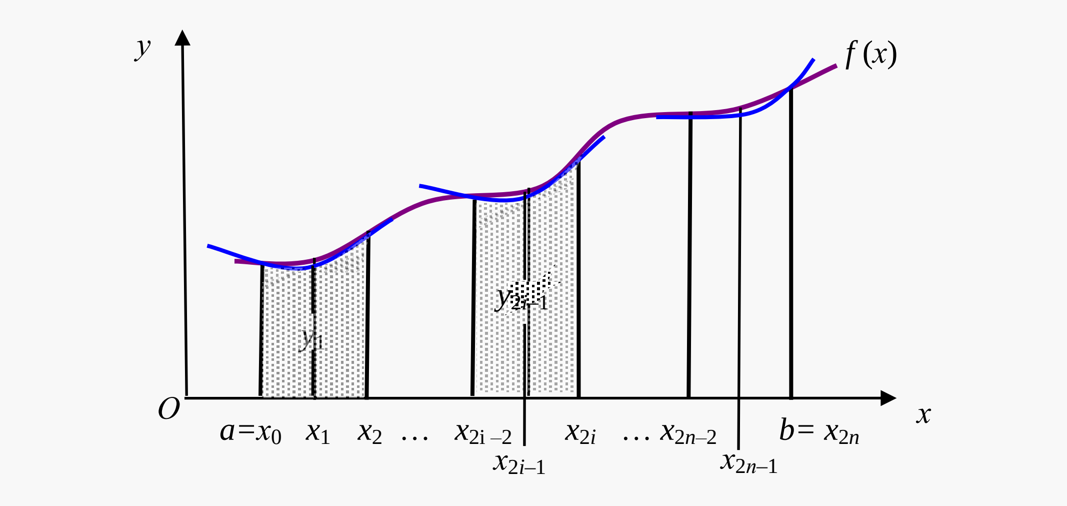


Рисунок 40

Значение определенного интеграла есть сумма площадей всех разбиений. Соединим два, рядим стоящих разбиения дугой параболы вместо части дуги $f\ (x)$ на отрезке $2h$.Получим разбиение площади криволинейной трапеции функции $f\ (x)$ на элементарные криволинейные трапеции функций
$y = ax^2 + bx + c$.

На интервале $[x_0, x_2]$ парабола проходит через точки (x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), …, на интервале $[x_{2i-2}, x_{2i}]$ парабола проходит через точки (x_{2i-2}, y_{2i-2}), (x_{2i-1}, y_{2i-1}), (x_{2i}, y_{2i}),…, на интервале $[x_{2n-1}, x_{2n}]$ парабола проходит через точки
(x_{2n-2}, y_{2n-2}), (x_{2n-1}, y_{2n-1}), (x_{2n}, y_{2n}). Три точки однозначно определяют коэффициенты квадратного трехчлена уравнения параболы с осью параллельной Oy, ограничивающих элементарные параболические трапеции.

Рассмотрим элементарную параболическую трапецию, проходящую через точки (x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2) с шагом $2h$ и ограниченную ординатами $y_0 = ah^2 - bh + c$ в точке $x_0 = -h$ и $y_2 = ah^2 + bh + c$ в точке $x_2 = h$ параллельными оси Oy, за ось параболы примем $y_1 = c$ в точке x_1.

Запишем площадь этой элементарной параболической трапеции

$$S_1 = \int_{-h}^{h}(a x^2 + b x + c)\, d x = a\frac{x^3}{3}\Bigg|_{-h}^{h} + a\frac{x^3}{3}\Bigg|_{-h}^{h} + b\frac{x^2}{2}\Bigg|_{-h}^{h} + c x\Big|_{-h}^{h} = 2\frac{a h^3}{3} + 2c h.$$

Из уравнений $y_0 = ah^2 - bh + c, \quad y_2 = ah^2 + bh + c \quad y_1 = c$

выразим коэффициенты a и c через y_0, y_1, y_2 и h, получим

$$\left.\begin{aligned} a &= \frac{1}{h^2}(y_0 + bh - y_1); \\ a &= \frac{1}{h^2}(y_2 - bh - y_1); \end{aligned}\right] \to a = \frac{1}{2h^2}(y_0 - 2y_1 + y_2)\cdot$$

В формулу площади S_1 подставим a и c выраженные через y_0, y_1, y_2 и h, получим

$$S_1 = 2\frac{a h^3}{3} + 2c h = 2\frac{h^3}{3}\frac{1}{2h^2}(y_0 - 2y_1 + y_2) + 2h y_1 = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2).$$

Таким образом, складывая площади всех элементарных параболических трапеций разбиения отрезка $[a, b]$ получим приближенное значение заданного интеграла $S_i = \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} f(x)\, d x = \frac{h}{3}(y_{2i-2} + 4y_{2i-1} + y_{2i}),$:

$$S_1 = \int_{a=x_0}^{x_2} f(x)\, d x = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2),$$

$$S_2 = \int_{x_2}^{x_4} f(x)\, d x = \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4),$$

$$S_3 = \int_{x_4}^{x_6} f(x)\, d x = \frac{h}{3}(y_4 + 4y_5 + y_6),$$

...

$$S_i = \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} f(x)\, d x = \frac{h}{3}(y_{2i-2} + 4y_{2i-1} + y_{2i}),$$

...

$$S_n = \int_{x_{2n-2}}^{b=x_{2n}} f(x)\, d x = \frac{h}{3}(y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n});$$

$$S = \int_a^b f(x)\, d x = \frac{b-2}{6}(y_0 + y_{2n}) + 2(y_2 + \ldots + y_{2i-2} + \ldots + y_{2n-2}) + 4(y_1 + \ldots + y_{2i-1} + \ldots + y_{2n-1}) -$$

эта формула называется *формулой парабол* или *формулой Симпсона.*

Сравним абсолютные погрешности приближенного вычисления интеграла $I = \int_1^2 \frac{d x}{x + x^2}$ по формуле трапеций и по формуле Симпсона.

Вычислим приближенно интеграл $I = \int_1^2 \frac{d x}{x + x^2}$ по формуле Симпсона и оценить погрешность при $n = 10$.

Решение. По формуле Симпсона

$$\int_1^2 \frac{dx}{x+x^2} \approx \frac{1}{30}\left(f(1)+f(2)+2(y_2+y_4+y_6+y_8)+4(y_1+y_3+y_5+y_7+y_9)\right).$$

Воспользуемся составленной таблицей значений $y_i = f(x_i)$ с шагом 0,1 и порядка 10^{-4}.

x_i	$x_i + x_i^2$	$\frac{1}{x_i + x_i^2}$	x_i	$x_i + x_i^2$	$\frac{1}{x_i + x_i^2}$
1,0000	2,0000	0,5000	1,6000	4,1600	0,2403
1,1000	2,3100	0,4329	1,7000	4,5900	0,2178
1,2000	2,6400	0,3787	1,8000	5,0400	0,1984
1,3000	2,9900	0,3344	1,9000	5,5100	0,1814
1,4000	3,3600	0,2976	2,0000	6,0000	0,1666
1,5000	3,7500	0,2666			

Вычисленные значения подставим в формулу Симпсона, получим

$$I \approx \frac{1}{30}\left(0{,}6666+2(0{,}3787+0{,}2976+0{,}2403+0{,}1984)\right)+$$
$$+\frac{4}{30}(0{,}4329+0{,}3344+++0{,}2666++0{,}2178++0{,}1814)=\frac{8{,}629}{30}=0{,}28763.;$$

$$I=\int_1^2 \frac{dx}{x+x^2} \approx 0{,}28763.$$

Заданный интеграл по формуле Ньютона-Лейбница

$$I=\int_1^2 \frac{dx}{x+x^2}=\int_1^2 \frac{dx}{x+x^2}=\int_1^2 \frac{A\,dx}{x}-\int_1^2 \frac{B\,dx}{1+x}=ln\frac{x}{1+x}\bigg|_1^2=\ln\frac{4}{3}\approx 0{,}28768.$$

Абсолютная погрешность, возникающая от применения формулы Симпсона, составляет Δ = 0,28768 – 0,28763 = 0,00005, а для заданной точности порядка 10^{-4} погрешность равна нулю.

Формула Ньютона-Котеса

Ранее рассмотренные методы приближенного вычисления определенных интегралов, это – метод прямоугольников, метод трапеций, метод парабол, сводится к интерполированию интегрируемой на отрезке функции многочленом Лагранжа. Обобщением все перечисленных методов является формула Ньютона-Котеса:

$$I=\int_a^b f(x)\ dx=(b-a)\sum_{i=0}^{n} H_i y_i\,,$$

здесь H_i *называется коэффициентами Ньютона-Котеса*, независящими от подынтегральной функции $f(x)$, их можно вычислить заранее.

Интерполяционный многочлен Лагранжа для равноотстоящих узлов с шагом интерполяции $q = \dfrac{x - x_0}{h}$, имеет вид

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^{n-i} q \cdot (q-1)...(q-n)}{i!(n-i)!(q-i)} y_i =$$
$$= \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!} y_i \sum_{i=0}^{n} \frac{q \cdot (q-1)...(q-n)}{(q-i)}.$$

Запишем данный интеграл, заменив подынтегральную функцию интерполяционным многочленом

$$I = \int_a^b f(x)\, d\,x = \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!} y_i \int_{x_0}^{x_n} \frac{q \cdot (q-1)...(q-n)}{(q-i)} d\,x\,,$$

заменим пределы интегрирования $x = a + qh$, обозначив $dx/h = dq \rightarrow dx = hdq$, получим

$$\int_a^b f(x d\,x) = \sum_{i=0}^{n} h \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!} y_i \int_0^n q(q-1)...\big(q-(i-1)\big)\big(q-(i+1)\big)...(q-n)\,dq,$$

так как $h = \dfrac{b-a}{n}$, перепишем интеграл, вынося $(b - a)$ за знак суммы

$$\int_a^b f(x d\,x) = (b-a) \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!n} y_i \int_0^n q(q-1)...\big(q-(i-1)\big)\big(q-(i+1)\big)...(q-n)\,dq$$

Запишем формулу для определения величины коэффициентов H_i (учтем, что $0! = 1$)

$$H_i = \sum_{i=0}^{n} h \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!} \int_0^n q(q-1)...\big(q-(i-1)\big)\big(q-(i+1)\big)...(q-n)\,dq,$$

окончательно получаем формулу Ньютона-Котеса

$$I = \int_a^b f(x)\, d\,x = (b-a) \sum_{i=0}^{n} H_i y_i\,.$$

Формулу Ньютона-Котеса чаще всего используют при интерполировании подынтегральной функции полиномом с *небольшим* числом узлов. Для получения высокой точности каждый шаг разбивается на отрезки с таким же числом узлов, при этом алгебраическая степень точности

была не меньшей *n*.

Из формулы Ньютона-Котеса при $n = 1$ получаем формулу трапеций

$$I = \int_a^b f(x)\, d\,x = \frac{(b-a)}{2}(y_0 + y_1)\,,$$

при $n = 2$ – формулу парабол

$$I = \int_a^b f(x)\, d\,x = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)\,.$$

Для практического вычисления определенных интегралов по формуле Ньютона – Котеса вычислены коэффициенты H_i значений n из начала натурального ряда (см. приложение: таблица коэффициентов Котеса). Среди коэффициентов Котеса при i = 8 и $i \geq 10$ некоторые коэффициенты отрицательные, это может приводить к уменьшению или потери точности вычислений. По этой причине формулы Ньютона-Котеса применяются для не высоких порядков ($n \leq 7$).

Пример. Вычислить по формуле Ньютона-Котеса $I = \int_0^5 \frac{1}{x^2+2}\,dx$ при n = 5.

Решение. Шаг разбиения h отрезка $[a, b]$ a = 0, b = 5 равен 1.
Найдем значения подынтегральной функции в каждом узле разбиения:

для $x_0 = 0$ функция $y_0 = 1/2$,

для $x_0 = 1$ функция $y_0 = 1/3$,

для $x_0 = 2$ функция $y_0 = 1/6$,

для $x_0 = 3$ функция $y_0 = 1/11$,

для $x_0 = 4$ функция $y_0 = 1/18$,

для $x_0 = 5$ функция $y_0 = 1/27$.

Из таблицы коэффициентов Котеса находим:

$H_0 = H_5 = 19/288$, $H_1 = H_4 = 25/96$, $H_2 = H_3 = 25/144$.

По формуле Ньютона-Котеса

$$I = \int_0^5 \frac{1}{x^2+2}\,dx = (5-0)\left(\frac{19}{288}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{27}\right)+\frac{25}{96}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{18}\right)+\frac{25}{144}\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{11}\right)\right) \approx 0{,}907.$$

Ответ: I = 0,907.

Определенный интеграл широко применяется не только для решения геометрических задач, но и для решения физических, экономических и др. задач. В экономических задачах определенным интегралом выражается объем производимой продукции по функции, выражающей производительность труда и др.

ПРИЛОЖЕНИЕ

1. Основные свойства производных и дифференциалов функций, дифференцируемых в точке:

$$u(x) \equiv const \qquad u'(x) \equiv 0; \qquad d\,u \equiv 0;$$

$$(c\,u)' = c\,(u)'; \qquad d\,(c\,u) = c \cdot d\,u;$$

$$(u \pm \upsilon)' = u' \pm \upsilon'; \qquad d\,(u \pm \upsilon) = d\,u \pm d\upsilon;$$

$$(u \cdot \upsilon)' = u'\upsilon + \upsilon' u; \qquad d\,(u \cdot \upsilon) = \upsilon\,d\,u + u\,d\upsilon;$$

$$\left(\frac{u}{\upsilon}\right)' = \frac{u'\upsilon - \upsilon' u}{\upsilon^2}; \qquad \left(\frac{u}{\upsilon}\right)' = \frac{u'\upsilon - \upsilon' u}{\upsilon^2}.$$

Таблица коэффициентов Котеса [4]

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$i = 0$	1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{7}{90}$	$\frac{19}{288}$	$\frac{41}{840}$	$\frac{751}{17280}$	$\frac{989}{28350}$	$\frac{2857}{89600}$	$\frac{16067}{598752}$
$i = 1$	1	$\frac{4}{6}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{25}{96}$	$\frac{9}{35}$	$\frac{3577}{17280}$	$\frac{5838}{28350}$	$\frac{15741}{89600}$	$\frac{106300}{598752}$
$i = 2$		$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{25}{144}$	$\frac{9}{280}$	$\frac{1323}{17280}$	$-\frac{928}{28350}$	$\frac{1080}{89600}$	$-\frac{48525}{598752}$
$i = 3$			$\frac{1}{8}$	$\frac{7}{90}$	$\frac{25}{144}$	$\frac{34}{105}$	$\frac{2989}{17280}$	$\frac{10496}{28350}$	$\frac{19344}{89600}$	$\frac{272400}{598752}$
$i = 4$				$\frac{16}{45}$	$\frac{25}{96}$	$\frac{9}{280}$	$\frac{2989}{17280}$	$-\frac{4540}{28350}$	$\frac{5778}{89600}$	$-\frac{260550}{598752}$
$i = 5$					$\frac{19}{288}$	$\frac{9}{35}$	$\frac{1323}{17280}$	$\frac{10496}{28350}$	$\frac{5778}{89600}$	$\frac{427368}{598752}$
$i = 6$						$\frac{41}{840}$	$\frac{3577}{17280}$	$-\frac{928}{28350}$	$\frac{19344}{89600}$	$-\frac{260550}{598752}$
$i = 7$							$\frac{751}{17280}$	$\frac{5838}{28350}$	$\frac{1080}{89600}$	$\frac{272400}{598752}$
$i = 8$								$\frac{989}{28350}$	$\frac{15741}{89600}$	$-\frac{48525}{598752}$
$i = 9$									$\frac{2857}{89600}$	$\frac{106300}{598752}$
$i =10$										$\frac{16067}{598752}$