Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Армавирский государственный педагогический университет»
Институт прикладной информатики, математики и физики
Кафедра математики, физики и методики их преподавания

Спевакова Н.Ю.

Мозговая М.А.

АФФИННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПЛОСКОСТИ

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

Армавир, 2018

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов 1 курса направления подготовки бакалавров «Педагогическое образование», направленность (профиль) «Математика», изучающих учебную дисциплину «Геометрия», раздел «Аффинные преобразования плоскости». Пособие содержит теоретические основы раздела. Рассмотрены общие положения, понятие аффинных преобразований плоскости, доказаны основные геометрические свойства таких преобразований, что составляет теоретическую базу раздела школьного курса геометрии «Геометрические преобразования фигур на плоскости».

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Аффинные преобразования плоскости. Основные понятия.

Теория геометрических преобразований сыграла важную роль в формировании взглядов на геометрию. Анализ основных понятий, определений, теорем и других утверждений, курса геометрии показывает, что в геометрии изучаются те свойства геометрических фигур, которые остаются неизменными при определенной группе геометрических преобразований, то есть инварианты таких преобразований. В большинстве случаев такой группой является группа подобий или группа движений. Теория геометрических преобразований лежит в основе общего определения геометрии, позволяющего разобраться в сходствах и различиях между разными ветвями этой математической дисциплины.

Рассмотрим основные *элементы теории аффинных преобразований* плоскости с доказательствами наиболее общих утверждений.

Определение 1. Пусть задано некоторое непустое множество G и для любых двух элементов этого множества определен третий:

$$G \neq \emptyset, \qquad \forall\, a \in G, \qquad \forall\, b \in G, \qquad a \circ b \in G.$$

Рассмотрим пару $(G,\circ)$. Эта пара называется *группой*, если выполнены следующие три условия (аксиомы):

1) бинарная операция "$\circ$" ассоциативна, т.е. для любых элементов $a, b, c \in G$ имеем: $\forall a, b, c \in G$ выполняется $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$;

2) в множестве G имеется такой элемент e (нейтральный элемент), что $a \circ e = a$ для любого элемента a из G;

3) для любого элемента a из G существует такой элемент a' (симметричный элемент), что $a \circ a' = e$.

При этом в курсе алгебры доказывается, что для любого элемента a нейтральный и симметричный элементы единственные, причём $a \circ e = e \circ a$ и $a \circ a' = a' \circ a$. Довольно часто симметричный элемент обозначают так: a^{-1}.

Определение 2. Преобразованием (непустого) множества X называется любое биективное (взаимно однозначное) отображение множества X на себя.

Если X – множество точек, то его преобразования называются *геометрическими*.

Считая плоскость непустым множеством точек, обозначим это множество $S, \ S \neq \emptyset$.

Рассмотрим множество S и множество всех его преобразований, обозначаемое G_S.

Введем в множестве G_S *операцию композиция (суперпозиция, произведение)*, обозначаемую " $\circ$ " , следующим образом. Пусть $f \in G_S$, $g \in G_S$ и каждому элементу x множества S ($\forall x \in S$) поставлено в соответствие преобразование $f \circ g$ по закону:

$(f \circ g)(x) = f(g(x))$.

Исходя из определения, композиция $f \circ g$ также является взаимно однозначным отображением множества S на себя, т.е. преобразованием: $(f \circ g) \in G_S$.

Этим определено новое преобразование множества S, переводящее элемент x в элемент $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ – результат последовательного применения к элементу x сначала преобразования g, а затем преобразования f. Оно обозначается через $f \circ g$ и называется композиций преобразований f и g. Таким образом, на множестве G_S определена бинарная операция " $\circ$ " – композиция (умножение) преобразований.

Теорема 1. Пара $(G_S, \circ)$ есть группа относительно операции " $\circ$ " - композиции преобразований.

Доказательство. Докажем, что для пары $(G_S, \circ)$ выполнены все три условия, указанные в определении группы.

1) Пусть $f, g, h \in G_S$ и $\forall x \in S$ проверим выполнение ассоциативности операции:

$$[(f \circ g) \circ h](x) = (f \circ g)\big(h(x)\big) = f\big[g\big(h(x)\big)\big],$$

$$[f \circ (g \circ h)](x) = f[(g \circ h)(x)] = f\big[g\big(h(x)\big)\big].$$

Таким образом, доказана ассоциативность бинарной операции композиции преобразований плоскости.

2) Обозначим через e тождественное преобразование, т.е. преобразование, при котором каждому элементу множества S ставится в соответствие тот же элемент. Иными словами,

$$e(x) = x.$$

Для любого преобразования $f(x)$ по определению композиции преобразований:

$\forall f \in G_S \ \ (f \circ e)(x) = f\big(e(x)\big) = f(x) = f.$

Значит, e – нейтральный элемент относительно операции композиции преобразований плоскости.

3) Любое преобразование $f \in G_S$ является биективным отображением множества S на себя, поэтому существует обратное отображение $f^{-1}\colon S \to S$, которое является преобразованием множества S, поэтому $f^{-1} \in G_S$. Ясно, что $f \circ f^{-1} = e$.

Действительно, пусть y – любой элемент из S. Если $y = f^{-1}(x)$, то $y = f(y)$, поэтому

$$f \circ f^{-1}(x) = f[f^{-1}(x)] = f(y) = x = e(x). \ ■$$

Группа преобразований плоскости получается, если в качестве S рассматривать множество точек плоскости, G_S – множество всех преобразований плоскости, а " $\circ$ " – операцию композиции преобразований.

Основная задача исследования состоит в изучении *подгрупп* этой группы.

Прежде чем говорить о подгруппах группы преобразований, перечислим предъявляемые к ней требования.

Пусть $(G,\circ)$ – группа и $H \subset G$, $H \neq \emptyset$. Если $(H,\circ)$ – группа, то она называется *подгруппой* группы $(G,\circ)$.

Непустое подмножество H группы G является *подгруппой* этой группы, если выполнены следующие два условия:

1) Если $a \in H$ и $b \in H$, то $a \circ b \in H$;

2) Если $a \in H$, то $a^{-1} \in H$.

Определение 3. Рассмотрим отображение f плоскости π в себя ($f\colon \pi \to \pi$), которое в некоторой аффинной системе координат задаётся линейной невырожденной системой вида

$$\begin{cases} x' = c_{11}x + c_{12}y + x_0, \\ y' = c_{21}x + c_{22}y + y_0, \end{cases}$$

$$\text{где } \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Или, в матричной форме,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

Такое отображение назовем *линейным отображением плоскости* на себя. Это означает, что существует аффинная система координат такая, что каждой точке $M(x, y)$ ставится в соответствие точка $M'(x', y')$, которые вычисляются по этим формулам.

Это линейное отображение является преобразованием плоскости, то есть взаимно однозначным отображением (биекцией) плоскости на себя.

Определение 4. Такое линейное отображение плоскости π на себя называется *аффинным преобразованием плоскости*.

Множество всех аффинных преобразований плоскости будем обозначать A_π.

Замечание. Необходимо отметить, что в учебном пособии «Геометрия» авторы Атанасян Л.С. и Базылев В.Т. предлагают другой подход к определению данного понятия: «Преобразование плоскости называется *аффинным*, если оно любые три точки M_1, M_2 и M_3, лежащие на одной прямой, переводят в три точки M_1', M_2' и M_3', лежащие на одной прямой, и сохраняет их простое отношение, т.е. $(M_1M_2, M_3) = (M_1'M_2', M_3')$». При этом авторы отмечают, что последнее равенство является избыточным, предлагая при изучении таких преобразований не включать его в определение, а доказывать.

В предлагаемом изложении соответствующее свойство аффинных преобразований будет доказано ниже. Таким образом обосновывается эквивалентность приведенных определений

Для аффинных преобразований плоскости верны следующие утверждения:

1. Преобразование, обратное аффинному, также является аффинным преобразованием плоскости: если $f \in A_\pi \Rightarrow f^{-1} \in A_\pi$.
2. Аффинное преобразование плоскости в любой аффинной системе координат задается линейной невырожденной системой.
3. Композиция аффинных преобразований плоскости есть аффинное преобразование, то есть если $f_1 \in A_\pi$ и $f_2 \in A_\pi$, то $(f_1 \circ f_2) \in A_\pi$.

Следствие. Множество всех аффинных преобразований плоскости A_π является группой относительно операции композиции преобразований. И эта группа есть подгруппа множества всех преобразований плоскости: $(A_\pi,\circ) \subset (G,\circ)$.

2. Геометрические свойства аффинных преобразований плоскости.

Теорема 2. Аффинное преобразование плоскости отображает прямую на прямую. При таком преобразовании плоскости три точки, не лежащие на одной прямой, переходят в три точки, не лежащие на одной прямой, то есть, три точки общего положения переходят в три точки общего положения.

Доказательство. Пусть $f \in A_\pi$, l - прямая линия. Рассмотрим образ этой прямой при преобразовании $l' = f(l)$ и покажем, что это также прямая линия.

Пусть в некоторой аффинной системе координат уравнение прямой l имеет вид $\mathrm{A}x + By + C = 0$, а преобразование f задано системой

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \quad \text{где } \det(c_{ik}) \neq 0.$$

Пусть точка $M(x,y) \in l$, а её образ точка $M'(x',y') \in l'$. Выясним, какому уравнению удовлетворяют координаты таких образов.

Рассмотрим аналитическое выражение для f^{-1}

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}, \qquad \text{где } \det(d_{ik}) \neq 0$$

Подставим в уравнение прямой l:

$$A(d_{11}x' + d_{12}y') + B(d_{21}x' + d_{22}y') + C + Ap + Bq = 0$$

Преобразуем, получаем

$$x'(Ad_{11} + Bd_{21}) + y'(Ad_{12} + Bd_{22}) + C + Ap + Bq = 0$$

Таким образом, x' и y' удовлетворяют уравнению вида

$A'x' + B'y' + C' = 0,$

где $A' = A\,d_{11} + B\,d_{21}$, $B' = Ad_{12} + Bd_{22}$, $C' = C + Ap + Bq$.

Поскольку $\det \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix} \neq 0$, то $|A'| + |B'| \neq 0$.

Вновь получено уравнение прямой. Иначе говоря, прямая l отобразилась в прямую, а, так как, f^{-1} есть тоже аффинное преобразование, то оно отображает прямую l' в прямую l. Можно сказать, что f отображает прямую на прямую: $l' = f(l)$. ■

Следствие. При аффинных преобразованиях, три точки, не лежащие на одной прямой, переходят в три точки, не лежащие на одной прямой.

Доказательство. $f \in A_{\Pi}$, точки *A*, *B*, *C* не принадлежат одной прямой.

Пусть $A' = f(A)$, $B' = f(B)$, $C' = f(C)$. Так как, *A*, *B*, *C* – разные точки, то и *A'*, *B'*, *C'* – так же разные точки.

По теореме, прямая (AB) отображается на прямую $(A'B')$. Если допустить, что $C' \in (A'B')$, то у точки C' будут два разных прообраза: точка *C* и какая-то точка на прямой *AB*.

Получили противоречие, которое доказывает утверждение. ■

Определение 4. Репером на плоскости называется упорядоченная тройка точек общего положения (точек, не лежащих на одной прямой). Обозначается $R = (A, B, C)$, где точки A, B и C называются *вершинами репера,* а точка A – началом репера. Говорят, что репер $R = (A, B, C)$ согласован с базисом $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ и аффинной системой координат $A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$, так как между ними существует взаимно-однозначное соответствие.

Репер называется *аффинным*, если в треугольнике ABC угол A произвольный, отличный от прямого, и *ортонормированным*, если угол A прямой и $AB = AC = 1$.

Таким образом, реперы и соответствующие им аффинные системы координат можно не различать.

Если данная система координат аффинная, то R – аффинный репер, а если система координат прямоугольная, то репер R ортонормированный.

Под координатами точки в репере $R = (A, B, C)$ понимают координаты этой точки в базисе $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.

Теорема 3. Аффинное преобразование плоскости переводит репер в репер, причём так, что точка M переходит в точку M' с теми же координатами в новом репере.

Доказательство. Пусть заданы репер $R = (A, B, C)$ и аффинное преобразование плоскости f, в котором: $A' = f(A)$, $B' = f(B)$, $C' = f(C)$.

Рассмотрим $R' = (A', B', C')$: $R' = f(R)$.

1). $R' = (A', B', C')$ есть репер в силу следствия из теоремы.

2). Имеется точка $M(x; y)_R$, $f(M) = M'$. Требуется доказать, что $M'(x; y)_{R'}$.

Пусть в репере R аффинное преобразование плоскости задается невырожденной системой

$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$ в R, причем $\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} \neq 0$.

Рассмотрим точки:

$A(0; 0)$ в $R \xrightarrow{f} A'(u_0; v_0)_R$;

$B(1; 0)_R \xrightarrow{f} B'(c_{11} + u_0; c_{21} + v_0)_R$;

$C(0; 1)_R \xrightarrow{f} C'(c_{12} + u_0; c_{22} + v_0)_R$.

Тогда, $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{(c_{11}; c_{21})}$, $\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{(c_{12}; c_{22})}$,

$$M' = (c_{11}x + c_{12}y + u_0; c_{21}x + c_{22}y + v_0),$$

$$\overrightarrow{A'M'} = \overrightarrow{(c_{11}x + c_{12}y; c_{21}x + c_{22}y)} =$$

$$= \overrightarrow{(c_{11}x; c_{21}x)} + \overrightarrow{(c_{12}y; c_{22}y)} = x\overrightarrow{(c_{11}; c_{21})} + y\overrightarrow{(c_{12}; c_{22})} = x\overrightarrow{A'B'} + y\overrightarrow{A'C'}.$$

Итак, $\boxed{A'M' = xA'B' + yA'C'}$, то есть точка M' имеет в R' координаты x и y. ■

Теорема 4. (О существовании и единственности аффинного преобразования плоскости, переводящего один репер в другой)

Пусть $R = (A, B, C)$ и $R' = (A', B', C')$ – произвольные реперы плоскости. Тогда существует единственное аффинное преобразование плоскости, которое переводит репер R в репер R':

$$\forall R = (A, B, C) \text{ и } R' = (A', B', C')\ \exists! f: R' = f(R).$$

При этом любая точка M с данными координатами в репере R переходит в точку M' с теми же координатами в репере R'.

Доказательство.

Существование. Построим отображение f плоскости на себя по следующему закону:

$$\forall M(x, y)_R \ \rightarrow \ M'(x, y)_{R'}.$$

Покажем, что $R' = f(R)$. Рассмотрим:

$A(0; 0)_R \ \rightarrow \bar{A}\ (0; 0)_{R'} = \ A'$;

$\text{B}(1; 0)_R \ \rightarrow \bar{B}\ (1; 0)_{R'} = \ B'$;

$C(0; 1)_R \ \rightarrow \bar{C}\ (0; 1)_{R'} = \ C'$.

Очевидно, отображение f есть преобразование плоскости.

Покажем, что f есть *аффинное* преобразование плоскости. Рассмотрим произвольную точку $M(x, y)_R$. Преобразование f переводит её в точку $M'(x', y')_R$. Покажем, что x' и y' выражаются через x и y линейной невырожденной системой. По определению отображения f имеем: $M'(x, y)_{R'}$. Итак, мы рассматриваем одну и ту же точку в реперах R и R'. В силу формул преобразования аффинных координат точки при переходн от одной аффинной системы координат к другой, имеем:

$$\begin{cases} x' = c_{11}x + c_{12}y + x_0, \\ y' = c_{21}x + c_{22}y + y_0, \end{cases} \text{где } \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Значит, преобразование f является аффинным преобразованием плоскости.

Единственность. Рассмотрим некоторое произвольное аффинное преобразование φ: $R' = \varphi(R)$. Тогда в силу выше доказанного имеем:

$$\forall M(x,y)_R: \varphi(M) = M'(x;y)_{R'} = f\ (M).$$

Итак, $f = \varphi$. ■

Следствие. Произвольное аффинное преобразование плоскости однозначно задаётся парой соответствующих друг другу реперов.

Из сохранения координат образов в репере R и R' следует, что аффинное преобразование плоскости:

1) переводит прямую в прямую, а параллельные прямые переходят в параллельные прямые;
2) переводит полуплоскость в полуплоскость;
3) переводит три точки, лежащие на одной прямой в три точки, лежащие на одной прямой, и сохраняет их простое отношение;
4) при аффинном преобразовании плоскости сохраняется порядок точек на прямой;
5) отрезок отображается на отрезок, луч – на луч, угол – на угол.

Докажем некоторые из перечисленных утверждений.

1) Рассмотрим образы параллельных прямых $l_1 \parallel l_2$ в некотором аффинном преобразовании плоскости f. Пусть образы этих прямых в преобразовании будут l_1' и l_2'. По доказанному, эти образы есть прямые. Их параллельность следует из сохранения координат точек прямых, а значит и уравнений этих прямых, и с сохранением пропорциональности коэффициентов при переменных в этих уравнениях.
2) Утверждение следует из сохранения координат точек в новом репере при аффинных преобразованиях. Следовательно, неравенство, задающие полуплоскость, также сохраняет свой знак и в новом репере задает полуплоскость. Границей этой полуплоскости является прямая – образ исходной прямой.

3) Пусть заданы аффинное преобразование f и три точки A, B, C, причем $C \in (AB)$, $A' = f(A), B' = f(B), C' = f(C)$.

По доказанному, прямая (AB) отображается на прямую $(A'B')$ и поэтому $C' \in (A'B')$. Пусть $\lambda = (AB, C) <=> \overrightarrow{AC} = \lambda\, \overrightarrow{CB}$. Тогда $\lambda' = (A'B', C')$. Покажем, что λ = λ'. Рассмотрим точку $D \notin AB, D' = f(D)$.

Тогда $D' \notin A'B'$. Рассмотрим репер $R = (A, B, D)$, $f(R) = R' = (A', B', D')$.

Значит $A(0;0)_R \rightarrow A'(0;0)_{R'}, B(1;0)_R \rightarrow B'(1;0)_{R'}$,

$C(0;1)_R \rightarrow C'(0;1)_{R'}$.

По формуле для координат делящей точки имеем:

$$\text{для } C \quad p = \frac{0+\lambda 1}{1+\lambda} \text{ в } R,$$

$$\text{для } C' \quad p = \frac{0+\lambda' 1}{1+\lambda'} \text{ в } R'.$$

Следовательно, λ = λ'.

4,5) Из сохранения простого отношения трех точек прямой при аффинных преобразованиях следует сохранение порядка расположения точек на прямой. Следовательно, при аффинных преобразованиях отрезок отображается на отрезок, луч – на луч, угол – на угол.

3. Совпадение двух аффинных преобразований в некоторых точках.

Теорема 5: Если два аффинных преобразования совпадают в двух различных точках A и B, то они совпадут во всех точках прямой (AB).

Доказательство следует из сохранения простого отношения трех точек прямой при аффинных преобразованиях.

Введем понятие неподвижной точки. Л.С. Атанасян и В.Т. Базылев приводят такое *определение* данного понятия:

Определение 5. «Точку плоскости назовём *инвариантной (неподвижной) точкой* преобразования, если она переходит сама в себя в этом преобразовании». То есть, точка называется *неподвижной* в некотором аффинном преобразовании плоскости, если

$$f(A) = A.$$

Теорема 6. Два аффинных преобразования плоскости f и φ , совпадающие в трёх точках общего положения, совпадают во всех точках плоскости, что следует из теоремы существования и единственности аффинного преобразования плоскости, переводящего один репер в другой.

Следствие. Если аффинное преобразование плоскости имеет три неподвижные точки общего положения, то это преобразований имеет неподвижными все точки плоскости и является тождественным преобразованием.

Теорема 7. Если аффинное преобразование плоскости имеет две неподвижные точки A и B, то все точки прямой (AB) являются неподвижными точек и других неподвижных точек это преобразование не имеет.

Доказательство следует из теоремы 1. Выберем репер $R = (O, E_1, E_2)$ так, чтобы точки O и E_1 были неподвижными. Тогда O' = O (0,0), $E_1' = E_1(1,0)$, а образ точки E_2 – точка $E_2'(k_1; k)$. Тогда формулы аффинного преобразования примут вид

$$\begin{cases} x' = x + k_1\, y, \\ \quad y' = kx. \end{cases}$$

Если M – произвольная точка прямой OE_1, тогда M (x,0). Следовательно, точка M неподвижна. Покажем, что других неподвижных точек вне прямой (AB) нет. Действительно, если бы существовала неподвижная точка N, не принадлежащая прямой OE_1 , то имелись бы три неподвижные точки O, E, N, не лежащие на одной прямой, то есть заданное аффинное преобразование является тождественным, что противоречит условию. ■

Определение 6. Аффинное преобразование, не являющееся тождественным и имеющее две неподвижные точки, называется *перспективно-аффинным (родственным) преобразованием.* Неподвижная *прямая называется осью перспективно-аффинного преобразования (осью родства).*

Можно показать, что прямые, соединяющие соответствующие точки перспективно-аффинного преобразования, не лежащие на оси, параллельны или совпадают. Если прямая пересекает ось перспективно-аффинного преобразования (родства) в некоторой точке, то её образ проходит через эту точку. Если прямая параллельна оси, то её образ тоже параллелен оси.

Любое аффинное преобразование плоскости либо сохраняет ориентацию всех реперов плоскости, либо меняет ориентацию всех реперов плоскости.

Определение 5. Аффинное преобразование называется *преобразованием первого рода*, если оно не меняет ориентацию всех реперов плоскости, и *преобразованием второго рода*, если оно меняет ориентацию всех реперов плоскости.

4. Аналитическое выражение и классификация аффинных преобразований плоскости.

Пусть на плоскости задана аффинная система координат $A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ и преобразование f. Выразим координаты точки $M'(x', y')$ через координаты её прообраза $M(x, y)$. Рассмотрим аффинный репер $R = (A, B, C)$ и его образ $R' = (A', B', C')$. Пусть координаты точки $A'(x_0, y_0)$ и координаты векторов $\overrightarrow{A'B'}\{c_{11}, c_{21}\}_R$ и $\overrightarrow{A'C'}\{c_{12}, c_{22}\}_R$ в репере R.

Точка M' в репере R имеет координаты $(x', y')_R$, а по теореме существования и единственности аффинного преобразования плоскости, переводящего один репер в другой, та же точка в репере R' имеет координаты $(x, y)_{R'}$. Т. е. представляется возможным говорить о двойственном отношении точек к двум реперам: $M'(x', y')_R$ и $M'(x, y)_{R'}$. Используя формулы преобразования координат, выразим x', y' через x, y:

$$\begin{cases} x' = c_{11}x + c_{12}y + x_0, \\ y' = c_{21}x + c_{22}y + y_0. \end{cases}$$

Если f – аффинное преобразование первого рода, то реперы R и R' имеют одну и ту же ориентацию, поэтому $\delta = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} > 0$, а если f – аффинное преобразование второго рода, то $\delta < 0$. Верна и обратная теорема.

Теорема 8. Если отображение f в аффинном репере $R = (A, B, C)$ задано аналитически системой

$$\begin{cases} x' = c_{11}x + c_{12}y + x_0, \\ y' = c_{21}x + c_{22}y + y_0, \end{cases}$$

где $\delta \neq 0$, то f – аффинное преобразование. При этом если $\delta > 0$ ($\delta < 0$), то f – аффинное преобразование первого (второго) рода.

5. Движения плоскости. Группа движений плоскости.

Определение 6. Движением (перемещением) называется преобразование f плоскости π в себя, при котором сохраняется расстояние между точками. Обозначим множество всех движений плоскости D_π.

Теорема 9. Множество всех движений плоскости D_π образует группу относительно операции композиции преобразований.

Доказательство: покажем, что множество D_π замкнуто относительно операции " $\circ$ " и операции перехода к обратному элементу.

1) Рассмотрим f и g – движения плоскости π. Тогда $f \circ g$ тоже движение и по определению операции композиции

$$(f \circ g)([AB]) = f\big(g([AB])\big).$$

Или в логической символике: $\forall f, g \in D_\pi, \Rightarrow \ (f \circ g) \in D_\pi$.

Т.к. f и g – движения, то при каждом из этих преобразований сохраняется расстояние между точками, поэтому $f \circ g$ – движение.

2. Для движения f рассмотрим обратное f^{-1}:

$|AB| = |A'B'|, \Rightarrow f^{-1}$ – тоже движение.

Таким образом, пара $(D_\pi, \circ)$ есть группа. ■

Следствие. Группа движений плоскости является подгруппой группы геометрических преобразований, т.е. $(D_\pi, \circ) \subset (G_\pi, \circ)$.

Рассмотрим примеры движений плоскости: параллельный перенос, поворот, осевую симметрию и др.

6. Параллельный перенос плоскости.

Определение 7. Параллельным переносом плоскости π на вектор $\vec{v}$ называется отображение $T_{\vec{v}}: \pi \to \pi$ по закону:

$$\forall M \in \pi \quad T_{\vec{v}}(M) = M' \Leftrightarrow MM' = \vec{v}.$$

Если $\vec{v} = \vec{0}$, то $T_{\vec{v}} = e$ (тождественное преобразование).

Из определения следует, что параллельный перенос сохраняет расстояние между точками, т.е. является движением.

Множество параллельных переносов плоскости образует группу относительно операции композиции, причём

$$T_{\vec{u}} \circ T_{\vec{v}} = T_{\overrightarrow{u+v}} \quad \text{и} \quad T_{\vec{v}}^{-1} = T_{-\vec{v}}.$$

Запишем аналитическое выражение параллельного переноса в аффинной системе координат.

Пусть дана точка $M(x, y)$, и задан вектор $\vec{v}(x_0, y_0)$ – вектор параллельного переноса. Тогда

$$T_{\vec{v}}(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} + \vec{v} = \overrightarrow{OM'}.$$

Тогда формула аналитического выражения параллельного переноса, которая представляет собой линейную невырожденную систему и имеет вид

$$T_{\vec{v}}: \begin{cases} x' = x + x_0, \\ y' = y + y_0. \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0,$$

из чего следует, что параллельный перенос есть аффинное преобразование первого рода и не меняет ориентацию плоскости.

7. Поворот (вращение) плоскости.

Определение 8. Пусть заданы точка O на плоскости π и число $\alpha \in (-\pi; \pi]$. На ориентированной плоскости определим отображение

$V_O^\alpha: \pi \to \pi$ (поворот вокруг точки O на угол α) по закону:

1) если $M = 0$, то $V_O^\alpha(M) = 0$, то есть точка O переходит в себя и является неподвижной точкой преобразования.

2) если $M \neq 0$, то $V_O^\alpha(M) = M'$: $|OM| = |OM'|$; $\left(\widehat{OM; OM'}\right) = \alpha$.

При этом точку O называют центром поворота, угол α – углом поворота. Поворот плоскости однозначно определяется центром и углом поворота.

Запишем *аналитическое задание поворота в декартовой системе координат.* Для этого выберем систему координат так, что её начало – точка O – центр поворота.

При повороте V_O^α точка $M(x,y)$ переходит в точку $M'(x',y')$. Выразим координаты образа через координаты прообраза. Обозначим:

$$|OM| = |OM'| = \rho,$$

$$\left(\widehat{\vec{i};\overrightarrow{OM'}}\right) = \varphi,$$

$$\left(\widehat{OM;OM'}\right) = \alpha.$$

Тогда координаты точки M удовлетворяют системе:

$$\begin{cases} x = \rho cos\varphi, \\ y = \rho sin\varphi. \end{cases}$$

А точка M' удовлетворяет условию:

$$\begin{cases} x' = \rho\ cos(\varphi + \alpha), \\ y' = \rho\ sin(\varphi + \alpha); \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = \rho\ cos\varphi cos\alpha - \rho\ sin\varphi sin\alpha, \\ y' = \rho\ sin\varphi cos\alpha + \rho\ cos\varphi sin\alpha. \end{cases}$$

Используя равенства из формулы для выражения координат точки M, получим формулу аналитического задания поворота в декартовой системе координат:

$$\begin{cases} x' = x\ cos\alpha - y\ sin\alpha, \\ y' = x\ sin\alpha + y\ cos\alpha. \end{cases}$$

Поворот задается невырожденной линейной системой уравнений, следовательно, является аффинным преобразованием плоскости, причём первого рода (не меняет ориентацию плоскости), так как

$$\begin{vmatrix} cos\alpha & -sin\alpha \\ sin\alpha & cos\alpha \end{vmatrix} = 1 > 0.$$

Поворот сохраняет расстояния между точками, а значит, является движением, то есть вращение плоскости – движение первого рода.

Замечание:

1) если $\alpha = 0$, то $V_O^\alpha = e$ – тождественное преобразование плоскости;

2) если $\alpha = \pi$, то $V_O^{\pi} = S_0$ – центральная симметрия относительно точки O.

Тогда формула *аналитического задания центральной симметрии относительно точки* O будет выглядеть следующим образом:

$$S_0 : \begin{cases} x' = x, \\ y' = -y\,. \end{cases}$$

Можно показать, что множество поворотов с одни и тем же центром образуют группу относительно операции композиция. Эта группа есть подгруппа множества движений плоскости, и обе они суть подгруппы группы преобразований плоскости: $(V_O^{\alpha}, \circ) \subset (D_{\pi}, \circ) \subset (G_{\pi}, \circ)$.

8. Осевая симметрия.

Определение 9. На плоскости π рассмотрим произвольную прямую l ($l \in \pi$) и определим отображение $S_l : \pi \to \pi$ следующим образом:

1) Если $M \in l$, то $S_l(M) = M$.

2) Если $M \notin l$, то $S_l(M) = M'$ и l – серединный перпендикуляр к отрезку $[MM']$.

При этом l называют осью симметрии, S_l – осевой симметрией (отображением) плоскости π относительно прямой l.

Рассмотрим декартову систему координат: $O\vec{\imath}\vec{\jmath}$, где $\vec{\imath} \in l$, и запишем *формулу аналитического задания осевой симметрии:*

$$S_l : \begin{cases} x' = x, \\ y' = -y\,. \end{cases}$$

Система является линейной невырожденной, т.к.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0,$$

значит, осевая симметрия является аффинным преобразованием плоскости ($S_l \subset A_{\pi}$). Так как значение этого определителя отрицательно, то ориентация всех реперов плоскости меняется, т.е. это преобразование второго рода.

Осевая симметрия сохраняет расстояние между точками, следовательно, является движением второго рода.

Рассмотренные виды движений: параллельный перенос ($T_{\vec{v}}$), поворот (V_O^{α}) и осевую симметрию (S_l), назовем *основными* и далее покажем, что любое движение плоскости можно представить в виде композиции основных движений, а значит, композиции основных аффинных преобразований плоскости.

Теорема 10. (поведение реперов при движении плоскости). При любом движении плоскости репер переходит в репер, в частности ортонормированный репер – в ортонормированный репер.

Пусть задано два произвольных ортонормированных репера плоскости $R = (A, B, C)$ и $R' = (A', B', C')$. Тогда существует одно и только одно движение, которое репер R переводит в репер R'. При этом движении любая точка M с данными координатами в репере R переходит в точку M' с теми же координатами в репере R'. То есть,

$$\forall R = (A, B, C) \text{ и } R' = (A', B', C') \ \exists!\, g: g(R) = R'.$$

$$M(x, y)_R \xrightarrow{g} M(x', y')_{R'}.$$

Такое отображение является преобразованием плоскости. Из способа задания следует сохранение расстояния между точками. ■

9. Аналитическое выражение произвольного движения в ортонормированном репере. Движения первого и второго рода.

Пусть g – движение, а $R = (A, B, C)$ – ортонормированный репер.

Выразим x' и y', используя формулы преобразования декартовой системы координат. Обозначим $\alpha = \left(\widehat{\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{A'B'}}\right)$. Известно, что:

1) если репер R одинаково ориентирован с репером R', т.е. $R \triangle R'$, то

$$\begin{cases} x' = x\, cos\alpha - y\, sin\alpha + x_0, \\ y' = x\, sin\alpha + y\, cos\alpha + y_0; \end{cases}$$

2) если репер R противоположно ориентирован с репером R', т.е. $R \overline{\triangle} R'$, то

$$\begin{cases} x' = x\,cos\alpha + y\,sin\alpha + x_0, \\ y' = x\,sin\alpha - y\,cos\alpha + y_0. \end{cases}$$

Эти формулы задают аналитическое выражение произвольного движения в ортонормированном репере.

Обе эти системы являются линейными. Составив определитель перехода от одного ортонормированного репера к другому, получим для первого и второго (одинаково и противоположно ориентированных реперов) соответственно:

1) $\begin{vmatrix} cos\alpha & -sin\alpha \\ sin\alpha & cos\alpha \end{vmatrix} = 1$ (отличен от нуля и положителен), в таком случае говорят, что задано движение первого рода;

2) $\begin{vmatrix} cos\alpha & sin\alpha \\ sin\alpha & -cos\alpha \end{vmatrix} = -1$ (отличен от нуля и отрицателен), в таком случае говорят, что задано движение второго рода.

Но такой подход не единственен, например, Атанасян Л.С. и Базылев В.Т. для описания движений используют понятие ортогональной матрицы, что является примечательным.

10. Геометрические свойства движений.

Так как любое движение является аффинным преобразованием плоскости, то, оно обладает всеми свойствами аффинных преобразований.

Движение обладает ещё дополнительными свойствами: из сохранения расстояний следует, что угол переходит в равный угол, значит, параллельные прямые перейдут в параллельные прямые, а взаимно перпендикулярные – во взаимно перпендикулярные; для трех точек прямой сохраняется отношение «лежать между».

11. Представление произвольного движения в виде композиции основных движений.

Обозначим g_1 – движение первого рода:

$$g_1: \begin{cases} x' = x\,cos\alpha - y\,sin\alpha + x_0, \\ y' = x\,sin\alpha + y\,cos\alpha + y_0. \end{cases}$$

Выпишем формулы задания основных движений:

$$V_O^\alpha: \begin{cases} \bar{x} = x\,cos\alpha - y\,sin\alpha, \\ \bar{y} = x\,sin\alpha + y\,cos\alpha; \end{cases}$$

$$T_{\vec{v}}: \begin{cases} x' = \bar{x} + x_0, \\ y' = \bar{y} + y_0. \end{cases}$$

Композиция поворота и параллельного переноса $T_{\vec{v}} \circ V_O^\alpha$ будет являться движением первого рода, т.е. $g_1 = T_{\vec{v}} \circ V_O^\alpha$.

Теперь обозначим g_2 – движение второго рода:

$$g_2: \begin{cases} x' = x\,cos\alpha + y\,sin\alpha + x_0, \\ y' = x\,sin\alpha - y\,cos\alpha + y_0. \end{cases}$$

Рассмотрим основные движения:

$$S_l: \begin{cases} \bar{x} = x, \\ \bar{y} = -y; \end{cases}$$

$$V_O^\alpha: \begin{cases} x = \bar{x}\,cos\alpha - \bar{y}\,sin\alpha, \\ y = \bar{x}\,sin\alpha + \bar{y}\,cos\alpha; \end{cases}$$

$$T_{\vec{v}}: \begin{cases} x' = x + x_0, \\ y' = y + y_0. \end{cases}$$

Аналогично случаю g_1, эти формулы задают поворот и параллельный перенос.

Композиция осевой симметрии, поворота и параллельного переноса $T_{\vec{v}} \circ V_O^\alpha \circ S_l$ будет являться движением второго рода, т.е.

$$g_2 = T_{\vec{v}} \circ V_O^\alpha \circ S_l. \blacksquare$$

Замечание: Полученные выражения g_1 и g_2 можно ещё упростить, используя понятия неподвижных точек.

Как уже было сказано, *неподвижной (инвариантной)* точкой преобразования называется точка, которая переходит сама в себя.

*Определение 10.*Прямую назовём *инвариантной (неподвижной)* прямой преобразования, если любая её точка переходит в точку этой же прямой.

Лемма. Если движение не имеет ни одной инвариантной точки, то оно имеет хотя бы одну инвариантную прямую.

Проведем классификацию движений в зависимости от наличия неподвижных точек и инвариантных прямых.

12. Классификация движений первого рода.

Если движение первого рода имеет единственную неподвижную точку, то это поворот вокруг этой точки.

Теорема 11. Движение $g_1 = T_{\vec{v}} \circ V_O^\alpha,\ \alpha \neq 0$ является поворотом плоскости вокруг какой либо точки P на некоторый угол β, т.е. $g_1 = V_P^\beta$. Можно показать, что $\beta = \alpha$.

Движения первого рода задаются формулой $g_1 = T_{\vec{v}} \circ V_O^\alpha$. Возможными видами движения являются:

1) пусть $\alpha = 0$, тогда $g_1 = T_{\vec{v}} \circ e = T_{\vec{v}}$:

а) $\vec{v} = \vec{0}$, тогда $g_1 = e$ – тождественное преобразование – все точки плоскости неподвижны;

б) $\vec{v} \neq \vec{0}$, тогда $g_1 = T_{\vec{v}}$ – параллельный перенос – неподвижных точек нет;

2) пусть $\alpha \neq 0$, тогда по последней теореме $g_1 = V_P^\beta$ – поворот вокруг точки P на угол β – единственная неподвижная точка.■

Частный случай: если $\alpha = \pi,\ O = P$, тогда $g_1 = S_O$ – центральная симметрия. Единственная неподвижная точка – центр симметрии.

13. Классификация движений второго рода

Движения второго рода задаются формулой $g_2 = T_{\vec{v}} \circ V_O^\alpha \circ S_l$.

Движение второго рода либо не имеет неподвижных точек, либо имеет их более одной. Движение второго рода, имеющее более одной неподвижной точки, является осевой симметрией.

Рассмотрим случай, когда g_2 не имеет неподвижных точек. Выделим композицию преобразований $g_2 = T_{\vec{v}} \circ (V_O^{\alpha} \circ S_d)$, обозначив её $\varphi = V_O^{\alpha} \circ S_d$, где точка $O \in d$.

Теорема 12. Композиция осевой симметрии и поворота

$$\varphi = V_O^{\alpha} \circ S_d \text{ (где } O \in d\text{)}$$

есть осевая симметрия S_l:

$$V_O^{\alpha} \circ S_d = S_l.$$

14. Скользящая симметрия.

Определение 11. Композиция $f = g_2 = T_{\vec{v}} \circ S_l$ при $\vec{v} \neq \vec{0}$ и $\vec{v} \parallel l$ называется *скользящей симметрией*. Можно показать, что любое движение второго рода, не имеющее неподвижных точек, является скользящей симметрией.

15. Преобразование подобия.

Определение 12. Преобразование плоскости называется *преобразованием подобия* или просто *подобием*, если существует такое число, что для любых двух точек A и B и их образов A' и B' выполняется равенство $A'B' = kAB$. Число k называется *коэффициентом подобия*.

При $k = 1$ преобразование подобия сохраняет расстояния, т. е. является движением. Следовательно, движение – частный случай преобразования подобия. Рассмотрим пример преобразования подобия, отличного от движения.

Определение 13. Зададим точку M_0 и действительное число $m \neq 0$. Каждой точке M плоскости поставим в соответствие точку M' так, чтобы

$$\overrightarrow{M_0M'} = m\overrightarrow{M_0\,M}. \qquad (1)$$

Такое отображение является преобразованием плоскости и называется *гомотетией.* Точка M_0 называется *центром гомотетии*, а число m – *коэффициентом гомотетии*.

Докажем, что гомотетия — преобразование подобия. Действительно, пусть M_1, M_2 – произвольные точки плоскости, а M_1' и M_2' – их образы. Из равенства (1) получаем: $\overrightarrow{M_0M_1'} = m\overrightarrow{M_0M_1}$, $\overrightarrow{M_0M_2'} = m\overrightarrow{M_0M_2}$, поэтому

$$\overrightarrow{M_1'M_2'} = m\overrightarrow{M_1M_2}. \qquad (2)$$

Отсюда получаем: $\left|\overrightarrow{M_1'M_2'}\right| = |m| \cdot \left|\overrightarrow{M_1M_2}\right|$ или $M_1'M_2' = |m| \cdot M_1M_2$. Таким образом, гомотетия с коэффициентом m является преобразованием подобия с коэффициентом подобия $k = |m|$.■

При $m = 1$ из равенства (1) получаем: $\overrightarrow{M_0M'} = \overrightarrow{M_0M}$. Отсюда следует, что любая точка M плоскости совпадает с ее образом, т. е. гомотетия с коэффициентом $m = 1$ является *тождественным преобразованием*. При $m = -1$ из равенства (1) получаем, что гомотетия – *центральная симметрия*. В остальных случаях (т. е. когда $|m| \neq 1$) гомотетия – *преобразование подобия, отличное от движения*, т. е. преобразование плоскости, не сохраняющее расстояния между точками.

Выберем ортонормированный репер $R = (A, B, C)$ так, чтобы точка A совпала с центром гомотетии. Если $M(x, y)$ – произвольная точка плоскости, а точка $M'(x', y')$ – ее образ, то из формулы (1) получаем аналитическое выражение гомотетии:

$$\begin{cases} x' = mx, \\ y' = my. \end{cases} \qquad (3)$$

Геометрические свойства гомотетии.

1. Гомотетия с коэффициентом $m \neq 1$ переводит прямую, не проходящую через центр гомотетии, в параллельную ей прямую, а прямую, проходящую через центр гомотетии, – в себя.
2. Гомотетия сохраняет простое отношение трех точек.
3. Гомотетия переводит угол в равный ему угол.
4. Гомотетия сохраняет ориентацию плоскости.

Можно доказать, что если f_1и f_2 – преобразования подобия с коэффициентами k_1, и k_2, то f_2f_1 – преобразование подобия с коэффициентом k_2k_1.

Теорема 13. Пусть f – преобразование подобия с коэффициентом k, а h – гомотетия с тем же коэффициентом k и с центром в произвольной точке M_0. Тогда существует одно и только одно движение g такое, что

$$f = gh. \qquad (4)$$

Гомотетия обладает всеми указанными свойствами движений. Предыдущая теорема позволяет заключить, что и преобразование подобия обладает теми же свойствами. Следовательно, имеет место утверждение: преобразование подобия прямую переводит в прямую, параллельные прямые – в параллельные прямые, сохраняет простое отношение трех точек, полуплоскость переводит в полуплоскость, отрезок – в отрезок, луч – в луч. Преобразование подобия угол переводит в равный ему угол, а перпендикулярны е прямые – в перпендикулярны е прямые.

Следует отметить, что определение преобразования подобия не конструктивно, отчасти преобразование гомотетии исправляет это.

Любое преобразование подобия либо сохраняет ориентацию плоскости, либо меняет ее ориентацию. В первом случае оно называется *преобразованием подобия первого рода*, а во втором случае – *преобразованием подобия второго рода*.

Аналитическое выражение преобразования подобия. Пусть f – преобразование подобия с коэффициентом k. Выберем прямоугольную систему координат $O\vec{i}\vec{j}$. Рассмотрим гомотетию h с центром O и коэффициентом k и воспользуемся предыдущей теоремой. Пусть g – движение, удовлетворяющее равенству (4). Запишем в системе $O\vec{i}\vec{j}$ аналитические выражения преобразований h и g:

$$h\colon \begin{cases} \tilde{x} = mx, \\ \tilde{y} = my; \end{cases}$$

$$g\colon \begin{cases} x' = \tilde{x}\, cos\alpha + \varepsilon\tilde{y}\, sin\alpha + x_0, \\ y' = \tilde{x}\, sin\alpha + \varepsilon\tilde{y}\, cos\alpha + y_0. \end{cases}$$

Таким образом, если $M(x, y)$ – произвольная точка плоскости, а $M'(x', y')$ – ее образ в преобразовании $f = gh$, то

$$\begin{cases} x' = kx\,cos\alpha + \varepsilon\,ky\,sin\alpha + x_0, \\ y' = kx\,sin\alpha + \varepsilon\,ky\ \ cos\alpha + y_0; \end{cases}$$

Где $\varepsilon = 1$, если f – преобразование подобия первого рода и $\varepsilon = -1$, если f – преобразование подобия второго рода.

Теорема 14. Любое преобразование подобия, отличное от движения, имеет одну и только одну неподвижную точку.

Следствие. Любое преобразование подобия, имеющее более чем одну неподвижную точку или не имеющее неподвижных точек, является движением.

Используя предыдущую теорему и ее следствие, можно провести классификацию преобразований подобия в зависимости от наличия неподвижных точек и инвариантных прямых. Множество всех преобразований подобия образует группу, называемую *группой преобразований подобия* плоскости или, короче, *группой подобий.*

Любое преобразование подобия переводит угол в равный ему угол и, следовательно, сохраняет меру угла. Мера угла – основной инвариант группы преобразований подобия. Так как любое движение является преобразованием подобия, то группа движений является подгруппой группы подобия.

КЛАССИФИКАЦИЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ПОДОБИЯ ПЛОСКОСТИ

	ПОДОБИЯ П РОДА			ПОДОБИЯ I РОДА					
	Подобия П рода, отличные от движения **центрально-подобная симметрия**	ДВИЖЕНИЯ							Подобия I рода,отличные от движения и гомоте-тии – **центрально-подобное вращение**
		ДВИЖЕНИЯ П РОДА		ДВИЖЕНИЯ I РОДА					
						ГОМОТЕТИЯ			
Названия преобр.		**Осевая симметрия**	**Скользящая симметрия**	**Параллельный перенос**	**Вращение**	**Тождеств. преобразов.**	**Центральн. симметрия**	**Гомотетия,** отличная от движения	
Обозначение	$P_k = S_d * H^k_o$, $0 < k \neq 1$, $O \in d$	S_d	$T_v * S_d$, $v \neq 0$, $v \parallel d$	T_v, $v \neq 0$	V^{α}_o, $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq \pi$	**e**	$S_o = V^{\pi}_o = H^{-1}_o$	H^m_o, $\lvert m \rvert \neq 1$	$P_k = V^{\alpha}_o * H^k_o$, $0 < k \neq 1$, $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq \pi$
	Единственная неподвижная точка	Все точки оси симметрии неподвижны	Нет неподвижных точек	Нет неподвижных точек	Единственная неподвижная точка	Все точки плоскости неподвижны	Единственная неподвижная точка		
	1	2	3	4	5	6	7	8	9