Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«АРМАВИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Институт прикладной информатики, математики и физики
Кафедра математики, физики и методики их преподавания

Методы решения олимпиадных задач по теме «Алгебра и начала анализа»

Составители: доцент кафедры математики, физики и МП, Козлов В.А.

Армавир, 2020

Содержание

Введение

Актуальность работы. Выявление познавательных интересов и потребностей учащихся необходимо для развития математических способностей обучающихся, особенно для математически одаренных школьников, развивает интерес к математике, создает условия для повышения мотивации к обучению математике.

Цель работы: разработать методические рекомендации по теме «Алгебра и начала анализа» для участников математических олимпиад (9-11 классы) и их использование в практической работе.

1. Тригонометрические уравнения

Тригонометрические уравнения входят во множество трансцендентных уравнений.

Известно, что лишь в частных случаях трансцендентные уравнения могут быть решены элементарными средствами, т.е. путем последовательного выполнения конечного числа арифметических действий и элементарных операций над числами (коэффициентами, параметрами и т.п.).

При решении тригонометрических уравнений $f(x) = 0$ важную роль играет понятие периода T функции f. Напомним его определение.

Пусть дана функция $y = f(x)$ с областью определения X. Функция f называется периодической с периодом $T \neq 0$, если для любого $x \in X$ числа $x - T$ и $x + T$ также принадлежит множеству X, причем $f(x - T) = f(x + T) = f(x)$.

Можно показать, что если T - период функции f, то и $kT, k \in Z$ также период этой функций.

Наименьший положительный период функции называется ее основным периодом.

Для функций $y = \cos x$ и $y = \sin x$ такой период равен 2π, а для функций $y = tgx$ и $y = ctgx$ он равен π.

Для функций $y = \sin(kx + b)$ и $y = cos(kx + b)$ этот период равен $\frac{2\pi}{k}$, а для функций $y = tg(kx + b)$ $y = ctg(kx + b)$ - $\frac{\pi}{k}$.

Если тригонометрическое уравнение $f(x) = 0$ содержит различные тригонометрические функции, но с одним и тем же периодом T, то T- период функции f.

Если же периоды $T_1, T_2, \cdots, T_k$, входящих в уравнение $f(x) = 0$ функций, различны, то период T функции f можно найти как наименьшее общее кратное чисел $T_1, T_2, \cdots, T_k$: $T =$ НОК $(T_1, T_2, \cdots, T_k)$.

При этом T необязательно окажется ее основным периодом.

Примеры. Найти периоды функций f для уравнений:

a) $\sin x + cos2x + sin3x + cos4x = 0;$

Решение.

$$T_1 = 2\pi, T_2 = \pi, T_3 = \frac{2\pi}{3}, T_4 = \frac{\pi}{2}$$

$$T = \text{НОК}\left(2\pi, \pi, \frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right) = \text{НОК}\left(12 \cdot \frac{\pi}{6} \cdot ,6 \cdot \frac{\pi}{6}, 4 \cdot \frac{\pi}{6}, 3 \cdot \frac{\pi}{6}\right) = 12 \cdot \frac{\pi}{6} = 2\pi.$$

b) $\sin x \cdot \cos x = 1$

Решение.

$$T_1 = T_2 = 2\pi$$

Поэтому и $T = 2\pi$. Но это – не основной период. Действительно, данное уравнение равносильно уравнению $\frac{1}{2}\sin 2x = 1$. $y = \sin 2x$ имеет период, равный π, он и будет основным периодом для $y = \sin x \cdot \cos x$.

В том, что π – период для $y = \sin x \cdot \cos x$, можно убедится и проверить: $\sin(x - \pi) \cdot \cos(x - \pi) = \sin(x + \pi) \cdot \cos(x + \pi) = -\sin(-\cos x) = \sin x \cdot \cos x$.

Понятие периода T функции f при решении тригонометрических уравнений $f(x) = 0$ используется следующим образом.

Для отыскания множества всех решений тригонометрического уравнения $f(x) = 0$ достаточно найти сначала множество всех его решений на каком-либо открытом справа промежутке, длина которого равна периоду T функции f а уже затем, используя периодичность тригонометрических функций, указать множество всех его решений на всей области определения функции f.

Если, например, на рассматриваемом промежутке данное уравнение имеет единственное решение x_0, то множество всех его решений можно представить формулой $x = x_0 + kT$, где $k \in Z$, или записать в виде $X = \{x_0 + kT/k \in Z\}$, или просто $\{x_0 + kT/k \in Z\}$.

Если же на этом промежутке данное уравнение имеет не одно, а $n > 1$ решений $(n \in N)$, то множество всех его решений на всей области определения функции f будет являться объединение полученных n множеств решений: $X = X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_n$.

В дальнейшем, в целях экономим места при записи ответов, в случаях, когда буквы $k, l, m, n, \cdots$ означают целые числа, указания:

"$k \in Z$"("$l \in Z$" $\cdots$) мы будем опускать, т.е. ответы будем записывать в виде: $x = x_0 + kT$, или $X = \{x_0 + kT\}$, или $\{x_0 + kT\}$.

Решение тригонометрических уравнений, разрешимых элементарными средствами, после ряда преобразований сводятся к решению основных тригонометрических уравнений.

Под основными тригонометрическими уравнениями понимают уравнения вида $f(x) = m$, где f – данная тригонометрическая функция, а $m \in R$.

Рассмотрим такие уравнения и для каждого из них приведем графическую иллюстрацию формул общего решения е использованием числовой окружности и графика соответствующей тригонометрической функции.

I. Формулы решений основных тригонометрических уравнений.

I. $\sin x = m$;

Если $|m| > 1$,то уравнение решений не имеет.

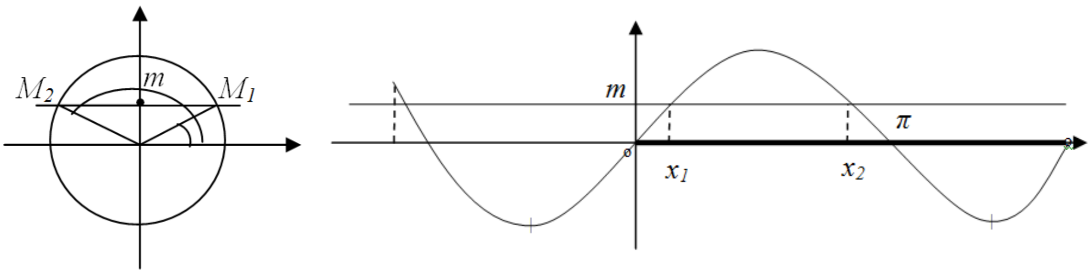
Пусть $|m| \le 1$. Так как период T синуса равен 2π, то найдем сначала решение данного уравнения на промежутке $[0; 2\pi[$.

С этой целью рассмотрим, например, числовую окружность.

По определению, $\sin x$ – это ордината точки t числовой окружности, соответствующей числу X. Отметим на числовой окружности точки, имеющие ординату, равную (точки M_1, и M_2). Эти точки и дают нам на промежутке$[0; 2\pi[$ искомые решения:

$$x_1 = \arcsin m \, , x_2 = \pi - \arcsin m.$$

На графике прямая $y = m$ пересекла синусоиду при $0 \le x < 2\pi$ в двух точках: A_1, и A_2.



Первое из найденных решений порождает на всей области определения синуса серию решений, определяемую формулой: $x = \arcsin m + 2\pi k$, а второе – серию, определяемую формулой: $x = \pi - \arcsin m - 2\pi k = -\arcsin m + \pi(2k + 1)$.

Эти две формулы можно представить одной формулой общего решения уравнения $\sin x = m$ следующим образом: $x = (-1)^n \arcsin m + \pi k$.

Действительно, при $n = 2k$ она имеет вид первой формулы, а при $n = 2k + 1$ – второй.

Частные случаи:

1. $\sin x = 0, x = \pi k;$
2. $\sin x = 1, x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi;$
3. $\sin x = -1, x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k.$

Примеры. Решить уравнения:

1. $\sin x = \frac{1}{2}, x = (-1)^n \arcsin\frac{1}{2} + \pi n = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n;$
2. $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}, x = (-1)^n \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \pi n = (-1)^n\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \pi n =$ $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{3} + \pi n.$

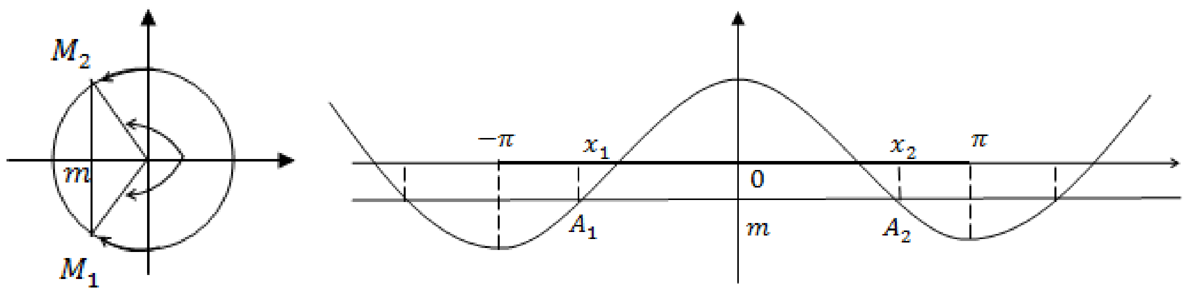
II. $\cos x = m$

Если $|m| > 1$, то уравнение решений не имеет.

Пусть $|m| \le 1$. Так как период T косинус равен 2π, то найдем сначала решение этого уравнения на промежутке $[-\pi, \pi[$.

На числовой окружности в пределах рассматриваемого промежутка находим два его решения $x_1 = \arccos m$ и $x_2 = -\arccos m$. ($\cos x$ – это абсцисса точки t числовой окружности, соответствующей числу x)

На графике прямая $y = m$ пересекла косинусоиду при $-\pi \le x \le \pi$ в двух точках: A_1и A_2.



Первое из найденных решений порождает на всей области определения косинуса серию решений, определяемой формулой $x = -\arccos m + 2\pi k$, а второе – серию, определяемую формулой: $x = \arccos m + 2\pi k$.

Эти две формулы можно представить одной формулой общего решения уравнения $\cos x = m$ следующим образом: $x = \pm\arccos m + 2\pi k$.

Частные случаи:

1. $\cos x = 0, x = \frac{\pi}{2} + \pi k;$
2. $\cos x = 1, x = 2k\pi;$
3. $\cos x = -1, x = -\pi + 2\pi k.$

Примеры. Решить уравнения:

1. $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}, x = \pm\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} + 2\pi k = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi k;$
2. $\cos x = -\frac{1}{2}, x = \pm\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi k = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k.$

III. $\operatorname{tg} x = m$

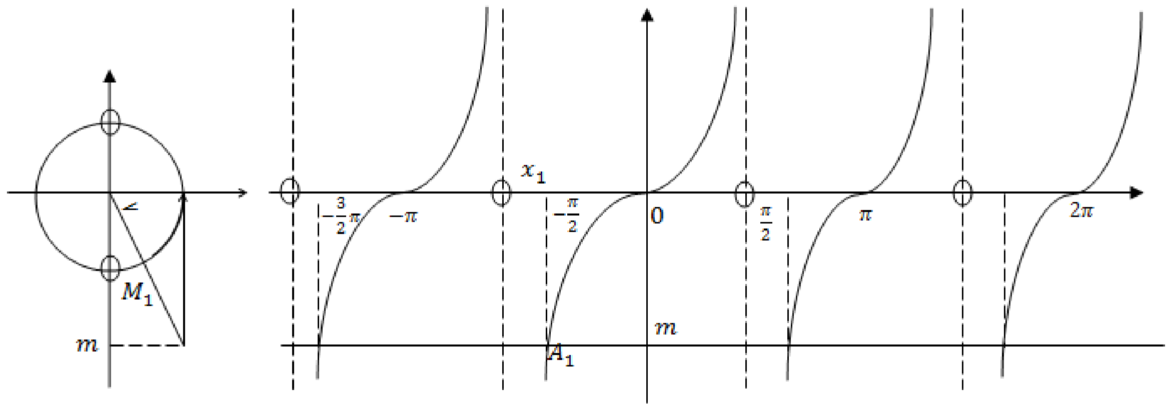
Данное уравнение разрешимо для любого m.

Так как период T тангенса равен π, то найдем сначала решение этого уравнения на промежутке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$. (Заметим, что при $x = -\frac{\pi}{2}$ тангенс не существует)

На числовой окружности в пределах рассматриваемого промежутка оно имеет единственное решение $x_1 = \operatorname{arctg} m$.

На графике прямая $y = m$ пересекает тангенсоиду при $-\frac{\pi}{2} \leq x < \frac{\pi}{2}$ в единственной точке A_1.

Найденное нами на промежутке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ единственное решение данного уравнения позволяет записать общую формулу решения уравнения $\operatorname{tg} x = m$ в виде: $x = \operatorname{arctg} m + \pi k$.



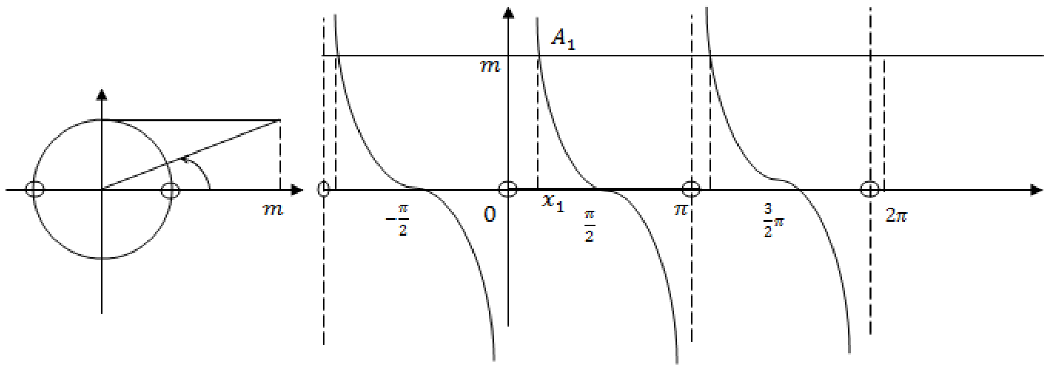
IV. $\operatorname{ctg} x = m$

Данное уравнение разрешимо для любого m.

Так как период котангенса равен π, то найдем сначала решение этого уравнения на промежутке $[0; \pi[$. (Заметим, что при $x = 0$ котангенс не существует)

На числовой окружности в пределах рассматриваемого промежутка оно имеет единственное решение $x_1 = \operatorname{arcctg} m$.

На графике прямая $y = m$ пересекает котангенсоиду при $0 \leq x < \pi$ в единственной точке A_1.



Поэтому общая формула решения уравнения: $\operatorname{cctg} x = m$ имеет вид:

$$x = \operatorname{arcctg} m + \pi k$$

Примеры. Решить уравнение:

1. $\operatorname{ctg} x = 0, x = \operatorname{arcctg} 0 + \pi k = \frac{\pi}{2} + \pi k;$
2. $\operatorname{ctg} x = \sqrt{3}, x = \operatorname{arcctg} \sqrt{3} + \pi k = \frac{\pi}{6} + \pi k;$
3. $\operatorname{ctg} x = -1, x = \operatorname{arcctg}(-1) + \pi k = \frac{3\pi}{4} + \pi k.$

2. Методы решения некоторых тригонометрических уравнений.

1. Уравнения вида $\sin\big(f(x)\big)$ и аналогичные им.

Примеры. Решить уравнения:

а) $2\sin(x - \frac{\pi}{4}) - \sqrt{3} = 0.$

Решение.

$$2\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow 2\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{4}$$
$$= (-1)^k \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} + \pi k = (-1)^k \frac{\pi}{3} + \pi k \Leftrightarrow x$$
$$= \frac{\pi}{4} + (-1)^k \frac{\pi}{3} + \pi k.$$

Ответ. $\left\{\frac{\pi}{4} + (-1)^k \frac{\pi}{3} + \pi k\right\}.$

б) $\cos(0{,}5x - 5) + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.$

Решение.

$$\cos(0{,}5x - 5) + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \Leftrightarrow \cos(0{,}5x - 5) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow 0{,}5x - 5$$
$$= \pm\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2\pi k \Leftrightarrow x = 10 \pm \frac{5\pi}{3} + 4\pi k.$$

Ответ. $\left\{10 \pm \frac{5\pi}{3} + 4\pi k\right\}.$

в) $\operatorname{tg}(x^2 - 2) = \frac{1}{\sqrt{3}}.$

Решение.

$$\operatorname{tg}(x^2-2)=\frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x^2-2=\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}+\pi k \Leftrightarrow x^2=2+\frac{\pi}{6}+\pi k$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2+\geq 0 \\ x=\pm\sqrt{2}+\frac{\pi}{6}+\pi k \end{cases} \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{2+\frac{\pi}{6}+\pi k}, \text{где } k=0,1,2\cdots$$

$\left\{\pm\sqrt{2+\frac{\pi}{6}+\pi k}\ /k=0,1,2\cdots\right\}$.

2. Уравнения вида $f(\sin u)=0$, где $u=\varphi(x)$ и аналогичные им.

Пример. Решить уравнение:

$$5\sin^2\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+3\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=3.$$

Решение. Данное уравнение равносильно уравнению:

$$5\left(1-\cos^2\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)\right)+3\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)-3=0 \Leftrightarrow \begin{cases}\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=t \\ 5t^2-3t-2=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=t \\ \left[\begin{array}{l} t=-\frac{2}{5} \\ t=1 \end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases}\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=t \\ t=-\frac{2}{5}\end{cases} \\ \begin{cases}\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=t \\ t=1\end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{2}{5} \\ \cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x+\frac{\pi}{6}=\pm\arccos(-\frac{2}{5})+2\pi k \\ 2x+\frac{\pi}{6}=\pm\arccos 1+2\pi n \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x=-\frac{\pi}{6}\pm\left(\pi-\arccos\frac{2}{5}\right)+2\pi k \\ 2x=-\frac{\pi}{6}+2\pi n \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{\pi}{12}\pm\frac{\pi}{2}\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{2}{5}+\pi k \\ x=-\frac{\pi}{12}+\pi n \end{array}\right.$$

Ответ. $\left\{-\frac{\pi}{12}\pm\frac{\pi}{2}\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{2}{5}+\pi k\right\}\cup\left\{-\frac{\pi}{12}+\pi n\right\}$.

3. Уравнения $f(x)=0$, решаемые разложением левой части на множители.

Как известно, если $f(x)=\varphi_1(x)\cdot\varphi_2(x)\cdot\cdots\cdot\varphi_k(x)$, то уравнение $f(x)=0$ равносильно совокупности уравнений:

$$\left[\begin{array}{l}\varphi_1(x)=0\\ \varphi_2(x)=0\\ \quad\vdots\\ \varphi_л(x)=0\end{array}\right.$$

в области определения данного уравнения. Поэтому, найдя решение каждого из уравнений $\varphi_i(x)=0, i,=1,2,\cdots,k$, надо отбросить те из них, при которых хотя бы одно из выражений $\varphi_i(x)$ теряет смысл. Объединение оставшихся решений и будет решением данного уравнения.

Пример. Решить уравнение:

а) $2\sin^2 x+\cos x=2\sin^2 x\cdot\cos x+1.$

Решение. Данное уравнение равносильно уравнению:

$$2\sin^2 x\cdot(1-\cos x)-(1-\cos x)=0 \Leftrightarrow (1-\cos x)\cdot(2\sin^2 x-1)=0$$

$$\Leftrightarrow (1-\cos x)\cos 2x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=1\\ \cos 2x=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=2\pi k\\ x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{2}n\end{array}\right.$$

Ответ. $\{2\pi k\}\cup\left\{\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}n\right\}$.

б) $\sin 2x\cdot\cos x\cdot\operatorname{tg} x=0$

Решение. Данное уравнение равносильно конструкции уравнений и неравенств:

$$\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}\sin 2x=0,\\ \cos x=0,\\ \operatorname{tg} x=0,\end{array}\right.\\ x\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi k\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{2}l,\\ x=\dfrac{\pi}{2}+\pi m,\\ x=\pi n,\end{array}\right.\\ x\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi k\end{array}\right. \Leftrightarrow x=\pi n$$

Так как при $l=2n+1$ решения первого уравнения и все решения второго уравнения не входят в область определения данного уравнения, а решения третьего уравнения содержатся среди решений первого (при $l=2n$).

Ответ.$\{\pi n\}$.

в) $\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\sin 4x=0.$

Решение. Применяя формулу преобразования суммы тригонометрических функций в произведение, получим равносильное данному уравнению:

$$2\sin 2x\cdot\cos x+2\sin 3x\cdot\cos x=0 \Leftrightarrow \cos x\,(\sin 2x+\sin 3x)=0 \Leftrightarrow$$

$$\cos x\cdot\sin\frac{5}{2}x\cdot\cos\frac{x}{2}=0 \Leftrightarrow \begin{array}{c}\cos x=0\\ \sin\frac{5}{2}x=0\\ \cos\frac{x}{2}=0\end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c}x=\frac{\pi}{2}+\pi n\\ x=\frac{2\pi}{5}n\\ x=\pi+2\pi m\end{array}$$

Ответ.$\left\{\frac{\pi}{2}+\pi n\right\}\cup\left\{\frac{2\pi}{5}n\right\}\cup\{\pi+2\pi m\}$.

4. Уравнения, однородные относительно $\sin x$ и $\cos x$.

Рассмотрим однородные относительно $\sin x$ и $\cos x$ уравнения:

$$a_n \cdot \sin^{\mathrm{n}} x + a_{n-1} \sin^{\mathrm{n}-1} x \cdot \cos x + \cdots + a_1 \cdot \sin x \cdot \cos^{\mathrm{n}-1} x + a_0 \cdot \cos^{\mathrm{n}} x = 0.$$

Если $a_n \neq 0$, то $\cos x \neq 0$, ибо в противном случае для найденных значений x и $\sin x = 0$, что невозможно, так как синус и косинус ни при каком значении x одновременно в нуль не обращаются.

Разделив обе части такого уравнения на $\cos^{\mathrm{n}} x$, получим равносильное ему уравнение:

$$a_n \cdot \mathrm{tg}^{\mathrm{n}} x + a_{n-1} \mathrm{tg}^{\mathrm{n}-1} x + \cdots + a_1 \cdot \mathrm{tg}\, x + a_0 = 0.$$

То есть решение однородного относительно $\sin x$ и $\cos x$ уравнения свелось к решению алгебраических (относительно $\mathrm{tg}\, x$) уравнения. Если $a_n = a_{n-1} = \cdots = a_{k+1} = 0$, но $a_k \neq 0$, то однородное уравнение имеет вид:

$$a_k \sin^{\mathrm{k}} x \cdot \cos^{\mathrm{n-k}} x + a_{k-1} \sin^{k-1} x \cdot \cos^{\mathrm{n-k+1}} x + \cdots + a_1 \cdot \sin x \cdot \cos^{\mathrm{n}-1} x + a_0 \cdot \cos^{\mathrm{n}} x = 0$$
$$\Leftrightarrow \cos^{\mathrm{n-k}} x \left(a_k \sin^{\mathrm{k}} x + a_{k-1} \sin^{k-1} x + \cdots + a_1 \cdot \sin x \cdot \cos^{\mathrm{k}-1} x + a_0 \cdot \cos^{\mathrm{k}} x\right) = 0.$$

Это уравнение равносильно такой совокупности уравнений:

$$\left[\begin{array}{c} \cos^{\mathrm{n-k}} x = 0 \\ a_k \sin^{\mathrm{k}} x + a_{k-1} \sin^{k-1} x + \cdots + a_1 \cdot \sin x \cdot \cos^{\mathrm{k}-1} x + a_0 \cdot \cos^{\mathrm{k}} x = 0 \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} \cos x = 0 \\ a_k \cdot \mathrm{tg}^{\mathrm{k}} x + a_{k-1} \mathrm{tg}^{\mathrm{k}-1} x + \cdots + a_1 \cdot \mathrm{tg}\, x + a_0 = 0 \end{array}\right.\cdot$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \mathrm{tg}\, x = 1, \\ \mathrm{tg}\, x = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} x = \dfrac{\pi}{4} + \pi k, \\ x = \mathrm{arctg}\, 3 + \pi m \end{array}\right..$$

Ответ. $\left\{\frac{\pi}{4} + \pi k\right\} \cup \{\mathrm{arctg}\, 3 + \pi m\}$.

5. Уравнения, сводимые к однородным относительно $\sin x$ и $\cos x$.

Примеры. Решить уравнения:

а) $3 \sin^2 x + 2\sqrt{3} \sin x \cos x + \cos^2 x = 3$.

Решение. Умножив правую часть уравнения на выражение $\sin^2 x + \cos^2 x$, тождественно равно единице, получим равносильное данному уравнению:

$$3 \sin^2 x + 2\sqrt{3} \sin x \cos x + \cos^2 x = 3 \sin^2 x + 3 \cos^2 x$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{3} \sin x \cos x - \cos^2 x = 0 \Leftrightarrow \cos x \left(\sqrt{3} \sin x - \cos x\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} \cos x = 0, \\ \sqrt{3} \sin x - \cos x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0, \\ \mathrm{tg}\, x = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k, \\ x = \dfrac{\pi}{6} + \pi m \end{array}\right..$$

Ответ. $\left\{\frac{\pi}{2} + \pi k\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{6} + \pi m\right\}$.

б) $\sin 2x = \cos 2x - \sin^2 x + 1$

Решение. Так как $\sin 2x = 2\sin x\cos x$, $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ и $1 - \sin^2 x = \cos^2 x$, то придем к такому, равносильному данному, уравнению:

$2\sin x\cos x = \cos^2 x - \sin^2 x + \cos^2 x \Leftrightarrow 2\sin x\cos x = 2\cos^2 x - \sin^2 x \Leftrightarrow \mathrm{tg}^2\, x + 2\,\mathrm{tg}\, x - 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\mathrm{tg}\, x = -1 - \sqrt{3},\\ \mathrm{tg}\, x = -1 + \sqrt{3}\end{array}\right. \Leftrightarrow$

$\left[\begin{array}{l} x = -\mathrm{arctg}\,\left(1 + \sqrt{3}\right) + \pi k,\\ x = \mathrm{arctg}\,\left(\sqrt{3} - 1\right) + \pi m\end{array}\right.$

Ответ.$\left\{-\mathrm{arctg}\,\left(1+\sqrt{3}\right) + \pi k\right\} \cup \left\{\mathrm{arctg}\,\left(\sqrt{3} - 1\right) + \pi m\right\}$.

в) $\sin 3x = 2\cos^3 x$

$$\sin 3x = 2\cos^3 x \Leftrightarrow 3\sin x\cos^2 x + 3\sin^3 x = 2\cos^3 x \Leftrightarrow \mathrm{tg}^3\, x - 3\,\mathrm{tg}\, x + 2$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\mathrm{tg}\, x = 1,\\ \mathrm{tg}\, x = -2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} x = \frac{\pi}{4} + \pi k,\\ x = -\mathrm{arctg}\, 2 + \pi m\end{array}\right..$$

6. Уравнения, решаемые применением формул приведения или теорем сложения.

Примеры. Решить уравнения:

а) $3\sin\left(\frac{\pi}{3} + 2x\right) = 4\sin\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right)$

Решение. Так как $\frac{\pi}{6} - 2x = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{3} + 2x\right)$, то данное уравнение равносильно уравнению:

$$3\sin\left(\frac{\pi}{3} + 2x\right) = 4\sin\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{3} + 2x\right)\right) \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{3} + 2x\right) = \frac{4}{3}\cos\left(\frac{\pi}{3} + 2x\right)$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{3} + 2x\right) = \frac{4}{3} \Leftrightarrow \frac{\pi}{3} + 2x = \mathrm{arctg}\frac{4}{3} + \pi k \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{4}{3} + \frac{\pi}{2}k$$

Ответ.$\left\{-\frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{4}{3} + \frac{\pi}{2}k\right\}$.

б) $2\sin x + \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = 0$

Решение. Сведем данное уравнение ему равносильному:

$$2\sin x + \sin\frac{\pi}{3}\cos x - \cos\frac{\pi}{3}\sin x = 0 \Leftrightarrow 2\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x = 0$$

$$\Leftrightarrow 3\sin x = -\sqrt{3}\cos x \Leftrightarrow \mathrm{tg}\, x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + \pi k.$$

Ответ.$\left\{-\frac{\pi}{6} + \pi k\right\}$.

7. Уравнения, решаемые способом преобразования произведения тригонометрических функций в сумму.

Пример. Решить уравнение:

$$\cos 3x \cos x = \cos 7x \cos 5x$$

Решение. Преобразовав обе части уравнения по соответствующим формулам, получим такое, равносильное данному, уравнение:

$$\frac{1}{2}(\cos 4x + \cos 2x) = \frac{1}{2}(\cos 12x + \cos 2x) \Leftrightarrow \cos 12x - \cos 4x = 0 \Leftrightarrow$$

$$-2\sin 8x \sin 4x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin 8x = 0,\\ \sin 4x = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \frac{\pi}{8}k,\\ x = \frac{\pi}{4}k\end{array}\right. \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8}k$$

Так как все решения второго уравнения входят во множество решений первого (при $k = 2m$).

Ответ.$\left\{\frac{\pi}{8}k\right\}$.

8. Тригонометрические уравнения, решаемые при помощи условий равенства двух однородных функций.

Известно, что

1. Если $\sin u = \sin v$, то $u = (-1)^k v + \pi k$
2. Если $\cos u = \cos v$, то $u = \pm v + 2\pi k$
3. Если $\operatorname{tg} u = \operatorname{tg} v$, то $u = v + \pi k$
4. Если $\operatorname{ctg} u = \operatorname{ctg} v$, то $u = v + \pi k$

Примеры. Решить уравнения:

а) $\sin x = \sin\left(\frac{\pi}{4} - k\right)$

Решение. Применяя первое из указанных условий, получим равносильное данному, уравнение:

$$x = (-1)^k\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + \pi k \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = (-1)^{2n}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + 2\pi n,\\ x = (-1)^{2n+1}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + \pi(2n+1)\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} - x + 2\pi n,\\ x = x - \frac{\pi}{4} + \pi(2n+1)\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{8} + \pi n,\\ \frac{\pi}{4} = \pi(2n+1)\end{array}\right. \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + \pi n$$

Ответ.$\left\{\frac{\pi}{8} + \pi n\right\}$.

б) $\cos 6x = \cos 4x$

Решение. Второе условие сводит данное уравнение к ему равносильному уравнению:

$$6x = \pm 4x + 2\pi k \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 6x = 4x + 2\pi k,\\ 6x = -4x + 2\pi k\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pi k,\\ x = \frac{\pi}{5}k\end{array}\right. \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{5}k$$

Так как множество решений первого уравнения содержится во втором (при $k = 5n$).

Ответ. $\left\{\frac{\pi}{5}k\right\}$.

в) $\operatorname{tg}(2x+1)+\operatorname{tg}x=0$

Решение. Данное уравнение заменим равносильным ему уравнением:

$$\operatorname{tg}(2x+1)=\operatorname{tg}(-x)\Leftrightarrow 2x+1=-x+\pi k\Leftrightarrow x=-\frac{1}{3}+\frac{\pi}{3}k$$

Ответ. $\left\{-\frac{1}{3}+\frac{\pi}{3}k\right\}$.

Замечание. Каждое из этих уравнений можно было бы решить и методом преобразования суммы (разности) тригонометрических функций в произведение.

9. Решение уравнений с помощью универсальной подстановки $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=u, u=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, причем $x\neq\pi(2k+1)$.

Поэтому всякое уравнение вида: $R(\sin x,\cos x,\operatorname{tg}x,\operatorname{ctg}x)=0$ рациональное относительно тригонометрических функций одного и того же аргумента, сводится к рациональному относительно u уравнению $R(u)=0$, где $u=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

Решив это уравнение и проверив непосредственной подстановкой в исходное уравнение значения $x=\pi(2k+1)$ (в этом случае $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ не существует и уравнение $R(u)=0$ таких решений не дает), объединим все найденные решения. Это объединение и будет решением данного уравнения.

10. Уравнения вида $a\sin x+b\cos x=c$

Будем считать, что ни одно из чисел a, b или c не равно нулю, так как в противном случае это уравнение примет вид, способы решения которого были изложены выше.

Рассмотрим два основных метода решения такого уравнения.

1. Метод введения вспомогательного угла.

Разделив почленно обе части данного уравнения на, получим равносильное ему уравнение:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Так как $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2+\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2=1$, то существует такой угол φ, что $\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$; $\sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

При этом на промежутке $[0;2\pi[$ угол φ этим двумя равенствами определяется единственным образом. Его можно вычислить по формуле $\varphi=\operatorname{arctg}\frac{b}{a}$.

Полученное выше уравнение примет такой вид:

$$\cos\varphi\sin x+\sin\varphi\cos x=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\Leftrightarrow\sin(x+\varphi)=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Если здесь $\left|\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|\le 1$, то приходим к равносильному ему уравнению:

$$x+\varphi=(-1)^k\arcsin\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}+\pi k$$

Заменяя φ его значением, получим решение данного уравнения:

$$x=-\operatorname{arctg}\frac{b}{a}+(-1)^k\arcsin\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Если же $\left|\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|>1$, то данное уравнение решений не имеет.

2. Метод, основанный на возведении обеих частей уравнения в квадрат.

Решим этим методом то же самое уравнение:

$$\sin x+\sqrt{3}\cos x=1$$

Заменим его равносильным ему уравнением:

$$\sqrt{3}\cos x=1-\sin x\Leftrightarrow\left(\sqrt{3}\cos x\right)^2=(1-\sin x)^2\Leftrightarrow 3\cos^2 x$$

$$=1-2\sin x+\sin^2 x\Leftrightarrow 2\sin^2 x-\sin x-1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x=1,\\ \sin x=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi k,\\ x=(-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{6}+\pi n\end{array}\right.$$

Так как при решении данного уравнения мы возводим обе его части в квадрат, то возможно появление посторонних корней. Их надо исключить проверкой.

Проверку решения тригонометрического уравнения будем проводить, пользуясь периодичностью тригонометрических функций.

Так как каждая, входящая в данное уравнение, тригонометрическая функция имеет период, равный 2π, то их общий период также равен 2π.

На открытом справа промежутке, длиною 2π, например $[-\pi;\pi[$, найдем все решения последнего из уравнений, полученного после преобразований исходного уравнения.

Ими являются числа: $-\frac{5\pi}{6};-\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2};\frac{5\pi}{6}$.

Исключить из них решения, посторонние для данного уравнения, можно непосредственной проверкой по данному уравнению.

Проверка.

$$x_1=-\frac{5\pi}{6},\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)+\sqrt{3}\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}+\sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}=-2 \neq 1;$$

$$x_2=-\frac{\pi}{6},\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\sqrt{3}\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}+\sqrt{3}\frac{\sqrt{3}}{2}=-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=1;$$

$$x_3=\frac{\pi}{6},\sin\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}+\sqrt{3}\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=2\neq 1;$$

$$x_4=\frac{\pi}{2},\sin\frac{\pi}{2}+\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{2}=1+\sqrt{3}+0=1;$$

$$x_5=\frac{5\pi}{6},\sin\frac{5\pi}{6}+\sqrt{3}\cos\frac{5\pi}{6}=\frac{1}{2}+\sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}=-1\neq 1;$$

Отсюда видим, что только числа $-\frac{\pi}{6}$ и $\frac{\pi}{2}$ являются решением данного уравнения на промежутке $[-\pi;\pi[$.

Поэтому общим решением данного уравнения будет объединение двух серий решений $x=-\frac{\pi}{6}+2\pi k$ и $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$.

Ответ. $\left\{-\frac{\pi}{6}+2\pi k\right\}\cup\left\{\frac{\pi}{2}+2\pi n\right\}$.

Замечание. Решая одно и то же уравнение различными методами, мы получили здесь разные по форме ответы. Однако можно показать, что эти ответы дают одно и то же множество значений x. Такая же ситуация может оказаться и при решении других уравнений различными методами.

2. Доказательство тригонометрических неравенств

Наиболее распространенными способами доказательства неравенств являются: доказательство по определению, синтетический способ, аналитико-синтетический способ.

Рассмотрим примеры доказательства неравенств указанными способами.

I. По определению, $a\geq b \Leftrightarrow a-b=0$. Поэтому для доказательства неравенства $f(x)\geq\varphi(x)$ достаточно показать, что $f(x)-\varphi(x)\geq 0$.

Доказать:

1. $\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\geq\frac{1}{2}(\sin\alpha+\sin\beta)$, где $0<\alpha<\frac{\pi}{2}, 0<\beta<\frac{\pi}{2}$.

Доказательство:

Рассмотрим разность $\sin\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{1}{2}(\sin\alpha + \sin\beta)$ и докажем, что она неотрицательна. Тогда, по определению будет справедливо и заданное неравенство. Преобразуем ее:

$$\sin\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{1}{2}(\sin\alpha + \sin\beta) = \sin\frac{\alpha+\beta}{2} - \sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot cos\ \frac{\alpha-\beta}{2} = \sin\frac{\alpha+\beta}{2}(1 - cos\ \frac{\alpha-\beta}{2})$$

Так как $0 < \frac{\alpha+\beta}{2} < \frac{\pi}{2}$, то $\sin\frac{\alpha+\beta}{2} > 0$. Так как$cos\ \frac{\alpha-\beta}{2} \leq 1$, то $1 - cos\ \frac{\alpha-\beta}{2} \geq 0$.

Следовательно, $\sin\frac{\alpha+\beta}{2}(1 - cos\ \frac{\alpha-\beta}{2}) \geq 0$ при всех рассматриваемых значениях α и β.

2. $\cos\alpha + 2\sin\alpha > 1$, где $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$.

Доказательство:

$1 - \cos\alpha - 2\sin\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2} - 4\sin\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\alpha}{2} = 2\sin\frac{\alpha}{2}\Big(\sin\frac{\alpha}{2} -$
$2\cos\alpha 2<0$,

Так как при $0 < \frac{\alpha}{2} \leq \frac{\pi}{4}$ имеем: $0 < \sin\frac{\pi}{2} \leq \cos\frac{\alpha}{2} < 2\cos\frac{\alpha}{2}$

3. $\sin^2\alpha + \cos^6\alpha \geq \frac{1}{4}$.

Доказательство:

Воспользуемся формулой суммы кубов двух чисел:

$$(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) \cdot (\sin^4\alpha - \sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha + \cos^4\alpha) - \frac{1}{4}$$
$$= \frac{1}{4}(1 - \cos 2\alpha)^2 - \frac{1}{4}\sin^2 2\alpha + \frac{1}{4}(1 + \cos 2\alpha)^2 - \frac{1}{4}.$$

Раскрывая скобки и заменяя $\sin^2 2\alpha$ на $1 - \cos 2\alpha$, получим: $\frac{3}{4}\cos^2 2\alpha$. Это выражение неотрицательно при любом α.

II. Синтетический способ доказательства состоит в том, что доказываемое неравенство выходит из некоторых известных (опорных) неравенств. Приведем некоторые неравенства, наиболее часто употребляемые в качестве опорных:

1. $a^2 \geq 0$;
2. $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq \alpha$, где $ab > 0$;
3. $|\sin x| \leq 1, |\cos x| \leq 1$;
4. $\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leq \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$, где $ai \geq 0$, $i = 1,2,\cdots,n$;
5. $\sin x < x < tgx, 0 < x < \frac{\pi}{2}$;

6. Неравенства, вытекающие из монотонности тригонометрических функций. Например, если $0 < x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2}$, то $\sin x_1 < \sin x_2 , \cos x_1 > \cos x_2 , \operatorname{tg} x_1 < \operatorname{tg} x_2 , \operatorname{ctg} x_1 < \operatorname{ctg} x_2$.

Доказать:

1. $\cos\alpha + \sec\alpha \geq \alpha, -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$;

Доказательство:

Воспользуемся неравенством (2).

Так как $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$, то $\cos\alpha > 0$. Полагая в (2) $a = \cos\alpha$ и учитывая, что $\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$, получим: $\frac{\cos\alpha}{1} + \frac{1}{\cos\alpha} \geq 2$ ч.т.д.

2. $\sin\beta - \sin\alpha < \beta - \alpha, 0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$;

Доказательство:

Выберем в качестве опорного неравенства: $\sin\frac{\beta-\alpha}{2} < \frac{\beta-\alpha}{2}$.

Последовательно преобразуем его, учитывая, что $0 < cos\frac{\beta+\alpha}{2} < 1$,

$$\sin\frac{\beta-\alpha}{2} \cdot cos\frac{\beta+\alpha}{2} < \frac{\beta-\alpha}{2}; \frac{1}{2}(\sin\beta - \sin\alpha) < \frac{\beta-\alpha}{2}, \sin\beta - \sin\alpha < \beta - \alpha.$$

III. Аналитико-синтетический способ доказательства неравенства состоит в следующем.

Предположив, что доказываемое неравенство верно, с помощью ряда преобразований его приводят к неравенству, которое является верным (этап анализа). После этого, используя полученное неравенство, как опорное, проверяют обратимость всех выполненных преобразований «снизу - вверх» (этап синтеза).

Доказать:

1. $\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2} \geq 1 - \operatorname{ctg}\varphi, 0 < \varphi < \pi$;

Доказательство:

Предположим, что неравенство доказано. Тогда из него последовательно получим:

$$\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2} - \operatorname{ctg}\varphi \geq 1, \frac{\sin\left(\varphi - \frac{\varphi}{2}\right)}{\sin\varphi \cdot \sin\frac{\varphi}{2}} \geq 1, \frac{1}{\sin\varphi} \geq 1, \sin\varphi \leq 1, \text{ что верно.}$$

Отправляясь от верного неравенства $\sin\varphi \leq 1$ «снизу вверх», придем к переходному неравенству. Поэтому оно доказано.

2. $\cos 36° > tg36°$.

Доказательство:

Предположим, что неравенство доказано. Тогда из него последовательно получим:

$$\cos 36° > \frac{\sin 36°}{\cos 36°}, \cos^2 36° > \sin 36°, 1 + \cos 72°$$
$$> 2\sin 36°, 1 + \cos(90° - 18°) > 2\sin(6° + 30°), 1 + \sin 18°$$
$$> 2\sin 6° \cos 30° + 2\sin 30° \cos 6°, 1 + 2\sin 9° \cos 9°$$
$$> \cos 6° + 2\sin 6° \cos 30°.$$

Так как $1 > \cos 6°$, $\sin 9° > \sin 6°$, $\cos 9° > \cos 30°$, то последнее неравенство справедливо. Используя его к исходному неравенству, которое тем самым доказано.

IV. В некоторых случаях доказательство неравенств можно проводить методом математической индукции.

Доказать: $|\sin nx| \le n|\sin x|$, где $n \in N$.

Доказательство:

Докажем неравенство методом математической индукции.

1. Покажем сначала, что данное неравенство верно при $n = 1$.

   Так как $|\sin x| \le |\sin x|$, то есть $|\sin 1x| \le 1 \cdot |\sin x|$, то это имеет место.

2. Предположив теперь, что оно верно для произвольно выбранного $n = k, k \in N$, то есть $|\sin kx| \le k|\sin x|$, $k \in N$ докажем, что данное неравенство верно и для $n = k + 1$, то есть $|\sin(k + 1)x| \le (k + 1)|\sin x|$.

Имеем: $(k + 1)|\sin x| = k|\sin x| + |\sin x| \ge |\sin kx| + |\sin x| \ge |\sin kx||\cos x| + |\sin x||\cos kx| = |\sin kx \cos x| + |\sin x \cos kx| \ge |\sin kx \cos x + \sin x \cos kx| = |\sin(kx + x)| = |\sin(k + 1)x|$.

Из 1) и 2), в соответствии с принципом математической индукции следует, что неравенство (1) верно при любом $n \in N$.

Доказать следующие неравенства:

1. $0 < \sin(\alpha + \beta) < \sin\alpha + \sin\beta, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, 0 < \beta < \frac{\pi}{2}$;
2. $tg\alpha + ctg\alpha > \sin\alpha + \cos\alpha, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$;
3. $\sin^4\alpha - 6\sin^2\alpha + 5 \ge 0$;
4. $-\sqrt{\alpha} \le \sin\alpha + \cos\alpha \le \sqrt{\alpha}$.

   Указание. Используя формулы приведения, получите сумму одноименных функций, а затем преобразуйте ее в произведение.

5. $tg\frac{\alpha}{2} < \alpha, 0 < \alpha \le \frac{\pi}{2}$;

   Указание. Воспользуйтесь неравенством: $\sin\frac{\alpha}{2} < \frac{\alpha}{2}$, а также монотонность функции $y = \cos\frac{\alpha}{2}, 0 < \frac{\alpha}{2} \le \frac{\pi}{4}$.

3. Многочлены

Целые, рациональные и действительные числа образуют структуры, называемые кольцами. Пусть К – произвольное кольцо, т.е. одно из перечисленных множеств. Многочленом n-й степени от неизвестного (переменной) x будем называть выражение вида:

$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n,$ (1)

где $n \in \mathbb{Z}^+, a_0, a_1, \dots, a_n$- аргументами многочлена (1) при соответствующих степенях переменной x: $x^0, x^1 \dots, x^n$. Для обозначения (1) будем использовать $f(x), g(x), \phi(x)$ и т.д.

Многочлены $f(x)$ и $g(x)$ называют равными $f(x) = g(x)$, если равны их коэффициенты при одинаковых степенях неизвестной.

Определение. Суммой многочленов

$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ (2)

$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_mx^m$ (3)

называется многочлен

$f(x) + g(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \cdots + (a_k + b_k)x^k,$ (4)

где $\mathrm{k} = \max\{n, m\}$.

Произведением многочленов $f(x)$ и $g(x)$ называется многочлен

$$f(x)g(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_{n+m}x^{n+m}, \text{где}$$

$$c_k = a_0b_k + a_1b_{k-1} + a_2b_{k-2} + \cdots + a_kb_0 = \sum_{i+j=k} a_ib_j$$

$, k = 0,1, \dots, n + m,$ (5)

при этом $a_l = 0$, если $l > n$; $b_l = 0$, если $l > m$.

Замечание. Как видно из определения многочлена вместо буквы x можно использовать любую другую букву, поэтому задание многочлена равносильно заданию последовательности $(a_0, a_1, a_2, \dots, a_n)$ элементов.

Свойства операций над многочленами

1) сложение коммутативно.

2) сложение ассоциативно.

3) $\exists\ 0 -$ число 0 (все коэффициенты такого многочлена равны 0).

4) для всех $f(x)\ \exists$ противоположный многочлен $-f(x)$, все коэффициенты которого противоположны (как элементы кольца) коэффициентам $f(x)$.

5) умножение дистрибутивно относительно сложения. Вытекает из равенства $\sum_{i+j=k}(a_i + b_i)\, c_j = \sum_{i+j=k} a_ic_j + \sum_{i+j=k} b_ic_j$.

6) умножение ассоциативно.

Заметим, что многочлены не имеют обратных элементов.

Свойства (1) – (6) означают, что многочлены с коэффициентами из K образуют кольцо, обозначаемое $K[x]$ – кольцо многочленов от x.

Формальные слагаемые $a_0, a_1x, a_2x^2, \dots, a_nx^n$ называют членами многочлена, a_0 – свободным членом.

Степенью ненулевого многочлена $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ называется наибольшее из чисел k, таких, что $a_k \neq 0$. Обозначается $\deg f(x)$ ($\deg 0 = -\infty$).

Если $\deg f(x) = n$, то a_nx^n – называют старшим членом.

Деление с остатком на двучлен $\mathbf{1}^{й}$ степени

В кольце многочленов возможно деление с остатком. Но прежде мы рассмотрим частный случай этой операции – деление на двучлен вида $x - x_0, x_0 \in K$.

Теорема 1. Если $f(x) \in K[x]$, то $\forall x_0 \in K$ существует единственное представление

$$f(x) = g(x)(x - x_0) + c, \tag{6}$$

где $g(x) \in K[x], c \in K$, при этом $c = f(x_0)$.

Доказательство. Если $\deg f(x) = 0$, то есть $f(x) = a$, то берем $g(x) = 0, c = a$.

Пусть $\deg f(x) = n > 0$, тогда $\deg g(x) = n - 1$.

Пусть $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$, тогда $g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_{n-1}x^{n-1}$. Подставим в (6), получим

$$a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n = (c - b_0x_0) + (b_0 - b_1x_0)x + (b_1 - b_2x_0)x^2 + \cdots$$
$$+(b_{n-2} - b_{n-1}x_0)x^{n-1} + b_{n-1}x^n.$$

Откуда

$$\begin{aligned} b_{n-1} &= a_n, \\ b_{n-2} &= a_{n-1} + b_{n-1}x_0, \\ &\dots \\ b_1 &= a_2 + b_2x_0, \\ b_0 &= a_1 + b_1x_0, \\ c &= a_0 + b_0x_0. \end{aligned} \tag{7}$$

Существование $g(x)$ доказано, единственность следует из единственности решения системы (7).

Из (6) $\Rightarrow f(x) = c$.

Замечание. Представление $f(x)$ в виде (6) называется делением с остатком $f(x)$ на $x - x_0$, $g(x)$ – неполное частное, а c – остаток.

Определение. Корнем многочлена $f(x) \in K[x]$ элемент $x_0 \in K: f(x_0) = 0$. Следствием теоремы 1 является теорема Безу.

Следствие (т. Безу). $f(x)$ делится на двучлен $x - x_0 \Leftrightarrow$, когда $x_0 -$ его корень.

Доказательство. Если x_0 – корень, то в (6) $c = f(x_0) = 0$. Согласно $f(x) = g(x)(x - x_0)$.

Необходимость. Если $\mathrm{f(x)} = g(x)(x - x_0) \Rightarrow c = 0 = f(x_0) \Rightarrow x_0 -$ корень.

Теорема 1 дает способ вычисления $g(x)$.

Схема Горнера.

Вычисления удобно располагать по схеме, называемой схемой Горнера.

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	…	a_1	a_0
x_0	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	…	b_0	c

$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = (\dots\Big(\big((a_nx + a_{n-1})x + a_{n-2}\big) + \cdots + a_0\Big)x_0 + a_0$.

$b_k = b_{k+1}x_0, b_{n-1} = a_n, c = b_0x_0 + a_0$.

С помощью схемы Горнера можно вычислить и с – значение многочлена в точке x_0 $(f(x_0) = c)$.

Теорема 2. Многочлен $f(x) \in K[x]$ степени n имеет не более n корней.

Доказательство. Если x_1- корень, то $f(x) = g(x)(x - x_0)$.

$\deg g(x) = n - 1$. Если x_2- корень, то x_2 и корень $g(x)$, так как $g(x_2)(x_2 -$ *x1=0⇒gx2=0* (K – без делителей нуля). (Если *x2=x1* – кратный корень, k – кратное $f(x)g(x)(x - x_1)^k$), то

$$f(x) = g(x)(x - x_1) \colon (x - x_1) \Rightarrow$$

$g(x)_1(x - x_2) = g(x) \Rightarrow x_1 = x_2$ – корень $g(x)$.

Делим $f(x) = g_1(x)(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$.

Следствие. Многочлен степени, $\leq n$ однозначно определяется своими значениями в n+1 точках.

Многочлены над полем

Множества рациональных и действительных чисел образуют, так называемые, поля.

Случай, когда K – поле, наиболее важен для приложений и ввиду простоты. Итак, пусть $K = P$ – поля, т.е. либо рациональные, либо действительные числа.

Кратные корни.

Корень x_0 имеет кратность k, если $f(x) \vdots (x - x_0)^k, k$ – наибольшее. Если $k = 1$, то x_0 – простой корень. Другой случай $f(x) = (x - x_0)^k g(x)$, и $g(x_0) \neq 0$.

Кратность корня удобно считать по схеме Горнера, последовательно деля $f(x)$ на $\mathrm{x} - x_0$:

$f(x) = (x - x_0)f_1(x)$, затем $f_1(x)$ на $(x - x_0)$ и так далее, пока не получим ненулевой остаток.

Лемма 1. $\forall f(x) \in \mathbb{R}[x] \exists x_1, x_2, \dots, x_s \in \mathbb{P}$

$f(x) = (x - x_1)^{k_1}(x - x_2)^{k_2} \dots (x - x_s)^{k_s} g(x),$ (1)

где $x_1, x_2, \dots, x_s \in \mathbb{P}$, а $g(x)$ – многочлен, не имеющий корней.

Доказательство следует из теоремы Безу – берем x_1 – корень и делим.

Лемма 2. Если $f(x)$ – многочлен, представленный в виде (1), то $x_1, x_2, \dots, x_s$ – все его корни кратностей $k_1, k_2, \dots, k_s$.

Доказательство. Если $x_0 \neq x$, то $f(x_0) = \prod (x_0 - x_i)^{k_i} g(x_0) \neq 0$. Следовательно, других корней, кроме x_i нет. Долее так как $g(x)$ – не имеет корней то $f(x) = (x - x_1)^{k_1}[(x - x_2)^{k_2} \dots (x - x_s)^{k_s} g(x)]$, так как $(x - x2k2…x−xsks≠0$ в точке $x1⇒k1$ – кратный.

Из лемм 1 и 2 следует

Теорема 1. Сумма кратностей всех корней многочлена вида $f(x)$ $(\not\equiv 0)$ не превосходит его степени. Причем равенство возможно тогда и только тогда, когда $f(x)$ разлагается на линейные множители.

Теорема о делении с остатком.

Теорема 2. $\forall f(x)$ и $g(x)$ над полем $\mathbb{P}(g(x) \not\equiv 0)$ существует единственная пара многочленов $q(x)$ и $r(x) \in \mathbb{P}[x]$, такая, что

$$f(x) = q(x)g(x) + r(x), \text{где} \deg r(x) < \deg g(x) \ \ (\text{или}\ r(x) = 0).$$

Делимость

Пусть над P даны многочлены $f(x)$и $g(x)$. Если $\exists q(x) \colon f(x) = g(x)q(x)$, то говорят, что $f(x)$ делится (нацело) на $g(x)$ (остаток $r(x) = 0$).

Некоторые свойства делимости:

1. Если $f \vdots g$, а$g \vdots h \Rightarrow f \vdots h$.
2. Если $f \vdots h, g \vdots h \Rightarrow f - g \vdots h$.
3. Если $f \vdots h$, то $\forall g \Rightarrow fg \vdots h$.

Наибольший общий делитель

Определение. Многочлен $d(x)$ будем называть Н.О.Д. данных многочленов $f(x)$ и $g(x)$ (отличных от нуля), если

1) $d(x)$ является делителем многочленов f и g.

2) $d(x)$ делится на любой общий делитель многочленов f и g.

Обозначение: $\big(f(x), g(x)\big)$.

Для нахождения Н.О.Д. используют алгоритм Евклида (или алгоритм последовательного деления). Он состоит в следующем: сначала делят с остатком f на g, затем g – на остаток от первого деления. Затем остаток от первого деления на остаток от второго и так далее, пока не получим нулевой остаток.

$$\begin{aligned} f &= q_1 g + r_1, \\ g &= q_2 r_1 + r_2, \\ r_1 &= q_3 r_2 + r_3, \\ &\dots \\ r_{k-2} &= q_k r_{k-1} + r_k, \end{aligned} \qquad (3)$$

$$r_{k-1} = q_{k+1} r_k$$

Причем $\deg g(x) > \deg r_1 > \deg r_2 > \dots > \deg r_k$. Последний ненулевой остаток ($r_k(x)$) в алгоритме Евклида является Н.О.Д. $f(x)$ и $g(x)$.

Заметим, что Н.О.Д. определяется с точностью до ассоциированности: если $d(x) = \big(f(x), g(x)\big)$, то $cd(x)$ –ассоциативный многочлен, имеет тот же Н.О.Д. (свойства делимости). Поэтому можно считать, что у Н.О.Д. степень коэффициента равна одному.

Определение. Многочлены $f(x)$и $g(x)$ взаимно просты если их Н.О.Д. равен единице.

Линейное выражение Н.О.Д.

Теорема 3. Если $d(x)$ – Н.О.Д. $f(x)$ и $g(x)$, то $\exists$ многочлены $u(x)$ и $v(x)$:
$d(x) = f(x)u(x) + g(x)v(x)$. (4)

Доказательство. Из алгоритма Евклида следует, что $r_1 = f - q_1 g$. Подставляя в $r_2 = g - q_2 r_1 - q_2 f + (1 + q_1 q_2) g$

…

$r_k = d$.

Замечание. Из теоремы 3 следует практически способ линейного представления Н.О.Д. Метод неотрицательных коэффициентов: многочлены u и v записываются в общем виде с неотрицательными коэффициентами. В правой части равенства (4) приводятся подобные и приравниваются коэффициенты при одинаковых степенях в равенстве (4). Затем получается система. Нужно знать степени u и v:

Теорема 4. Пусть $\big(f(x), g(x)\big) = d(x)$ и $d(x)$ делит $h(x)$ и $\deg h(x) < \deg f(x) + \deg\, g(x)$, тогда $h(x)$ можно представить в виде:
$h(x) = u(x)f(x) + v(x)g(x)$, где $\deg u(x) < \deg g(x)$, $\deg v(x) < \deg f(x)$.

Доказательство. Пусть $h = u_0 f + v_0 g$ – некоторое представление h. Поделим u_0 на g с остатком:

$$u_0 = qg + u, \deg u < \deg g$$

$h = u_0 f + v_0 g = (qg + u)f + v_0 g = uf + vg,$

$\deg u < \deg g$, $vg = h - uf$ и $\deg h < \deg f + \deg g$

$$\deg v + \deg g = \deg vg < \deg h < \deg f + \deg g \Rightarrow \deg v < \deg f$$

Теорема доказана.

Наименьшее общее кратное (Н.О.К.)

Определение. Н.О.К. многочленов $f(x)$ и $g(x) \in P[x]$ называется многочлен $h(x)$, такой, что:

1. h – общее кратное f и g.
2. h делит любое общее кратное многочленов f и g.

Существование: например, $f \cdot g$.

Единственность: пусть $h' \neq h''$ (2) $\Rightarrow h' | h''$ и $h'' | h' \Rightarrow$ Н.О.К. единственно с точностью до ассоциируемости.
Обозначение: $[f(x), g(x)]$ – нормир. Многочлен.

Теорема 5. $[f, g](f, g) = cfg, (c \in P, c \neq 0)$. (5)

Доказательство. $d = (f, g), h = [f, g]$,

$$f = f_1 d,$$
$$g = g_1 d.$$

Пусть $h' = \frac{fg}{d} = f_1 g = f g_1$. (6)

h' - кратное f и $g \Rightarrow h'' \vdots h$. Рассмотрим $d' = \frac{fg}{h}; f = \frac{h}{g} d', g = \frac{h}{f} d' \Rightarrow$

$$d' - \text{общий делитель } f \text{ и } g \Rightarrow d \vdots d' \Rightarrow d = qd' \Rightarrow$$

$$h' = \frac{fg}{d} = \frac{fg}{qd'} = f \cdot \frac{\frac{h}{f} d'}{qd'} = \frac{h}{q} \Rightarrow h = qh'.$$

Следовательно, $h \vdots h' \Rightarrow h$ и h' ассоциативны: $h = ch'$. Из (6) следует $hd = cfg$.

Взаимно простые многочлены.

Лемма. Н.О.К. (f, g) произвольных взаимно простых многочленов равно их произведению.

Теорема 6. $(f, g) = 1 \Leftrightarrow \exists\, u, v \in P[x]: 1 = uf + vg$.

Теорема 7. Если f взаимно прост с каждым из многочленов $g(x)$ и $h(x)$, то он взаимно прост и с произведением $g(x)h(x)$.

Доказательство.
$\exists u, v: fu + gv = 1$ (аналогично и с h).
$f(uh) + (gh)v = 1 \Rightarrow$ любой общий делитель f и g должен делить и h, но $(f, h) = 1$.

Теорема 8. Если $fg \vdots \phi$, но f и ϕ взаимно просты, то $g \vdots \phi$.

Теорема 9. Если $f \vdots \phi, f \vdots \psi, (\phi, \psi) = 1,$ то $f \vdots (\phi, \psi)$.

Определение. Н.О.Д. для $f_1(x), \dots f_k(x)$ называют их общий делитель, такой, что он делится на любой общий делитель.

Теорема. Н.О.Д. $(f_1, \dots, f_k) = \big((f_1, \dots f_{k-1}), f_k\big)$.

Замечание. Теоремы 6-9 можно обобщить на случай системы многочленов.

4. Примеры решений типовых задач

Задача1. На доске написано выражение cos x. Разрешается сложить или перемножить несколько написанных на доске выражений (одно выражение может использоваться несколько раз) и дописать полученное новое выражение на доску. Можно ли за несколько действий получить выражение, которое при $x = \pi$ принимает значение 0?

Ответ. Да, можно.

Решение. Первым действием дописываем $\cos^2 x$, вторым — $\cos^2 x + \cos x$. Поскольку $\cos \pi = -1$, значение последнего выражения при $x = \pi$ равно 0.

Комментарий. Ответ без предъявления искомого выражения — 0 баллов. Только предъявление любого верного искомого выражения без указания последовательности шагов, которая к нему приводит — 6 баллов.

Задача 2. На доске пишут n квадратных трёхчленов вида $* x^2 + * x + *$ (вместо коэффициентов написаны звёздочки). Можно ли при каком-либо $n > 100$ поставить вместо 3n звёздочек некоторые 3n последовательных натуральных чисел (в каком-то порядке) так, чтобы каждый из n данных трёхчленов имел два различных целых корня?

Ответ. Нет, нельзя.

Решение. Решение будет состоять из трёх шагов (A, B, C).

A) Докажем следующую лемму.

Лемма. Пусть при некоторых натуральных a, b, c квадратный трёхчлен $Ax^2 + bx + c$ имеет целые корни. Тогда b и c делятся на a.
Доказательство. По теореме Виета $b/a = -(x_1 + x_2)$ и $c/a = x_1 x_2$ являются целыми числами. Лемма доказана.

B) Предположим, что натуральные числа $k + 1, k + 2, \ldots, k+ 3n$ (при некотором целом неотрицательном k) нужным образом расставлены в качестве коэффициентов данных квадратных трёхчленов $a_ix^2\ 2 + b_i x + c_i$ ($i = 1, 2, \ldots, n$). Для определённости пусть $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$. Тогда $a_1 \geqslant k + 1$, откуда $a_2 \geqslant k + 2$, и т.д., $a_n \geqslant k + n$. Тогда из леммы следует, что минимальное из чисел b_n, c_n не меньше, чем $2a_n$, а максимальное (назовём его M) — не меньше, чем $3a_n$. Но M должно быть среди чисел $k + 1, k + 2, \ldots, k + 3n$. Получаем $3(k + n) \leqslant 3a_n \leqslant M \leqslant k + 3n$. Отсюда $k \leqslant 0$, и, значит, $k = 0$. Кроме того, $a_n = n$, откуда сразу следует, что $a_i = i$ при $i = 1, 2, \ldots, n$.

C) Среди 3n подряд идущих чисел менее $3n/2+ 1$ чётных. С другой стороны, зная, что a_i пробегают числа $\{1, 2, \ldots, n\}$, получим оценку снизу на количество C чётных чисел среди всех коэффициентов. Заметим, что в каждой из n троек (a_i , b_i , c_i) хотя бы одно чётное число, иначе значение трёхчлена $a_i x^2 +b_i x +c_i$ в любой целой точке будет нечётно, в частности, такой трёхчлен не может иметь целых корней. Если же a_i чётно (количество соответствующих троек (a_i , b_i , c_i) равно $[n/2]$), то b_i и c_i , в силу леммы, тоже чётные, значит, в такой тройке (a_i , b_i , c_i) все три коэффициента чётные. Тогда $C \geqslant n + 2[n/2] \geqslant 2n - 1$. Сравнивая верхнюю и нижнюю оценки, имеем $3n/2 + 1 > C \geqslant 2n - 1$, откуда $n < 4$. Противоречие.

Комментарий. Только часть A (сформулирована и доказана лемма о делимости коэффициентов) — 1 балл.

Сделаны части A и B (т. е. в предположении, ответа «можно», доказано, что каждый старший коэффициент не превышает n) — 4 балла.

Из оставшихся 3 баллов начисляются продвижения в части C (получение противоречия в случае, когда старшие коэффициенты равны 1, 2, . . . , n). Если часть C доказана с ссылкой на недоказанный факт о наличии простых чисел среди чисел от n + 1 до 3n, из возможных 3 баллов начисляется 1 балл. Если в решении лемма используется без доказательства — снимается 1 балл.

Задача 3. На доске написаны функции: $x + 1$, $x^2 + 1$, $x^3 + 1$, $x^4 + 1$. Разрешается дописывать на доску новые функции, получаемые из написанных на доске с помощью операций вычитания и умножения. Покажите, как получить ненулевую функцию, которая при положительных значениях аргумента принимает неотрицательные значения, а при отрицательных значениях аргумента — неположительные значения.

Решение. Например, подходит $(x^4 + 1)(x + 1) - (x^4 + 1) = = x(x^4 + 1)$.

Замечание. Существуют и другие примеры.

Комментарий. Любой правильный пример — 7 баллов.

Задача 4. Известно, что для некоторых x и y суммы $\sin x + \cos y$ и $\sin y + + \cos x$ — положительные рациональные числа. Докажите, что найдутся такие натуральные числа m и n, что $m \sin x + n \cos x$ — натуральное число.

Решение. Пусть $\sin x + \cos y = a$ и $\sin y + \cos x = b$. Тогда $\cos y = a - \sin x$ и $\sin y = b - \cos x$. Возведём эти равенства в квадрат и сложим их. Тогда в силу основного тригонометрического тождества получим: $1 = a^2 + b^2 - 2a \sin x - 2b \cos x + 1$, то есть $2a \sin x + 2b \cos x = a^2 + b^2$. Пусть N — НОК знаменателей чисел a и b; тогда, умножив полученное равенство на N^2, получим требуемое.

Комментарий. Вместо натуральных чисел найдены положительные рациональные — 5 баллов.

Задача 5. Пусть p — простое число, большее 3. Докажите, что найдётся натуральное число y, меньшее $p/2$ и такое, что число $py + 1$ невозможно представить в виде произведения двух целых чисел, каждое из которых больше y.

Решение. Положим $p = 2k + 1$. Предположим противное: для каждого из чисел $y = 1, 2, \dots, k$ существует разложение $py + 1 = a_y b_y$, где $a_y > y$, $b_y > y$. Заметим, что каждое из чисел a_y и b_y строго больше 1, а также что $a_y < p$, $b_y < p$, иначе $a_y b_y \geqslant p(y + 1) > py + 1$. Значит, каждое из $p - 1$ чисел набора $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots a_k, b_k$ лежит в множестве из $p - 2$ чисел $\{2, 3, \dots, p-1\}$. Таким образом, в этом наборе найдутся два равных числа. Пусть каждое из этих двух чисел равно d.

Пусть эти равные числа имеют равные индексы в наборе, то есть $a_y = b_y = d$ при некотором y. Тогда $py + 1 = d^2$, поэтому число $d^2 - 1 = (d - 1)(d + 1) = py$ делится на простое p. Так как $1 \leqslant d - 1 < d + 1 \leqslant p$, это может быть лишь при $d + 1 = p$. Тогда соответствующее значение y равно $d - 1 = p - 2 = 2k - 1$, что при $p > 3$ больше, чем k. Противоречие (так как $y \leqslant k$).

В противном случае существуют индексы $y_1 < y_2$ такие, что $1 \leqslant y_1 < y_2 < d$, для которых числа $py_1 + 1$ и $py_2 + 1$ делятся на d. Тогда и $p(y_2 - y_1) = (py_2 + 1) - (py_1 + 1)$ также делится на d. Из взаимной простоты чисел d и p получаем, что $y_2 - y_1$ делится на d, а это невозможно, так как $0 < y_2 - y_1 < y_2 < d$.

Таким образом, в каждом случае получено противоречие и, следовательно, указанное в условии задачи число y всегда найдётся.

Комментарий. В предположении противного доказано только, что в наборе $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots a_k, b_k$ есть два равных числа — 3 балла.

В предположении противного доказано, что в наборе $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots a_k, b_k$, есть два равных числа, и сведён к противоречию случай $y_1 < y_2$ (т. е. случай $y_1 = y_2$ упущен или разобран неверно) — 5 баллов.

В предположении противного доказано, что в наборе $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots a_k, b_k$, есть два равных числа, и сведён к противоречию случай $y_1 = y_2$ (т. е. случай $y_1 < y_2$ упущен или разобран неверно) — 5 баллов.

5. Задания для самостоятельного решения

1. Известно, что квадратные уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ и $bx^2 + cx + a = 0$ (числа a, b, c отличны от нуля) имеют общий корень. Найдите его.

<u>**Ответ:**</u> 1.

<u>Критерии.</u>

Только ответ – 1 балл.

2. Найти все целочисленные решения (x, y) уравнения

$$x(x+1) = 4y(y+1).$$

<u>Ответ:</u> (0,0), (0,-1), (-1,0), (-1,-1).

<u>Критерии.</u>

Только ответ – 1 балл.

Возможны другие доказательства того, что одно из четырех чисел обязательно равняется нулю.

3. Вычислить: $101^2 - 100^2 + 99^2 - 98^2 + \cdots + 3^2 - 2^2 + 1^2$.

<u>Ответ:</u> $\frac{101 \times 102}{2} = 5151$.

<u>Критерии.</u>

Только ответ – 0 баллов.

4. Каждое из чисел от 2 до 7 умножают на каждое из чисел от 8 до 13, перед каждым из получившихся произведений произвольным образом ставят знак плюс или минус, после чего все получившиеся результаты складывают. Какую наименьшую по модулю сумму можно получить?

<u>Ответ: 1.</u>

<u>Критерии</u>.

Пример (правильный) – 3 балла.

Оценка – 4 балла.

5. Пусть p, q, r – различные простые числа. Произведение p·q·r нацело делится на p+q+r. Доказать, что (p-1)·(q-1)·(r-1) + 1 является квадратом натурального числа.

<u>Критерии.</u>

Рассмотрено несколько частных случаев – 0 баллов.

Доказано, что p + q + r является произведением каких-то двух из трех данных простых чисел – 3 балла.

6. В выражении $(x^3 + 2x^2 - 3x + 2)^{20}$ раскрыли скобки и привели подобные слагаемые. Докажите, что при некоторой степени переменной x получился отрицательный коэффициент.

<u>Критерии.</u>

Возможны решения с раскрытием скобок и поиском коэффициента перед какой-то степенью переменной x.

Решения с ошибками в вычислениях при раскрытии скобок – 0 баллов.

Заключение

Подготовлены методические рекомендации по теме «Алгебра» для участников математических олимпиад (9-11 классы). Приведены решения типовых задач по указанной теме; задачи для самостоятельного решения.

Список использованных источников

1. Агаханов, Н.А. Математика. Районные олимпиады. 6-11 классы. /Н.А. Агаханов, О.К. Подлипский. – М.: Просвещение, 2010. – 192 с.
2. Балаян, Э.Н. 800 лучших олимпиадных задач по математике для подготовки к ЕГЭ: 9-11 классы /Э.Н. Балаян. – Ростов н/Д: Феникс, 2013. – 317 с.
3. Васильев, Н.Б., Савин, А.П., Егоров, А.А. Избранные олимпиадные задачи. Математика / Н.Б. Васильев и др. – М.: Бюро Квантум, 2007. – 160 с. (Библиотечка «Квант». Вып. 100. Приложение к журналу «Квант» № 2/2007.)
4. Голубев, В.И. Решение сложных и нестандартных задач по математике / В.И. Голубев. – М.: ИЛЕКСА, 2007. – 252 с.
5. Горбачёв, Н.В. Сборник олимпиадных задач по математике / Н.В. Горбачёв. – М.: МЦНМО, 2004. – 560 с.
6. Готман, Э.Г. Задачи по планиметрии и методы их решения: Пособие для учащихся / Э.Г Готман. – М.: Просвещение, АО «Учеб. лит.». – 1996. – 240 с.
7. Задачи по математике. Алгебра. Справочное пособие. / В.В. Вавилов, И.И. Мельников, С.Н. Олехник, П.И. Пасиченко. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 432 с.

8. Канель-Белов, А.Я., Ковальджи, А.К. Как решают нестандартные задачи / Под ред. В.О. Бугаенко. – 4-е изд. стереотип. – М.: МЦНМО, 2008. – 96с.
9. Ленинградские математические кружки: пособие для внеклассной работы /С.А. Генкин, И.В. Итенберг, Д.В. Фомин. – Киров: Издательство «АСА», 1994. – 272 с.
10. Литвиненко, В.Н. Сборник задач по стереометрии с методами решений: Пособие для учащихся / В.Н. Литвиненко. – М.: Просвещение, 1998. – 255 с.
11. Математика. Областные олимпиады. 8-11 классы./[Н.Х. Агаханов, И.И. Богданов, П.А. Кожевников]. – М.: Просвещение, 2010. – 239 с.
12. Методы решения задач по алгебре: от простых до самых сложных/ С.В. Кравцев, Ю.Н. Макаров, В.Ф. Максимов, М.И. Нараленков, В.Г. Чирский. – М.: Издательство : «Экзамен», 2005. – 544 с.
13. Моденов, П.С. Сборник задач по специальному курсу элементарной математики / П.С. Моденов. - 2-е изд., доп., испр. - Москва : Высш. школа, 1960. - 765 с.
14. Морозова, Е.А. Международные математические олимпиады. Задачи, решения, итоги: пособие для учащихся / Е.А. Морозова, И.С. Петраков, В.А. Скворцов; ред. Н.И. Никитиной; худож. С.С. Верховский. - Изд. 4-е, испр. и доп. - Москва: Издательство «Просвещение», 1976. - 288 с.
15. Олимпиада школьников «Шаг в будущее». Демонстрационные варианты и задания для тренировки по физике и математике. Тематический сборник информационно-методических и образовательных материалов / Под ред. Н.Я. Ирьянова. – М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011. – 150 с.
16. Планиметрия: пособие для углубленного изучения математики / В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев, Э.Г. Позняк и др. ; ред. В.А. Садовничьего. - 2-е изд., стер. - Москва : Физматлит, 2017. - 486 с.
17. Потапов, М.К. Конкурсные задачи по математике / М.К. Потапов, С.Н. Олехник, Ю.В. Нестеренко. - 3-е изд., стереотип. - Москва : Физматлит, 2003. - 416 с.
18. Сборник задач московских математических олимпиад / сост. В.Г. Болтянский; ред. А.А. Леман. - Москва : Издательство «Просвещение», 1965. - 383 с.
19. Сборник задач по элементарной математике повышенной трудности / сост. К.У. Шахно. - 2-е изд., стереотип. - Минск: Высш. школа, 1965. - 524 с.
20. Севрюков, П.Ф. Векторы и координаты в решении задач школьного курса стереометрии: учебное пособие /П.Ф. Севрюков, А.Н. Смоляков.

– М.: ИЛЕКСА; НИИ Школьных технологий; Ставрополь: Сервисшкола, 2008. – 164 с.

21. Супрун, В.П. Математика для старшеклассников: Нестандартные методы решения задач. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009. – 272 с.
22. Фарков, А.В. Математические олимпиады в школе. 5-11 классы /А.В. Фарков. – 8-е изд., испр. и доп. – М.: Айрис-пресс, 2009. – 256 с.
23. Шарыгин, И.Ф. Факультативный курс по математике: Решение задач: Учеб. пособие для 10 кл. сред. шк./ И.Ф. Шарыгин. – М.: Просвещение, 1989. – 252 с.