Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«АРМАВИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Институт прикладной информатики, математики и физики
Кафедра математики, физики и методики их преподавания

Методы решения олимпиадных задач по теме «Числа и вычисления. Выражения и их преобразования»

Составители: доцент кафедры математики, физики и МП, Тарасова Т.А.,
ст. пр. кафедры математики, физики и МП, Спевакова Н.Ю.

Армавир, 2019

Аннотация

В методических рекомендациях по теме «Числа и вычисления. Выражения и их преобразования» представлен краткий теоретический материал по соответствующим вопросам рассматриваемой темы; разобраны решения олимпиадных задач школьных и муниципальных математических олимпиад для учащихся 9-11 классов; составлен перечень задач для самостоятельного решения. Представленные методические рекомендации полезны учащимся 9-11 для подготовки к олимпиадам по математике в дистанционном формате обучения.

Пояснительная записка

Методические рекомендации по теме «Числа и вычисления. Выражения и их преобразования» составлены с целью расширения и углубления знаний учащихся по рассматриваемым вопросам указанной темы, формирования познавательных УУД учащихся и реализацию их интеллектуальных и творческих способностей.

В Методических рекомендациях по теме «Числа и вычисления. Выражения и их преобразования» подобран и систематизирован теоретический материал таким образом, что бы учащиеся самостоятельно могли получать знания, выходящие за рамки школьного курса математики; решать олимпиадные задачи по данной тематике.

Для достижения поставленных целей решаются следующие задачи: развивать качества мышления, характерные для математической деятельности; сформировать у учащихся устойчивый интерес к математике; сформировать представление о математике как части общечеловеческой культуры.

В методических рекомендациях рассмотрены следующие вопросы: простые и составные числа; разложение натурального числа на простые множители; наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное; основные признаки делимости. Приведены решения типовых задач по указанной теме; задачи для самостоятельного решения.

Содержание

Введение

Актуальность работы. Выявление познавательных интересов и потребностей учащихся, развитие мыслительных способностей, активизации самостоятельной работы.

Цель работы: разработать методические рекомендации по теме «Числа и вычисления. Выражения и их преобразования» для участников математических олимпиад (9-11 классы) и их использование в практической работе.

Простые и составные числа. Разложение натурального числа на простые множители

Простые и составные числа

Теория чисел – раздел математики, в котором изучаются свойства чисел.
Одной из основных задач теории чисел является изучение свойств **целых чисел**.
Основной объект теории чисел – **натуральные числа** $N=\{n\}$
$N=\{n\}$:1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,…,n, …
Главное их свойство – **делимость**.
Каждое натуральное число, большее 1 делится, по крайней мере, на 1 и на само себя.
Если натуральные число, имеет ровно два различных делителя – единицу и само себя, то оно называется **простым.**
Простые числа: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, ...
Если у натурального числа имеются ещё какие-то целые делители, то такое число называется **составным**.
Составные числа: 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 22, 24, 25, 26 и т. д.
1 не считается числом ни простым, ни составным.

Малая теорема Ферма

Чтобы показать, что число является простым можно воспользоваться малой теоремой Ферма: если p – простое число, то для каждого целого числа a, не делящегося на p, a^p-a делиться на p, то есть

$$a^p \equiv a \pmod p \qquad (1)$$

Доказательство: если a делится на p, то $a^p-a=a(a^{p-1}-1)$ делится на p.
Выражение (1) эквивалентно выражению $a\cdot a^{p-1}\equiv 1\cdot a \pmod p$.
Если же a не делится на p, то наибольший общий делитель чисел a и p равен 1. Тогда выражение $a\cdot a^{p-1}\equiv 1\cdot a \pmod p$ эквивалентно выражению $a^{p-1}\equiv 1 \pmod p$.
Например:
$a=3$;

$p = 7$;
$a^{p-1} - 1 = 3^{7-1} - 1 = 3^6 - 1 = 729 - 1 = 728$;
число 728 делится на 7 без остатка;
$p = 7$ – простое число.

Разложение составного числа на простые множители

По определению составное число раскладывается в произведение двух меньших чисел. Эти числа не обязаны быть простыми. Если они составные, то их можно разложить дальше – до тех пор, пока не останутся только простые множители.
Например, число 1001 – составное: $1001 = 7 \cdot 143$.
Число 7 – простое и дальше не разлагается, а вот 143 разлагается в произведение двух простых чисел: $143 = 11 \cdot 13$.
В итоге получаем $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$.
Можно увидеть разложение другим способом: $1001 = 11 \cdot 91 = 11 \cdot 7 \cdot 13$.
Оба способа дают в разложении одинаковые сомножители, разница лишь в их порядке следования.

Существует теорема о **единственности разложения числа на простые множители (основная теорема арифметики)**: два разложения одного и того же числа на простые множители отличаются лишь порядком сомножителей.

Простых чисел бесконечно много
Доказательство Евклида

Пусть нам дали список из n простых чисел $p_1, \ldots, p_n$.
Покажем, что туда входят не все простые числа.
Для этого рассмотрим число $N = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_{n+1}$.
Это число не делится нацело ни на одно из $p_1, \ldots, p_n$ (остаток равен 1).
Значит, в разложение N на простые множители должны входить простые числа, отсутствующие в нашем списке.
Например, для списка из трёх простых чисел 2, 3, 5 получаем $N = 2 \cdot 3 \cdot 5 + 1 = 31$.
В данном случае N само оказалось простым числом, не входящим в список.
Например, $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 + 1 = 59 \cdot 509$, и мы получаем два простых числа (59 и 509), не входящие в список.

Числа Ферма

Так называют числа $2 + 1$, $2^2 + 1$, $2^4 + 1$, $2^8 + 1$, $2^{16} + 1$, $2^{32} + 1$, . . (показатель степени есть степень двойки).
Первые пять чисел действительно простые. Эйлер, однако, обнаружил, что уже шестое число $2^{32} + 1$ простым не является и делится на 641. Эйлер нашёл

его, предварительно доказав, что все делители числа $2^{32} + 1$ должны иметь вид $64k + 1$.

Взаимно простые числа

Два целых числа называются **взаимно простыми**, если у них нет общих делителей (не считая единицы).

Простое число p взаимно просто с любым числом, кроме тех, что делятся на p. Однако, взаимно простыми числами могут быть и два составных числа: например, $6 = 2 \cdot 3$ взаимно просто с $35 = 5 \cdot 7$.

Покажем, что при любых целых положительных n и k числа n и $kn + 1$ взаимно просты.
Будем рассматривать числа Ферма и покажем, что любые два из них взаимно просты.
В числе Ферма заменим $+1$ на -1, тогда такое число легко разложить на множители с помощью формулы разности квадратов.
Например, $2^8 - 1 = (2^4)\ 2 - 1^2 = (2^4 + 1)(2^4 - 1)$.
Продолжая раскладывать тем же способом, получаем $2^8 - 1 = (2^4 + 1)(2^4 - 1)$ $= = (2^4 + 1)(2^2 + 1)(2^2 - 1) = (2^4 + 1)(2^2 + 1)(2 + 1)(2 - 1)$.
Аналогично и для больших степеней: $2^{16} - 1 = (2^8 + 1)(2^4 + 1)(2^2 + 1)(2 + 1)(2 - 1)$.
Произведение первых k чисел Ферма почти равно следующему числу Ферма (меньше его на 2, поскольку содержит -1 вместо $+1$).
Теперь видно, почему числа Ферма взаимно просты: любой делитель d данного числа Ферма будет делителем любого следующего числа Ферма, уменьшенного на 2, и потому не может делить само это число Ферма.
Значит, любые два числа Ферма взаимно просты. А в их разложения на простые множители входят различные простые множители – и потому простых чисел бесконечно много.

Наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное

Наибольший общий делитель

Наибольшим общим делителем (НОД) чисел ***a*** и ***b*** называется наибольшее число, на которое ***a*** и ***b*** делятся без остатка.

Пример 1. Найти НОД чисел 24 и 18

Сначала разложим оба числа на простые множители:

24	2		18	2
12	2		9	3
6	2		3	3
3	3		1	
1				

Теперь перемножим их общие множители. Чтобы не запутаться, общие множители можно подчеркнуть. Подчеркиваем обе двойки:

24	$\underline{2}$		18	$\underline{2}$
12	2		9	3
6	2		3	3
3	3		1	
1				

Переходим к последнему множителю в разложении числа 24. Это множитель 3. Ищем такой же множитель в разложении числа 18 и видим, что там он тоже есть. Подчеркиваем обе тройки:

24	$\underline{2}$		18	$\underline{2}$
12	2		9	3
6	2		3	$\underline{3}$
3	$\underline{3}$		1	
1				

Итак, общими множителями чисел 24 и 18 являются множители 2 и 3. Чтобы получить НОД, эти множители необходимо перемножить:

$2 \times 3 = 6$

Значит НОД (24 и 18) = 6

Нахождение НОД для нескольких чисел

Наибольший общий делитель можно находить и для нескольких чисел, а не только для двух. Для этого числа, подлежащие поиску наибольшего общего делителя, раскладывают на простые множители, затем находят произведение общих простых множителей этих чисел.
Например, найдём НОД для чисел 18, 24 и 36
Разложим на множители число 18

$$\begin{array}{r|l} 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

Разложим на множители число 24

$$\begin{array}{r|l} 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

Разложим на множители число 36

$$\begin{array}{r|l} 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

Получили три разложения:

$2 \times 3 \times 3$

$2 \times 2 \times 2 \times 3$

$2 \times 2 \times 3 \times 3$

Теперь найдём и подчеркнём общие множители:

$\underline{2} \times \underline{3} \times 3$

$\underline{2} \times 2 \times 2 \times \underline{3}$

$\underline{2} \times 2 \times \underline{3} \times 3$

Мы видим, что общие множители для чисел 18, 24 и 36 это множители 2 и 3. Эти множители входят во все три разложения. Перемножив эти множители, мы получим НОД, который ищем:
$2 \times 3 = 6$
Получили ответ 6. Значит число 6 является наибольшим общим делителем чисел 18, 24 и 36. Эти три числа делятся на 6 без остатка:
$18 : 6 = 3$
$24 : 6 = 4$
$36 : 6 = 6$
НОД (18, 24 и 36) = 6

Наименьшее общее кратное

Наименьшее общее кратное (НОК) чисел $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ – это наименьшее число, которое кратно $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Другими словами, это такое наименьшее число, которое делится без остатка на число $\boldsymbol{a}$ и число $\boldsymbol{b}$.

Наименьшее общее кратное (НОК) чисел **9** и **12** – это наименьшее число, которое кратно **9** и **12**. Другими словами, это такое наименьшее число, которое делится без остатка на число **9** и на число **12.**

Для нахождения наименьшего общего кратного (НОК) можно пользоваться тремя способами. Первый способ заключается в том, что можно выписать первые кратные двух чисел, а затем выбрать среди этих кратных такое число, которое будет общим для обоих чисел и маленьким.

Первый способ нахождения НОК

В первую очередь, найдем первые кратные для числа 9. Чтобы найти кратные для 9, нужно эту девятку поочерёдно умножить на числа от 1 до 9. Получаемые ответы будут кратными для числа 9.

Кратные будем выделять синим цветом:

9 × 1 = 9
9 × 2 = 18
9 × 3 = 27
9 × 4 = 36
9 × 5 = 45
9 × 6 = 54
9 × 7 = 63
9 × 8 = 72
9 × 9 = 81

Теперь находим кратные для числа 12. Для этого поочерёдно умножим число 12 на все числа 1 до 12:

12 × 1 = 12
12 × 2 = 24
12 × 3 = 36
12 × 4 = 48
12 × 5 = 60
12 × 6 = 72
12 × 7 = 84
12 × 8 = 96
12 × 9 = 108
12 × 10 = 120
12 × 11 = 132
12 × 12 = 144

Теперь выпишем кратные обоих чисел:

$$\underbrace{9\quad 18\quad 27\quad 36\quad 45\quad 54\quad 63\quad 72\quad 81}_{\text{Кратные числа 9}}$$

$$\underbrace{12\quad 24\quad 36\quad 48\quad 60\quad 72\quad 84\quad 96\quad 108\quad 120\quad 132\quad 144}_{\text{Кратные числа 12}}$$

Теперь найдём общие кратные обоих чисел. Найдя, сразу подчеркнём их:

$$\underbrace{9\quad 18\quad 27\quad \underline{36}\quad 45\quad 54\quad 63\quad \underline{72}\quad 81}_{\text{Кратные числа 9}}$$

$$\underbrace{12\quad 24\quad \underline{36}\quad 48\quad 60\quad \underline{72}\quad 84\quad 96\quad 108\quad 120\quad 132\quad 144}_{\text{Кратные числа 12}}$$

Общими кратными для чисел 9 и 12 являются кратные 36 и 72. Наименьшим же из них является 36.

Значит наименьшее общее кратное для чисел 9 и 12 это число 36. Данное число делится на 9 и 12 без остатка:

$$36 : 9 = 4$$

$$36 : 12 = 3$$

$$\text{НОК } (9 \text{ и } 12) = 36$$

Второй способ нахождения НОК

Второй способ заключается в том, что числа, для которых ищется наименьшее общее кратное, раскладываются на простые множители. Затем выписываются множители, входящие в первое разложение, и добавляют недостающие множители из второго разложения. Полученные множители перемножают и получают НОК.

Применим данный способ для предыдущей задачи. Найдём НОК для чисел 9 и 12.

Разложим на множители число 9

$$\begin{array}{r|l} 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

Разложим на множители число 12

$$\begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

Выпишем первое разложение:

$$3 \times 3$$

Теперь допишем множители из второго разложения, которых нет в первом разложении. В первом разложении нет двух двоек. Их и допишем:

$$3 \times 3 \times 2 \times 2$$

Теперь перемножаем эти множители:

$$3 \times 3 \times 2 \times 2 = 36$$

Получили ответ 36. Значит наименьшее общее кратное чисел 9 и 12 это число 36. Данное число делится на 9 и 12 без остатка:

$$36 : 9 = 4$$

$$36 : 12 = 3$$

$$\text{НОК } (9 \text{ и } 12) = 36$$

Третий способ нахождения НОК

Есть и третий способ нахождения наименьшего общего кратного. Он работает при условии, что его ищут для двух чисел и при условии, что уже найден наибольший общий делитель этих чисел.

Данный способ разумнее использовать, когда одновременно нужно найти НОД и НОК двух чисел.

К примеру, пусть требуется найти НОД и НОК чисел 24 и 12. Сначала найдем НОД этих чисел:

$$\begin{array}{r|l} 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$2 \times 2 \times \cancel{2} \times 3 = 12$$

Теперь для нахождения наименьшего общего кратного чисел 24 и 12, нужно перемножить эти два числа и полученный результат разделить на их наибольший общий делитель.

Итак, перемножим числа 24 и 12

$$\begin{array}{r} \times\ 24 \\ \underline{12} \\ +\ 48 \\ \underline{24\ \ } \\ 288 \end{array}$$

Разделим полученное число 288 на НОД чисел 24 и 12

$$\begin{array}{r|l} -288 & 12 \\ \cline{2-2} \underline{24\ \ } & 24 \\ -48 & \\ \underline{48} & \\ 0 & \end{array}$$

Получили ответ 24. Значит наименьшее общее кратное чисел 24 и 12 равно 24

$$\text{НОК } (24 \text{ и } 12) = 24$$

Признаки делимости

1. На 2: последняя цифра числа четная. Например, 2098 делится на 2, так как 8 делится на 2. Число 1993 не делится на 2, так как 3 не делится на 2.
2. На 3: сумма цифр числа делится на 3. Например, 123 делится на 3, так как 1+2+3=6 и 6 делится на 3. Число 451 не делится на 3, так как 4+5+1=10 и 10 не делится на 3.
3. На 4: две последние цифры числа нули или образуют число, делящееся на 4. Например, 123416 делится на 4, так как 16 делится на 4.
4. На 5: последняя цифра числа 0 или 5.
5. На 6: число должно делиться на 3 и на 2, а это можно проверить с помощью признаков делимости на 2 и на 3. Например, 11142 делится на 6, так как 1+1+1+4+2=9 и последняя цифра, равная 2, четная.
6. На 8: три последние цифры числа нули или образуют число, делящееся на 8. Например, 12345112 делится на 8, так как 112 делится на 8.
7. На 9: сумма цифр числа делится на 9. Например, 5517 делится на 9, так как 5+5+1+7=18 и 18 делится на 9.
8. На 11: сумма цифр, стоящих на четных местах, отличается от суммы цифр, стоящих на нечетных местах, на число, которое делится на 11. Например, 72457 делится на 11, так как 2+5=7, 7+4+7=18 и разность 18-7=11 делится на 11. Число 284857 не делится на 11, так как 8+8+7=23, 2+4+5=11 и разность 23-11=12 не делится на 11.
9. На 25: число оканчивается на 00, 25, 50 или 75.

Примеры решения типовых задач

Задача 1 (9 кл.)

Найти двузначное число, равное удвоенному произведению его цифр

Решение

пусть x и y цифры искомого числа, тогда
$10x + y = 2xy$
$y = 2x(y - 5)$
отсюда следует, что y – четное число
причем $5 < y < 9$, тогда $y = 6$
$6 = 2x\cdot 1$, $x = 3$

Задача 2 (9-10 кл.)

Доказать, что числа 16, 1156, 111556,11115556, …,
каждое из которых, начиная со второго, получается из предыдущего числа, вставляя в середину число 15, будет квадратами целых чисел

Решение

$16 = 10^1+6$
$1156 = 10^3+10^2+5\cdot 10+6 = 1000+100+50+6$
$111556 = 10^5+10^4+10^3+5(10^2+10^1)+6 = 100000+10000+1000+500+50+6$
… … …
$1..15..6 = (10^{2n-1}+\ldots+10^n)+5(10^{n-1}+\ldots+10)+6=\frac{10^{2n}+4\cdot 10^n+4}{9}=\left(\frac{10^n+2}{3}\right)^2$

Проверка показывает, что, например, при подстановке $n = 2$ в полученную формулу, мы получим число 1156

Задача 3 (10 -11 кл.)

Простые числа p, q, r таковы, что $p+q+r= 118$, $p\cdot q+q\cdot r+r\cdot p = 2075$. Найдите $p\cdot q\cdot r$.

Решение
Сумма $p+q+r$ даёт число 118 – чётное. Значит простое число r должно быть равно 2
Если r=2, то $p+q$=116 отсюда p =116 – q
полученное выражение подставим в $pq+qr+rp = 2075$
$q(116-q)+2q+2(116-q) = 2075$
$q^2 - 116q + 1843 = 0$

$q_1 = 97$
$q_2 = 19$
Находим $p = 116 - q = 116\text{-}97 = 19$
Таким образом, $p = 19$; $q = 97$; $r = 2$
Проверяем: 19+97+2=118
$p \cdot q \cdot r = 19 \cdot 97 \cdot 2 = 3686$

Задача 4 (10-11 кл.)

Найти трехзначное число, равное сумме факториалов его цифр

Решение

Пусть $A = abc = 100a + 10b + c$ – искомое трехзначное число
Для определения его цифр составим уравнение
$abc = a! + b! + c!$ – число трехзначное
с учетом того, что 5! = 120, 6! = 720, 7! = 5040
одна цифра числа A не превосходит 6
поэтому число A не превосходит число 666 откуда следует,
что ни одна цифра числа A не превосходит 5, но
по крайней мере, одна из цифр a, b, c равна 5
В противном случае число
$a! + b! + c! \leq 4! + 4! + 4! = 72$ будет меньше любого трехзначного числа
из полученных ограничений следует
$a! + b! + c! \leq 5! + 5! + 5! = 360$
тогда искомое число
$abc = a! + b! + c! \leq 360$, тогда $a \leq 3$
докажем, что $a = 1$
действительно, при $a = 3$ число $3bc > 300$, так как одна из цифр равна 5,
а число $3! + 5! + 5! < 300$, то есть
при $a = 3$ $abc \neq a! + b! + c!$
если $a = 2$ и $b = c = 5$, то также $abc \neq a! + b! + c!$
следовательно, $a = 1$
только одна из цифр b или c равна 5
так как $a! + b! + c! = 1! + 5! + 5! = 241 > 1bc$
цифра $b \neq 5$, так как $a! + b! + c! = 1! + 5! + 4! = 125 < 15c$
таким образом, $a = 1$, $c = 5$
для определения цифры b
равенство$1b5 = 1! + b! + 5! = 121 + b!$ будет выполняться
если последняя цифра числа $121 + b!$ равняется 5
это возможно толь при $b = 4$
искомое число 145

Задача 5 (10-11 кл.)

Найти два числа, зная, что сумма частных от деления каждого из них на общий наибольший делитель равна 18, а их наименьшее кратное 975

Решение

пусть x и y – искомые числа, u – наибольший делитель этих чисел
тогда $x = uc_1$, $y = uc_2$ – взаимно простые положительные числа
наименьшее общее кратное чисел будет равно uc_1c_2
по условию $c_1 + c_2 = 18$, $uc_1c_2 = 975$
из этих равенств следует, что каждое из чисел c_1 и c_2 не превышает 17
и является делителем числа 975
$975 = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 13$
следовательно, $c_1 = 5$, $c_2 = 13$, $u = 15$
$x = 75$, $y = 195$

Задачи для самостоятельного решения

1. Доказать, что если натуральное число a не делится на 5, то $a^8 + 3a^4 - 4$ делится на 100 (9 класс)
2. Найти два числа, если сумма их 667, а частное от деления их ОНК на НОД равна 120 (9 -10 класс)
3. Доказать, что при любом натуральном m $\frac{m^3}{6} + \frac{m^2}{2} + \frac{m}{3}$ является целым числом (10 класс)
4. Признаки делимости на некоторое число M ($M \neq 1$) не зависят от порядка цифр числа. Доказать, что $M = 3$ или $M = 9$ (10 класс)
5. Дана последовательность нечетных чисел 1, 3, 5, 7, 9, …Эти числа объединяются в группы так, чтобы в первую группу входило число 1 во вторую группу (3, 5), в третью группу (7, 9, 11) и т. д. Доказать, что сумма чисел, входящих в n-ю группу, равна n^3 (11 класс)

Заключение

Подготовлены методические рекомендации по теме «Числа и вычисления. Выражения и их преобразования» для участников математических олимпиад (9-11 классы). Приведены решения типовых задач по указанной теме; задачи для самостоятельного решения.

Список используемых источников

1. Московские математические олимпиады 1993 – 2005 г. / Р. М. Федоров и др. Под ред. В. М. Тихомирова. – М.: МЦНМО, 2006. –456 с.
2. Агаханов Н. Х. Математика. Районные олимпиады. 6-11классы / Н. Х. Агаханов, О. К. Подлипский. – М. : Просвещение, 2010. – 192 с.
3. Математика в задачах. Сборник материалов выездных школ команды Москвы на Всероссийскую математическую олимпиаду / Под ред. А. А. Заславского, Д. А. Пермякова, А. Б. Скопенкова, М. Б. Скопенкова и А. В. Шаповалова. – М.: МЦНМО, 2009. – 488 с.