Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«АРМАВИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Институт прикладной информатики, математики и физики
Кафедра математики, физики и методики их преподавания

**Методы решения олимпиадных задач по теме
«Комбинаторно-логические задачи. Теория чисел»**

Составители: доцент кафедры математики, физики и МП, Козлов В.А.

Армавир, 2021

Содержание

Введение

Актуальность работы. Выявление познавательных интересов и потребностей учащихся, развитие мыслительных способностей, активизация самостоятельной работы.

Цель работы: разработать методические рекомендации по теме «Комбинаторно-логические задачи. Теория чисел» для участников математических олимпиад (9-11 классы) и их использование в практической работе.

1. Основные понятия и факты комбинаторики

Комбинаторные соотношения без повторений

Для подсчета числа вариантов в комбинаторных задачах существуют различные формулы, а все эти формулы основаны в конечном итоге на двух простых правилах, которые называются правилами произведения и суммы.

Правило произведения.

Если некоторый выбор может быть сделан «n» различными способами, а для каждого из этих способов некоторый второй выбор может быть сделан m различными способами, то число способов последовательного выполнения этих двух выборов равно произведению nm.

Задача 1.

Из города А в город В можно добраться пароходом, поездом, автобусом, самолетом; из города В в город С только пароходом и автобусом. Сколькими способами можно совершить путешествие по маршруту А - В - С?

Решение.

Очевидно, число различных путей из А в С равно $4 \cdot 2 = 8$, так как выбрав один их четырех возможных способов путешествий от А в В, имеем два возможных способа путешествия от В до С.

Решение задачи основано на правиле произведения.

Рассмотрим еще одну задачу, при решении которой используется это правило.

Задача 2.

В розыгрыше первенства страны по футболу принимают участие 16 команд. Сколькими способами могут быть распределены золотая и серебряная медали?

Решение.

Золотую медаль может выиграть одна из 16 команд. После того, как определен владелец золотой медали, серебряная медаль может достаться одной из 15 команд. Следовательно, общее число способов, которыми могут быть распределены золотая и серебряная медали находятся из произведения $16 \cdot 15 = 240$.

Сформулируем теперь правило произведения (умножения) в общем виде: пусть требуется выполнить одно за другим К действий. Если первое действие можно выполнить p_1 способами, второе действие - p_2 способами, третье действие - p_3 способами и так до К-го действия, которое можно выполнить p_k способами, то все К действий вместе могут быть выполнены (по правилу произведения)

$$p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_K \text{ способами.}$$

Правило суммы.

Другое общее правило имеет вид: если некоторый выбор может быть сделан m различными способами, а второй выбор – n различными способами (независимо от предыдущих), то общее число способов, которыми может быть выполнен какой-нибудь один из этих выборов, равно сумме m + n.

Задача 3.

На блюде лежит 8 яблок и 6 груш. Сколькими способами можно выбрать один плод?

Решение.

8 + 6 = 14 (способов).

Задача 4.

Из города А в город В ведет К дорог, в город Р – С дорог. В город Н из города А ведет Х дорог, а из города Р – У дорог. Города А и Р дорогами не соединяются. Сколько различных автобусных маршрутов можно провести между городами В и Н?

Решение.

Рассмотрим всевозможные маршруты, идущие из В в Н через А. Из В в А ведет К дорог, а из А в Н – Х дорог. Каждую дорогу, выходящую из В в А можно комбинировать с любой дорогой входящей в Н из А. Поэтому общее число различных маршрутов, идущих из В в Н через А, находится по правилу произведения. Оно равно К ·Х. Аналогично подсчитывается число различных маршрутов, идущих из В в Н через Р. Общее число различных маршрутов находится по правилу произведения: оно равно С·У. Итак, всякий автобусный маршрут, соединяющий В и Н, должен проходить или через А или через Р. общее число различных маршрутов находится по правилу сумму КХ + СУ.

Размещения.

Определение 1. Пусть дано конечное множество М, состоящее из m элементов. Размещением из m элементов по n элементов называют всякое упорядоченное подмножество множества М, состоящее из n элементов (n ≤ m). Число различных размещений из m элементов по n элементов обозначается символом A_m^n.

Теорема 1. Число различных размещений из m элементов по n элементов равно произведению n последовательных натуральных чисел начиная от m до m – n + 1 включительно.

$$A_m^n = m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1), \tag{1}$$

n – сомножителей.

$$A_m^n = \frac{m!}{(m-n)!}$$

Задача 5.

В классе m мест. Каким числом способом можно рассадить в нем n учеников (n < m)?

Решение.

Представим себе, что ученики входят в класс по одному. Тогда у первого есть m возможностей выбрать место, у второго остается (m – 1) возможностей, для третьего – (m – 2) и так далее. Перед входом последнего ученика в классе останется m – (n – 1) место. Используя правило произведения получим, что число способов выразится произведением:

$$m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)$$

Зная теорему 1, это число можно было сразу определить по формуле 1.

Перестановки.

Определение 2. Перестановками из n элементов называют различные упорядочения данного конечного множества, состоящего из n элементов. Число возможных различных перестановок из n элементов обозначается символом P_n.

Теорема 2. Число различных перестановок из n элементов равно произведению всех последовательных целых чисел, начиная от n до 1 включительно:

$$P_n = n(n-1)\ldots 2\cdot 1 = n! \qquad (2)$$

Следует отметить, что перестановки – частный случай размещений, а именно при n = m, т.е.

$$P_m = A_m^m = \frac{m!}{0!} = m!$$

Можно сделать и обратное, выразив число размещений через число перестановок:

$$A_m^n = \frac{P_m}{P_{m-n}} = \frac{m!}{(m-n)!} \qquad (3)$$

Задача 6.

Сколькими способами можно разместить на полке 4 книги (обозначим их А, В, Д, С)?

Решение.

$$P_4 = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 = 24.$$

Сочетания.

Определение 3. Число всех возможных сочетаний из m элементов по n элементов (1 ≤ n ≤ m) равно произведению n последовательных натуральных чисел от m до m – n + 1, деленному на произведение n последовательных натуральных чисел от n до 1.

$$C_m^n = \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n(n-1)\ldots 2\cdot 1} \qquad (4)$$

или

$$C_m^n = \frac{A_m^n}{P_n} \qquad (5)$$

Формулу (4) обычно приводят к более удобному для записи виду, умножая числитель и знаменатель на произведение всех натуральных чисел от m – n до1 включительно. Тогда мы приходим к формуле:

$$C_m^n = \frac{m!}{n!(m-n)!} \quad (m > n) \tag{6}$$

или

$$C_m^n = \frac{P_m}{P_n \cdot P_{m-n}} \tag{7}$$

Примечание. $C_m^m = 1$, это следует из формулы (4), а из формулы (6) при принятом условии, что 0! = 1. $C_m^0 = 1$ - число пустых подмножеств в данном. Кроме этого для сочетаний справедливы следующие две формулы:

$$C_m^n = C_m^{m-n} \tag{8}$$

и

$$C_m^n = C_{m-1}^n + C_{m-1}^{n-1} \tag{9}$$

Комбинаторные соотношения с повторениями.

Элемент декартова произведения $X_1 \cdot X_2 \cdot \ldots \cdot X_k$ назовем кортежем длины K, составленным из элементов множеств $X_1,\ X_2, \ldots, X_k$. Может случиться, что все эти множества равны X. Тогда $(X_1, X_2, \ldots, X_k)$ называется кортежем длины K, составленным из элементов множества X. Элемент x_i (1 ≤ i ≤ k) называют i-ой компонентой или i-ой координатой картежа $(X_1, X_2, \ldots, X_k)$.

Определение. Два кортежа $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ называют равными, если они имеют одинаковую длину, причем их компоненты, имеющие одинаковые номера, равны. Итак, если α = $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ и β = $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$, то α = β в том и только в том случае, если k = m и $x_i = y_i$, для любого i, 1≤ i ≤ k.

Например, если

$$\alpha = (2^2,\ 3^2, 4^2), \quad \beta = (\sqrt{16}, \sqrt{81}, \sqrt{256}),$$

то α = β. Кортежи (a, b, c) и (a, b, c, a) не равны (длины различны). Кортежи (a, b, c) и (b, a, c) не равны (порядок их компонент различен).

Отличие кортежей от множеств:

а) в кортеже порядок важен;

б) в кортеже компоненты могут повторяться.

Размещения с повторениями.

Пусть имеется m непересекающихся множеств $A_1, A_2, \ldots, A_m$, каждое из которых содержит не менее чем n элементов. Для простоты мы будем называть элементы множества A_1 элементами 1-го сорта, элементы множества A_2 - элементами 2-го сорта, … , элементы множества A_m - элементами m-го сорта. Все элементы каждого подмножества, то есть элементы одного и того же сорта будем считать одинаковыми, или совпадающими между собой. Из элементов множества A (A $= A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_m$), то есть элементов входящих в различные его подмножества A_i (i=1,2…) можно составлять различные упорядоченные множества, содержащие множества, содержащие по n элементов в каждом. Такие упорядоченные множества принято называть размещениями с повторениями из элементов m сортов из n элементов, или, более коротко, просто размещениями с повторениями из m элементов по n.

Число различных возможных размещений с повторениями из m элементов по «n» элементов будем обозначать

$$\bar{A}_m^n.$$

Теорема 1. Число различных размещений с повторениями из m элементов по «n» элементов определяется по формуле:

$$\bar{A}_m^n = m^n \ (1).$$

Определение. Кортежи длины K, составленные из m-элементного множества X, называют размещениями с повторениями из m элементов по k. Их число обозначают $\bar{A}_m^k$ равно

$$\bar{A}_m^k = m^k \ \ (\text{n}(\text{x}\cdot\text{x}\cdot\ldots\cdot\text{x}) = (\text{n}(\text{X}))^k.$$

Задача 1.

Сколько четырехзначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, если цифры могут повторяться.

Решение.

Согласно условию, четырехзначные числа составляются из 6 цифр и число их можно определить с помощью формулы (1), то есть

$$\bar{A}_6^4 = 6^4 = 1296.$$

Но в это число попали числа, которые начинаются с 0. Их число равно

$$\bar{A}_6^3 = 6^3 = 216.$$

Следовательно, искомое число четырехзначных чисел равно

$$\bar{A}_6^4 - \bar{A}_6^3 = 1296 - 216 = 1080.$$

Перестановки с повторениями.

Для определения перестановки с повторениями рассмотрим множество, состоящее из «n» элементов, среди которых есть одинаковые.

Перестановкой с повторениями из «n» элементов называется любое упорядочение конечного множества, состоящего из «n» элементов, среди которых имеются совпадающие.

Пусть α – кортеж длины n, составленный из элементов m-элементного множества X = $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$. Каждому индексу K, 1 ≤ k ≤ m, соответствует число n_k, показывающее, сколько раз элемент x_k встречается среди компонента кортежа α. Выписывая по порядку эти числа, получаем новый кортеж $(n_1, n_2, \ldots, n_m)$, который называют составом кортежа α.

Например, если X = $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, а α = $(x_1, x_3, x_1, x_4, x_3, x_1)$, то кортеж α имеет состав (3, 0, 2, 1).

Определение. Два кортежа, имеющие один и тот же состав, могут отличаться друг от друга лишь порядком компонент. Их называют перестановками с повторениями данного состава.

Найдем формулу для отыскания числа перестановок с повторениями данного состава.

Прежде рассмотрим пример. Найдем число перестановок с повторениями из букв a, a, a, b, b, c,c. Нумеруем: $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, c_1, c_2$; затем делим не тривиальные 3! 2! 2!, поскольку их можно произвольно комбинировать друг с другом.

Теорема 2. Количество $P(n_1, n_2, \dots, n_m)$ перестановок с повторениями, имеющих состав $(n_1, n_2, \dots, n_m)$, находится по формуле:

$$P_m(n_1, n_2, n_3, \dots, n_m) = \frac{(n_1+n_2+n_3+\dots+n_m)!}{n_1!\, n_2!\, n_3! \dots n_m!} \qquad (2)$$

Задача 2.

Сколько «слов» можно получить, переставляя буквы в слове «математика»?

Решение.

В слове «математика» 6 различных букв м, а, т, е, и, к, каждая из которых повторяется соответственно: 2, 3, 2, 1, 1, 1 раз; следовательно, число «слов» можно определить по формуле (2):

$$P_6(2,3,2,1,1,1) = \frac{(2+3+2+1+1+1)!}{2!\cdot 3!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!} = \frac{10!}{2!\cdot 3!\cdot 2!} =$$
$$= 2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10 = 148800$$

Задача 3.

Сколькими способами можно расставить белые фигуры: 2 коня, 2 слона, 2 ладьи, 1 ферзя и 1 короля на первой линии шахматной доски?

Решение.

$$P\,(2, 2, 2, 1, 1) = \frac{8!}{2!\cdot 2!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 1!} = 5040.$$

Сочетания с повторениями.

В предыдущем пункте мы нашли число кортежей данного состава. Найдем теперь число различных составов, которые могут иметь кортежи длины n, состоящие из элементов множества X, содержащего m элементов.

Различные составы кортежей длины n, компоненты которых принадлежат данному m-элементному множеству называют сочетаниями с повторениями из m элементов по n.

Определение. Сочетанием с повторениями на m элементов по «n» элементов называется всякое множество, содержащее «n» элементов, каждый из которого является элементом одного из данных m сортов.

Например, из трех элементов a, b, c, можно образовать такие сочетания с повторениями по два элемента:

aa, ac, bc,

ab, bb, cc.

Число различных возможных сочетаний с повторениями будем обозначать символом

$$\bar{C}_m^n.$$

Теорема 3. Число составов кортежей длины n, компоненты которых принадлежат данному m-элементному множеству X, равно:

$$\bar{C}_m^n = \frac{(m+n-1)!}{(m-1)!\cdot n!} \qquad (3)$$

Запишем еще одну формулу:

$$\bar{C}_m^n = C_{n+m-1}^{m-1} = C_{n+m-1}^n \qquad (4)$$

(она следует из сравнения формул (3) и (6)).

Задача 4.

Сколькими способами можно составить набор из 8 пирожных, если имеется 4 сорта пирожных?

Решение.

Поскольку в этой задаче порядок пирожных не играет роли, то каждый набор задается кортежем длины 8 из 4 элементов. Иными словами, нужно найти число сочетаний с повторениями из 4-х элементов по 8, имеем:

$$\bar{C}_4^8 = C_{11}^8 = \frac{11!}{8! \cdot 3!} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 165.$$

Значит существует 165 различных наборов.

Свойства чисел C_m^k:

1) $C_m^k = C_m^{m-k}$;

2) $C_m^0 + C_m^1 + C_m^2 + \cdots + C_m^n = 2^n$ (число подмножеств данного множества)

3) $C_m^k = C_{m-1}^{k-1} + C_{m-1}^k$, если $1 \le k \le m - 1$.

Из свойства 3 вытекает способ рекуррентного вычисления чисел C_m^k:

$$\begin{array}{c}
C_1^0 \quad C_1^1 \\
C_2^0 \quad C_2^1 \quad C_2^2 \\
C_3^0 \quad C_3^1 \quad C_3^2 \quad C_3^3 \\
C_4^0 \quad C_4^1 \quad C_4^2 \quad C_4^3 \quad C_4^4 \\
C_5^0 \quad C_5^1 \quad C_5^2 \quad C_5^3 \quad C_5^4 \quad C_5^5 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
1 \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}$$

Такую таблицу называют треугольником Паскаля.

Дополнение:$(a_1 + a_2 + \cdots + a_m)^n = \sum_{n_1+n_2+\cdots+n_m=n} P(n_1, n_2, \ldots, n_m)$.
Имеет место полиномиальная формула:

$$a_1^{n_1}\, a_2^{n_2} \ldots\, a_m^{n_m}.$$

Пример. $(a + b + c)^3 = \sum_{n_1+n_2+n_3=3} P(n_1, n_2, n_3)\, a^{n_1} b^{n_2} c^{n_3}$.

Кортежи (n_1, n_2, n_3) могут быть следующими: (3, 0, 0), (0, 3, 0), (0, 0, 3), (2, 1, 0), (2, 0, 1), (0, 2, 1), (1, 2, 0), (1, 0, 2), (0, 1, 2), (1, 1, 1) – всего 10.

$$\bar{C}_3^3 = C_5^3 = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{4 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 10.$$

2. Некоторые методы и примеры решения комбинаторно-логических задач

Подсчет вариантов с помощью графов. Таблица вариантов.

Эффективным приемом, организующим подсчет, является составление учащимися таблиц, построение графов. Графы, таблицы позволяют в наглядной форме представить идею комбинирования и процесс подсчета комбинаторных объектов. Поэтому использование этих методов в обучении комбинаторике оправдывается не только познавательными, но и педагогическими соображениями.

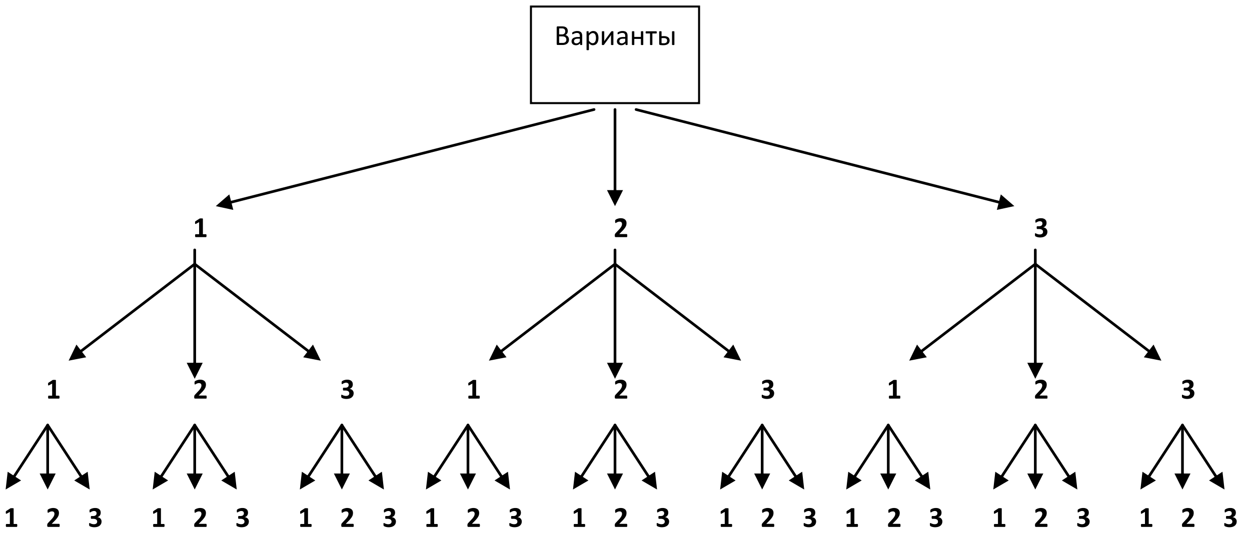

Таблица вариантов.

Пример 1. Сколько различных трехзначных чисел можно записать с помощью цифр 1, 2, 3 при условии, что цифры в числе могут повторяться?

Перебор вариантов можно организовать следующим образом. Выписать все числа, начинающиеся с цифры 1 в порядке их возрастания; затем – начинающиеся с цифры 2; после чего – начинающиеся с цифры 3. Таких комбинаций получим 27. При переборе легко было упустить какую-нибудь из них.

Нередко подсчет вариантов облегчают графы. Так называют геометрические фигуры, состоящие из точек (их называют вершинами) и соединяющих их отрезков (называемых ребрами графа). При этом с помощью вершин изображают элементы некоторого множества (предметов, людей, числовых и буквенных кодов и т.д.), а с помощью ребер – определенные связи между этими элементами.

Рассмотрим два вида графов:

1. Граф-дерево (называют за внешнее сходство с деревом).

С помощью дерева проиллюстрируем проведенный перебор вариантов в примере 1.

На первом месте в трехзначном числе может стоять одна из цифр 1, 2 или 3; на втором и третьем местах – (при условии, что цифры могут повторяться) также любая из трех цифр.

Таким образом, с помощью графа-дерева подсчет вариантов гораздо легче производить. Также вычерчивать дерево вариантов полезно, когда требуется записать все существующие комбинации элементов.

2. Полный граф. Используется для решения задач, в которых все элементы множества взаимосвязаны.

Пример 2. При встрече каждый из друзей пожал другому руку (каждый пожал каждому). Сколько рукопожатий было сделано, если друзей было четверо?

Четырех друзей поместим в вершины графа и проведем все возможные ребра. В данном случае отрезки-ребра обозначают рукопожатия каждой пары друзей.

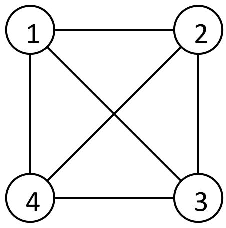

Рис.1. Полный граф к примеру 2.

Из рис.1 видно, что граф имеет 6 ребер, значит, и рукопожатий было сделано 6.

Еще одним методом подсчета числа комбинаций является *таблица вариантов.* Ее можно использовать, когда составляемые комбинации состоят из двух элементов.

Пример 3. Записать всевозможные двузначные числа, используя при этом цифры 0, 1, 2 и 3. Подсчитать их количество N.

Для подсчета образующих чисел составим таблицу:

1-я цифра	2-я цифра			
	0	1	2	3
1	10	11	12	13
2	20	21	22	23
3	30	31	32	33

N=3·4=12

Логические методы решения задач

Пример 4. Рассмотрим следующие три теоремы:

«Квадрат длины стороны, лежащей против острого угла треугольника, меньше суммы квадратов длин двух других сторон этого треугольника».

«Квадрат длины стороны, лежащей против прямого угла треугольника, равен сумме квадратов длин двух других сторон этого треугольника» (теорема Пифагора).

«Квадрат длины стороны, лежащей против тупого угла треугольника, больше суммы квадратов длин двух других сторон этого треугольника».

Введем следующие обозначения:

A_1 : «В треугольнике угол α острый»;

A_2 : «В треугольнике угол α прямой»;

A_3 : «В треугольнике угол α тупой»;

B_1 : «$a^2 < b^2 + c^2$»;
B_2 : «$a^2 = b^2 + c^2$»;
B_3 : «$a^2 > b^2 + c^2$»,
где a, b, c - длины сторон треугольника, а α – его угол, лежащий против стороны длины a. Тогда сформулированные три теоремы можно записать символически: $A_1 \to B_1$, $A_2 \to B_2$, $A_3 \to B_3$.

Очевидно, что из трех посылок A_1, A_2, A_3 по меньшей мере одна истинна (угол α в треугольнике непременно должен быть либо острым, либо прямым, либо тупым), а следствия B_1, B_2, B_3 попарно исключают друг друга (в силу закона трихотомии для действительных чисел). Поэтому на основе теоремы об обратимости системы импликаций истинны и все три обратные импликации:
$B_1 \to A_1,\ B_2 \to A_2,\ B_3 \to A_3.$

Например, теорема, обратная теореме Пифагора, звучит так: «Если в треугольнике квадрат некоторой стороны равен сумме квадратов длин двух других его сторон, то этот треугольник прямоугольный, причем прямым углом является угол, лежащий против первой стороны».

Пример 5. По подозрению в совершенном преступлении задержали Брауна, Джона и Смита. Один из них был уважаемым в городе стариком. другой был малоизвестным чиновником, третий – известным мошенником. В процессе следствия старик говорил правду, мошенник лгал. а третий задержанный в одном случае говорил правду, а в другом - ложь. Вот, что они утверждали:

Браун: «Я совершил это. Джон не виноват».

Джон: «Браун не виноват. Преступление совершил Смит».

Смит: «Я не виноват, виновен Браун».

Определите имя старика, мошенника и чиновника, и кто из них виноват, если известно. что преступник один.

Решение. Введем следующие обозначения:
B: «Виноват Браун».
D: «Виноват Джон».
C: «Виноват Смит».

Тогда утверждения, высказанные задержанными, можно записать в виде конъюнкций: $B \wedge \overline{D}$, $\overline{B} \wedge C$, $B \wedge \overline{C}$, из которых, по условию задачи, две ложны, а одна истинна. Поэтому будет истинной формула

$$F \equiv (B \wedge \overline{D}) \vee (\overline{B} \wedge C) \vee (B \wedge \overline{C}).$$

Таблица истинности этой формулы имеет вид:

B	D	C	$\overline{B}$	$\overline{D}$	$\overline{C}$	$B \wedge \overline{D}$	$\overline{B} \wedge C$	$B \wedge \overline{C}$	F
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	1	0	0	1	1
1	0	1	0	1	0	1	0	0	1
1	0	0	0	1	1	1	0	1	1
0	1	1	1	0	0	0	1	0	1
0	1	0	1	0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	1	0	0	1	0	1
0	0	0	1	1	1	0	0	0	0

Отсюда видно. что формула F истинна в пяти из восьми занумерованных случаев. Случай 4 следует исключить из рассмотрения, так как здесь оказываются истинными две конъюнкции, а это противоречит условию задачи. В случаях 2, 3 и 5 оказываются истинными по два высказывания: B и D, B и C, D и C соответственно, что также противоречит условию задачи. Следовательно, справедлив случай 7, то есть преступник – Смит. Он – известный мошенник. и оба его высказывания ложны: $B \wedge \overline{C} \equiv 0$. При этом высказывания B и D ложны. Значит, истинна пара высказываний Джона, а у Брауна первое высказывание ложно, а второе истинно. Отсюда ясно, что Джон - уважаемый в городе старик, а Браун - малоизвестный чиновник.

3. Основные понятия и теоремы теории чисел

Делимость целых чисел

Определение. Целое число a делится на целое число $b \neq 0$, если $\exists c \in Z$: $a = b \cdot c$. Обозначается: $a \vdots b$. При этом используют следующие термины: a- делимое, b- делитель, c- частное.

Запись $b|a$ – читается: "b делит a". Отношение делимости $a \vdots b$ бинарное отношение в Z.

Свойства делимости.

1. Отношение делимости рефлексивно : $\forall a \in Z \quad a \vdots a,$ т. к. $a = a \cdot 1$.
2. Отношение рефлексивно транзитивно.
3. $\forall\, a \neq 0,\ a$ не делится на 0 (т. к. $\nexists q$: $0 \cdot q = a$).
4. Если $a \vdots b, b \vdots a,$ то лио $a = b,$ либо $a = -b,$ т. к. $|a| = |b|$. Такие числа называются *ассоциированными*.

Определение. Разделить с остатком $a \in Z$ на $b \in Z,\ b \neq 0,$ значит найти такие $q, r \in Z,$ что $a = bq + r, 0 \leq r < |b|$.

Здесь q – неполное частное; r – остаток.

Справедлива следующая основная теорема.

Теорема. Деление с остатком возможно и единственно.

Простые числа

Опр. Натуральное число p, делители которого исчерпываются числом 1 и p, называется простым.

Опр. Два числа называются взаимно простыми, если у них нет общих делителей, кроме 1.

Главным фактом теории чисел является основная теория арифметики, которая гласит, что любое составное число разлагается, причём единственным образом в произведение простых сомножителей (делителей).

Свойства простых чисел.

1. Наименьший, отличный от 1 положительный делитель целого числа a>1 есть простое число.

Доказательство. Пусть q- наименьший отличный от 1 делитель целого числа a>1.

Если q – составное, тогда $q = q_1 q_2$ и q – не есть наименьший делитель, т.к. $1 < q_1 < q$ и q_1 делит, очевидно a вместе с q.

2. Наименьший отличный от 1 положительный делитель составного числа a не превосходит $\sqrt{a}$: $q \leq \sqrt{a}$.

Доказательство. Пусть $a = qa_1, a_1 \geq q \Rightarrow qa_1 \geq q^2$, то есть $a \geq q^2 \Rightarrow q \leq \sqrt{a}$.

Основная теорема арифметики.

Теорема. Каждое натуральное число n либо простое, либо может быть записано в виде произведения простых чисел: $n = p_1 p_2 \dots p_k$. Эта запись единственна с точностью до порядка сомножителей.

Собрав вместе одинаковые простые множители и изменив обозначения, получим запись n в виде:

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k} \quad (*)$$

Определение. Разложение $(*)$ называют каноническим представлением числа n.

Пусть целые числа n и m записаны в виде

$$n = \pm p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}, \ m = \pm p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_k^{\beta_k},$$

если считать, что α_i и β_i могут быть и равны 0.

Определение. Наибольшим общим делителем чисел n и m будем называть число

$$\text{НОД}(n, m) = p_1^{\gamma_1} p_2^{\gamma_2} \dots p_k^{\gamma_k}, \text{ где } \gamma_i = \min(\alpha_i; \beta_i).$$

Наименьшим общим кратным:

$$\text{НОК}(n, m) = p_1^{\nu_1} p_2^{\nu_2} \dots p_k^{\nu_k}, \text{где } \nu_i = \max(\alpha_i; \beta_i).$$

Свойства НОД и НОК.

Ясно, что если $h = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ и $h \vdots d$, то $d = p_1^{\alpha_1'} p_2^{\alpha_2'} \dots p_k^{\alpha_k'}$, где $\alpha_i' \leq \alpha_i$, т.е. НОД делится на любой другой общий делитель.

1. $n \vdots$ НОД(n, m)
   $m \vdots$ НОД(n, m)
   Если d-делитель n и m, то
   НОД$(n, m) \vdots d$
2. НОК$(n, m) \vdots n$ и пусть $u \vdots n$.
   НОК$(n, m) \vdots m$ и пусть $u \vdots m$, то $u \vdots$ НОК.
   Любое общее кратное делится на НОК.
3. НОД$(n, m) \cdot$ НОД$(n, m) = nm$

Определение. Числа n, m-взаимно простые, если НОД$(n, m) = 1$.

Функция Эйлера.

Обозначим $\varphi(m)$- число классов вычетов взаимно простых с m, то есть число элементов приведенной системы вычетов по $mod\ m$. $\varphi(m)$- числовая функция, называемая функцией Эйлера. Выберем представители в $\mathbb{Z}_m$, (то есть числа): $1,2, \cdots, m-1$. Тогда $\varphi(m)$ - количество положительных чисел $\leq m$, взаимно простых с m.

Пример.

Если p- простое, то $\varphi(p) = p - 1$.

Теорема. (Эйлер) Если $(a, m) = 1$, то $a^{\varphi(m)} \equiv 1(mod\ m)$.

Пример. $m = 9, a = 2$.

Теорема (Теорема Вильсона). Если p- простое, то

$$(p-1)! \equiv -1(mod\ p)\ .$$

Числовые функции

Под числовыми функциями будем мы понимать функции, областью определения и множеством значений которых является множество натуральных чисел:

1. $r(n)$- колличество всех натуральных делителей числа n;
2. $\sigma(n)$- сумма всех натуральных делителей числа n;
3. $\varphi(n)$- функция Эйлера. $\varphi(n)$- количество натуральных чисел взаимно простых с n и меньших n.
   Функция $\mathrm{r(n)}$.
   Теорема. Если $n = {p_1}^{k_1} \cdots {p_m}^{k_m}$, то $r(n) = (k_1 + 1) \cdot \cdots \cdot (k_m + 1)$.

Пример._$r(60) = 12$. Это можно подсчитать по формуле и проверить непосредственно.

Функция $\sigma(n)$.

Теорема. Пусть $n = {p_1}^{k_1} \cdots {p_m}^{k_m}$.

Тогда

$$\sigma(\boldsymbol{n}) = \frac{{p_1}^{k_1+1}-1}{p_1-1} \cdot \frac{{p_2}^{k_2+1}-1}{p_2-1} \cdot \ldots \frac{{p_m}^{k_m}-1}{p_m-1}\quad .$$

Мультипликативные числовые функции.

Определение. Числовая функция $\theta(n)$ называется мультипликативной, если

1) $\theta(n)$определена $\forall n \in \mathbb{N}$, $\theta(1) = 1$.
2) $\forall n, m; (n, m) = 1;\ \theta(m \cdot n) = \theta(m) \cdot \theta(n)$.

Теорема. Если $n_1, \cdots, n_m$ попарно взаимно простые числа $(n_i, n_j) = 1, \forall i, j$ $\theta(n)$ – мультипликативная функция, то

$$\theta(n_1, \cdots, n_m) = \theta(n_1) \cdot \cdots \cdot \theta(m)$$

Следствие. Если

$$n = {p_1}^{k_1} \cdots {p_m}^{k_m}, \theta(n) - \text{ мультипликативная функция, то}$$
$$\theta(n) = \theta({p_1}^{k_1}) \cdots \theta({p_m}^{k_m}).$$

Теорема. Если $n = {p_1}^{k_1} \cdots {p_m}^{k_m}$, θ(n)- мультипликативная функция, то $\sum_{d/n} \theta(d) = \left(1 + \theta(p_1) + \cdots + \theta({p_1}^{k_1})\right) \cdots \left(1 + \theta(p_m) + \cdots + \theta({p_m}^{k_m})\right)$, где сумма распространяется на все делители d числа n.

4. Примеры решений типовых задач

Задача1. В футбольном чемпионате участвовало 16 команд. Каждая команда сыграла с каждой по одному разу. За победу команда получала 3 очка, за ничью – 1 очко, за поражение – 0 очков. Назовём команду успешной, если она набрала хотя бы половину от наибольшего возможного количества очков. Какое наибольшее количество успешных команд могло быть в турнире?

Ответ: 15.

Решение. Покажем, что все команды не могли быть успешными. Пусть не так, т.е. все команды стали успешными. За турнир одна команда набирает не больше, чем $15 \cdot 3 = 45$. Значит, чтобы команда стала успешной, ей нужно набрать хотя бы 23 очка. Значит, всего было разыграно хотя бы $23\ \cdot 16 = 368$ очков. С другой стороны всего было сыграно $\frac{16\ \cdot 15}{2} = 120$ матчей. В каждом матче разыгрываются не более трех очков, значит, всего на турнире было разыграно не более $120\ \cdot 3 = 360$ очков. Пришли к противоречию.

Пример. Пусть одна команда проиграла все матчи, а остальные 15 команд расставим по кругу. Пускай каждая команда выиграет у семи следующих за ней по часовой стрелке и проиграет оставшиеся матчи. Тогда у каждой из этих 15 команд будет по 24 очка, и они станут успешными. Возможны и другие примеры.

Задача 2. Можно ли расставить в вершинах пятиугольной призмы десять положительных чисел так, чтобы суммы чисел на каждой грани были одинаковы?

Ответ. Нет, нельзя.

Решение 1. Предположим, что такое возможно. Допустим, числа расставлены так, что их сумма на каждой грани равна S. Каждое из чисел находится либо на верхней грани, либо на нижней. Значит, сумма всех 10 чисел должна равняться 2S. С другой стороны, если взять две боковых грани, не граничащие между собой, сумма стоящих на них восьми чисел тоже должна быть равна 2S. Получается, что сумма двух оставшихся чисел должна равняться 0, что невозможно.

Решение 2. Предположим, что такое возможно. Допустим, числа расставлены так, что их сумма на каждой грани равна S. Пронумеруем боковые грани числами от 1 до 5. Рассмотрим верхнюю грань и грань №1 у них два общих числа, находящихся на верхней грани. Тогда сумма оставшихся трех чисел верхней грани равняется сумме двух чисел с грани №1, которые находятся так же на нижней грани. Аналогичное утверждение верно для всех пяти боковых граней. Тогда давайте просуммируем полученные равенства по всем пяти боковым граням. Тогда получится, что каждое число с верхней грани в сумме участвует 3 раза, а с нижней – 2. Получаем, что 3S = 2S, ну или что S = 0, что невозможно.

Задача 3. Найти все двузначные числа, квадрат которых оканчивается теми же двумя цифрами, что и само число.

Ответ: 25 и 76.

Решение. Пусть наше число x, тогда x и x^2 заканчиваются одинаковыми двумя цифрами, следовательно $x^2 – x = x(x - 1)$ делится на $100 = 5^2 \cdot 2^2$.Так как x и x - 1 взаимно просты, то одно из них делится на 4, а другое на 25. Чисел делящихся на 25 от 10 до 99 ровно три, это 25, 50 и 75. Тогда либо x, либо x+1 является одним из этих трех чисел. Значит всего у нас есть 6 случаев, и в четырех из них второй сомножитель не делится на 4. Значит нам подходят пары 24,25 и 75,76. В таком случае нашими числами могут быть только 25 и 76.

Задача 4. В королевстве Логрия живут рыцари. Любые два из них враждуют (в частности, сэр Гавейн враждует с сэром Ланселотом), дружат, или вовсе друг к другу безразличны. Друг врага рыцаря — враг этого рыцаря. Докажите, что хотя бы у одного рыцаря врагов больше, чем друзей.

Решение. Докажем, что Гавейн или Ланселот нам подойдут. Рассмотрим двух врагов – Гавейна и Ланселота. Друзья одного из них являются врагами другого. Пусть у первого k друзей, а у второго – l. Пусть $k \geq l$, тогда у второго хотя бы k + 1 враг, а $k + 1 > l$. Тогда у Ланселота врагов больше, чем друзей. Случай, когда $k \leq l$ рассматривается аналогично.

Задача 5. В клетках таблицы 3×3 расставлены числа так, что суммы чисел в каждой строке и в каждом столбце равны нулю. Каково наименьшее количество ненулевых чисел в таблице, если известно, что оно нечётно?

Ответ: 7.

Решение.

Предположим, что может быть меньше 7 ненулевых чисел в таблице. Заметим, что нулей в таблице должно быть четное количество. Тогда переберем 3 варианта:

0	**1**	**-1**
1	**0**	**-1**
-1	**-1**	**2**

1) Если в таблице ровно 8 нулей, то тогда 9-ое число не может быть ненулевым. Пришли к противоречию.
2) Если в таблице ровно 6 нулей, то найдется строка или столбец, в котором ровно 2 нуля. Тогда 3-е число в этом столбце или строке не может быть ненулевым. Пришли к противоречию.
3) Если в таблице ровно 4 нуля, то найдется строка или столбец, в котором ровно 2 нуля. Тогда 3-е число в этом столбце или строке не может быть ненулевым. Пришли к противоречию.

Значит, в таблице стоит не больше 2-х нулей, а значит не меньше 7 ненулевых чисел.

5. Задания для самостоятельного решения

Задача1. Изначально на столе лежали 10 куч конфет, в которых было 1, 2, . . . , 10 конфет соответственно. Малыш решил перераспределить конфеты. На каждой нечётной минуте он выбирает одну из куч и делит её на две кучи, в каждой из которых хотя бы по одной конфете. На каждой чётной минуте он выбирает две кучи и объединяет их в одну (таким образом, первым действием он делит кучу на две). Может ли в некоторый момент оказаться, что все кучи на столе содержат одно и то же количество конфет?

Задача 2. На доске написаны n различных целых чисел, любые два из них отличаются хотя бы на 10. Сумма квадратов трёх наибольших из них меньше трёх миллионов. Сумма квадратов трёх наименьших из них также меньше трёх миллионов. При каком наибольшем n это возможно?

Задача3. Коля и Дима играют в игру на доске 8 × 8, делая ходы по очереди, начинает Дима. Коля рисует в клетках крестики, а Дима накрывает прямоугольниками 1×2 (доминошками) пары соседних по стороне клеток доски. За свой ход Коля должен поставить один крестик в любую пустую клетку (т. е. в клетку, в которой ещё не нарисован крестик и которая ещё не покрыта доминошкой). Дима за свой ход должен накрыть доминошкой две соседних клетки (ещё не накрытые другими доминошками), в которых суммарно чётное число крестиков (0 или 2). Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из игроков имеет выигрышную стратегию?

Задача 4. Пусть p — простое число, большее 3. Докажите, что найдётся натуральное число y, меньшее p/2 и такое, что число py + 1 невозможно представить в виде произведения двух целых чисел, каждое из которых больше y.

Задача 5. Найдите хотя бы одно четырёхзначное число, обладающее следующим свойством: если сумму всех цифр этого числа умножить на произведение всех его цифр, то в результате получится 3990.

Задача 6. Множество A состоит из n различных натуральных чисел, сумма которых равна n^2. Множество B также состоит из n различных натуральных чисел, сумма которых равна n^2. Докажите, что найдётся число, которое принадлежит как множеству A, так и множеству B.

Заключение

Подготовлены методические рекомендации по теме «Комбинаторно-логические задачи. Теория чисел» для участников математических олимпиад (9-11 классы). Приведены решения типовых задач по указанной теме; задачи для самостоятельного решения.

Список использованных источников

1. Агаханов Н. Х. Математика. Районные олимпиады. 6-11классы / Н. Х. Агаханов, О. К. Подлипский. – М. : Просвещение, 2010. – 192 с.
2. Московские математические олимпиады 1993 – 2005 г. / Р. М. Федоров и др. Под ред. В. М. Тихомирова. – М.: МЦНМО, 2006. –456 с.
3. Математика в задачах. Сборник материалов выездных школ команды Москвы на Всероссийскую математическую олимпиаду / Под ред. А. А. Заславского, Д. А. Пермякова, А. Б. Скопенкова, М. Б. Скопенкова и А. В. Шаповалова. – М.: МЦНМО, 2009. – 488 с.