Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«АРМАВИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Институт прикладной информатики, математики и физики
Кафедра математики, физики и методики их преподавания

Лекции по математической логике: Алгебра высказываний

Учебно-методическое пособие для студентов программы «математика»

Автор: Козлов В.А.

Армавир – 2019

Содержание

Введение

Логика изучает умозаключения. Математическая логика изучает те умозаключения, которые делают математики и является при этом частью математики.

Математическая логика – современная, активно развивающаяся математическая теория, имеющая важное значение как для математики, так и обширных её приложений. Алгебра логики сама по себе и как часть дискретной математики лежит в основе информатики. Элементы информатики преподаются во всех школах. Логика высказываний и алгебра Буля лежит в основе всех языков программирования. Кроме того, применение методов математической логики часто дает прекрасные результаты, а иногда является основным инструментом при решении задач.

Использование методов математической логики позволяет работать творчески в любой области знаний.

Мышление отражает действительность, логическое мышление позволяет человеку принимать правильные решения и совершать правильные поступки. Принятие правильных решений требует знания не только законов и форм элементарного мышления, но и законов и форм системного мышления, т.е. построения системы научных знаний. Наш курс призван стимулировать этот процесс, так как общеизвестно, что человек, имеющий развитое логическое мышление, быстрее и продуктивнее выполняет любую работу, успешней в жизни.

Курс логики высказываний обладает высокой степенью интеграции. Он не предусмотрен в содержании математического образования основной школы, однако в силу универсальности своего применения и занимательности, будет интересен и полезен будущим учителям математики, информатики и не только.

1. История возникновения и формирования математической логики

Математическая логика - раздел математики, посвящённый изучению математических доказательств и вопросов, связанных с основаниями математики.

Математическая логика – современная, активно развивающаяся математическая теория, имеющая важное значение как для математики, так и обширных её приложений (например, алгоритмы, программирование, информатика).

Проследим кратко историю развития и причины, давшие толчок развитию математической логики.

Обычно в изучаемых логических умозаключениях и законах придаётся значение лишь форме суждений. Это позволяет из истинности или логичности одних суждений делать выводы об истинности или логичности других суждений, не учитывая их конкретного содержания.

Развитие и дальнейшее абстрагирование логики как научной теории, привело к необходимости создания собственной символики, языка. Введение символики позволило формулировать законы логики в самом общем виде, что в свою очередь привело к коренному пересмотру всей логики и к возможности применения к ней математических методов. Так возник новый раздел математики – математическая логика.

Первые шаги в создании математической логики были сделаны в XVII веке Г.В. Лейбницем. Дальнейшее продвижение в этой области было сделано уже в середине 19 – начале 20 веков. Оно связано с именами де Моргана (1806-1871), Дж. Буля (1815-1864), Шредера (1841-1902), Г.Фреге (1848-1925), Пирса (1839-1914), Пеано (1858-1932).

Формирование математической логики как области математики принято считать с момента выхода основополагающего труда А. Уайтхеда и Б. Рассела «Principia Mathematica» (1910-1913).

На рубеже 19-го – 20-го веков математика испытала серьёзный кризис, возникший при попытке систематизации математики. Этот кризис привёл к тому, что потребовалось пересматривать основания математики.

Математический мир был потрясён открытием парадоксов, т.е. рассуждений, приводящих к противоречиям.

Рассмотрим некоторые из них.

1. (Б. Рассел, 1902 г.). Мы рассматриваем множество – как совокупность объектов.

Заметим, что большинство множеств не является элементами самих себя (Пример: множество студентов – студентом не является). Но есть и такие, которые содержат себя как элемент: множество всех множеств.

Рассмотрим множество М, которое является множеством всех таких множеств Х, что Х не является элементом Х.

Вопрос: является ли М элементом самого себя?

Ответ: очевидно, и да и нет.

2. (Бурали – Форти , 1897 г.). Для любого порядкового числа существует порядковое число, его превосходящее. Однако, порядковое число, определяемое множеством всех порядковых чисел, является наибольшим числом.

Семантические парадоксы.

3. Парадокс лжеца.

Некто говорит: «Фраза, которую я сейчас произнесу, ложна». Если предположить, что это правда, то по смыслу это ложь. Если же предположить, что это ложь, то из того, что фраза ложная, получаем, что он сказал правду.

Этот парадокс лежит в основе ряда замечательных теорем математической логики.

4. Парадокс брадобрея.

Брадобрей бреет всех и только тех, кто не бреется сам. Бреет ли он себя? Очевидно, и да и нет.

5. Всякий браконьер, пойманный на месте преступления, приговаривался в некоторой стране к смертной казни. Однако правитель её издал указ, что любой браконьер, осуждённый судом, может выбрать вид казни: быть повешенным или обезглавленным. Осуждённому разрешалось сделать некоторое заявление, и, если оно окажется ложным, его повесят, а если истинным – ему отрубят голову. Один плут использовал эту последнюю возможность – быть повешенным, если он солжёт, и быть обезглавленным, если он скажет правду – заявив: «Я буду повешен». Сразу же возникает непредвиденная ситуация (указ короля в обоих случаях был бы нарушен).

Арифметические заблуждения.

6. Как известно всякое целое число может быть описано без помощи цифр, словами русского языка. Ясно, что чем больше число, тем больше слов требуется для описания. Опишем некоторое число таким образом: «Наименьшее из чисел, которое не может быть записано менее чем тринадцатью словами».

По всей видимости, это описание относится к совершенно конкретному числу. Может ли это число быть описано с помощью менее чем тринадцати слов? Ни да, ни нет.

Действительно, пусть это число m. Если «да», то m не наименьшее. «Нет», тоже невозможно, поскольку это число уже описано.

7. Парадокс, который возникает из-за употребления нечётко определённого слова «все»:

1. В этой тетради 597 страниц.
2. Автор этих записей – Кунфуций.
3. Утверждения 1,2,3 все ложны.

Что можно сказать об утверждении 3? Очевидно, 1 и 2 ложны, но 3 не истинно, ни ложно.

8. Небрежное обращение с бесконечностью, её свойствами может принести немалые неприятности. Примеры этого были обнаружены в теории множеств, математической логике. Приведем два примера из теории рядов.

$\mathrm{Ln}\ 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots$

$\mathrm{Ln}\ 2 = [(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \ldots) + (\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \ldots)] - 2\,(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \ldots) = \ldots = 0$

Ln 2 = 0   Ln 2 = 0, 69315

9. Следующий знаменитый ряд много забот доставлял Лейбницу:

$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$

Пользуясь законом ассоциативности получаем, с одной стороны

$(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \ldots = 0$

с другой

$1 - (1 - 1) - (1 - 1) - \ldots = 1.$

Теория рядов имеет специальные правила и ограничения.

Логические парадоксы, вызвав разделение математиков на фракции, противостоящие друг другу, по-прежнему требуют своего разрешения.

Большой вклад в развитие мат. логики как науки внесли Д.Гильберт, Гёдель, Пост, Чёрч, Н.И.Колмогоров, П.С. Новиков, Марков, Хаусдорф, Тарский, Банах и др.

2. Логические операции

Как уже говорилось, под множеством будем понимать собрание объектов. Объекты этого собрания называют элементами множества. Символы выражают отношения между элементами и множествами (принадлежит, не принадлежит). Символы $\subset$, $\not\subset$ - между множествами (включено, не включено).

Тот факт, что А и В один и тот же объект, обозначим как А = В.

Множество объектов $a1$, $a2$, …, an обозначается $\{\ldots\}$. В частности $\{x1y1\}$ – пара (неупорядоченная) объектов x,y.

Множество $\{x,x\}$ обозначается также через $\{x\}$. Заметим, $\{x,y\} = \{y,x\}$.

$\langle$в1,…,в$n\rangle$ – упорядоченная n-ка объектов в1, … , вn.

Основное свойство n-ок: $\langle b1,\ldots,bn\rangle = \langle c1,\ldots,cn\rangle$ тогда и только тогда, когда $b1 = c1$, … , $bn = cn$; в частности $\langle b1,b2\rangle = \langle b2,b1\rangle \Leftrightarrow \Leftrightarrow b1 = b2$.

Упорядоченные двойки называются упорядоченные пары.

Логикой высказываний называется учение о высказываниях и операциях над ними. Она имеет приложение в других отраслях науки и, кроме того, представляет самостоятельный интерес.

Итак, рассмотрим множество всевозможных утверждений на русском языке.

Определение. Высказыванием называют всякое утверждение, о котором можно определенно и объективно сказать истинно оно или ложно.

Примеры.

1. Луна – спутник Марса.
2. Эти треугольники подобны.
3. В романе «Евгений Онегин» 563 867 букв.

В связи с этим определением, всякий математический текст можно рассматривать как набор некоторым образом связанных между собой высказываний. Например, аксиома и теорема – это высказывание, а доказательство – последовательность, определенным образом, связанных высказываний.

В математике истинность или ложность высказываний не является очевидной, а устанавливается с помощью доказательств, опирающихся на ранее доказанные утверждения, либо принимающихся по общему соглашению.

Так, признавая какое-либо утверждение евклидовой геометрии истинным, мы должны считать истинными и аксиомы Евклида.

Таким образом, истинность высказывания в значительной мере определяется его связями с другими высказываниями, истинность которых установлена.

Мы условно будем различать простые и сложные высказывания. Сложные – это те, что образованы из нескольких высказываний с помощью логических операций. Логические операции будут также определены позже. Простые - нельзя представлять подобным образом.

При изучении высказываний в математической логике отвлекаются от конкретного содержания высказываний (абстрагируются) и интересуются лишь вопросом: истинным или ложным является оно? Таким образом, о высказывании A говорят, либо «Значение истинности высказывания A есть истина», либо «Значение истинности высказывания A есть ложь». Будем обозначать истину цифрой 1, а ложь – 0.

<u>Определение.</u> Значение истинности высказывания A равно 1, если A – истинное высказывание и 0, если A – ложно. Другие обозначения: И, Л.

Мы будем различать фиксированные, т.е. имеющие постоянное значение истинности высказывания и переменные высказывания – переменную величину, принимающую значения на множестве всех высказываний.

Буквы A, B, C, … (начальные буквы латинского алфавита) – будут обозначать фиксированные высказывания; X, Y, Z, … (последние буквы латинского алфавита) – будут обозначать переменные высказывания. Возможно употребление индексов. Переменные X, Y, Z, … - называют высказывательными переменными (пропозициональные переменные).

В алгебре высказываний роль связок играют упомянутые ранее логические операции; другое название – операции. Эти операции позволяют из имеющихся высказываний строить новые.

Пусть нам дано множество высказываний А, В, С, …

<u>Определение</u>. <u>*Отрицанием*</u> высказывания А будем называть высказывание, обозначенное через $\bar{A}$, которое истинно, когда А - ложно, и ложно, когда А – истинно. Эта операция определяется таблицей, называемой таблицей истинности:

A	$\bar{A}$
1	0
0	1

$\bar{A}$ - произносится «не А». Другое обозначение $\rceil A$.

Операция отрицания соответствует логической связке «не» и ставит в соответствие всякому высказыванию А – высказывание $\bar{A}$. (Унарная операция).

<u>Определение</u>. <u>*Конъюнкцией*</u> высказывания А и В, называют новое высказывание, обозначаемое $A \wedge B$ («А и В»), значение истинности которого определяется таблицей:

A	B	$A \wedge B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Таким образом, высказывание $A \wedge B$ истинно $\Leftrightarrow$, когда оба высказывания А и В – истинны. В остальных случаях оно ложно. Операция конъюнкции отвечает связке «и» и ставит в соответствие паре высказываний А и В новое высказывание $A \wedge B$. Др. обозначение А.

<u>Определение</u>. <u>*Дизъюнкцией*</u> высказываний А и В называется высказывание, обозначаемое через $A \vee B$ («А или В»), значение истинности которого определяется таблицей:

A	B	$A \vee B$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Высказывание $A \vee B$ ложно тогда и только тогда, когда оба высказывания A и B ложны, во всех остальных случаях оно истинно. В соответствии с этим, будем считать, что, например, высказывание «в ΔABC угол A острый или угол B острый» - всегда истинно.

В разговорной речи связка «или» употребляется в двух смыслах – разделительном и соединительном. Однако здесь мы имеем не разделительное «или», которое понимается в смысле «либо-либо», когда A и B не могут быть оба истинны. В нашем случае утверждение «A или B» означает, что утверждается хотя бы одно из высказываний A или B. Дизъюнкция выполняет роль связки «или».

При надобности операции конъюнкции и дизъюнкции интерпретируют как логическое умножение и сложение соответственно; при этом для обозначения используют символы «.», «+».

Определение. *Импликацией* высказываний A и B называется высказывание, обозначаемое символом $A \Rightarrow B$ («если A то B»), значение истинности которого определяется таблицей:

A	B	$A \Rightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Т.е. высказывание $A \Rightarrow B$ ложно только в том случае, когда A – истинна, а B – ложно. Другие обозначения: «→», «⊃». Другие прочтения: «A имплицирует B», «A влечет B». Высказывание A называют посылкой, а B – следствием импликации.

Не только в математике, но и в умозаключениях вообще импликация играет важную роль: из того, что импликация $A \Rightarrow B$ – истинна и посылка A–

истинна, делают вывод, что В – истинно. С помощью импликации формулируются теоремы определения различных понятий, законы.

Заметим, однако, что в определении импликации имеется некоторое расхождение со здравым смыслом. А именно, определение допускает, что посылка А и следствие В могут быть не связаны по содержанию.

Примеры:

1. «Если 3<5, то у кошки 4 ноги».
2. «Если 3>5, то у кошки 4 ноги».
3. «Если 3>5, то у кошки 5 ног».

С точки зрения нашего определения высказывания (1) - (3) будут истинными. Таким образом, в формально-логических умозаключениях реализована формула, известная с древности: «Из ложного следует все, что угодно».

Заметим также, что математика и логика рассматривают импликацию только в истинностно-функциональном понимании, т.е. в высказывании $A \Rightarrow B$ не следует считать А причиной В, что существенно расширяет практику применения импликации. Так, с точки зрения законов причинности высказывания (1) - (3) следовало бы признать ложными. В известной мере, оправданием таблицы истинности служит желание, чтобы высказывание «если А и В, то В» было всегда истинным.

Определение. *Эквиваленцией* высказываний А и В называется высказывание, обозначаемое символом $A \Leftrightarrow B$ («А тогда и только тогда, когда В»), значение истинности которого определяется таблицей:

A	B	$A \Leftrightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Высказывание $A \Leftrightarrow B$ принимает значение истины только в том случае, когда оба высказывания А и В – истинны или оба – ложны. Другие обозначения: «~», «↔». Операция эквивалентности также играет важную роль в математике. Она применяется в том случае, когда из истинности высказывания А следует истинность высказывания В, и наоборот.

Итак, мы определили 4 логических операции, каждая из которых позволяет строить новые смежные высказывания. Многократное применение этих операций определяется индуктивно.

Каждую из логических операций можно рассматривать как операцию над символами 0 и 1. Так, например, дизъюнкция и импликация задают следующие правила:

$$0\vee 0 = 0,\quad 0\vee 1 = 1,\quad 1\vee 0 = 1,\quad 1\vee 1 = 1,$$

$$0\Rightarrow 0 = 1,\quad 0\Rightarrow 1 = 1,\quad 1\Rightarrow 0 = 0,\quad 1\Rightarrow 1 = 0.$$

Теперь поставим вопрос однозначности логических операций. В связи с тем, что мы пренебрегаем содержанием высказываний, а интересуемся лишь его истинным значением, то все высказывания разбиваются на 2 класса – истинные и ложные и, фактически, можно говорить, что мы имеем лишь два высказывания – истинное и ложное. Например, неразличимы высказывания: «Деревья растут корнями вверх», «2+2=5».

3. Понятие формулы

Для выражений, построенных из переменных высказываний с помощью логических операций, а также сложных высказываний мы будем использовать термин формула или пропорциональная форма.

Определение (индуктивное).

1. Всякая высказывательная переменная есть формула.
2. Если $F1$ и $F2$ – формулы, то $(F1)$, $(F1\wedge F2)$, $(F1\vee F2)$, $(F1\Rightarrow F2)$, $(F1\Leftrightarrow F2)$ – тоже формулы.
3. Только те выражения являются формулами, которые построены по правилам 1, 2.

Замечание. Обычно внешние скобки у формул опускают.

Скобки определяют порядок выполнения операций. В общем виде формулу будем записывать так: F$(X1, X2, \ldots, Xn)$. Например, F$(X1, X2, X3)$ = $(X1\vee X2) \Rightarrow X3$. Напомним, что здесь знак равенства заменяет способ «обозначает».

Если F$(X1, X2, \ldots, Xn)$ – формула алгебры высказываний то, подставив вместо высказывательных переменных конкретные высказывания, мы получим сложное высказывание F$(A1, A2, \ldots, An)$, логическое значение которого можно определить, если теперь вместо высказываний $A1, A2, \ldots, An$ вставить символы их логических значений – 0 или 1, а затем выполнить все логические операции, соответственно формуле.

Замечание. Определение предполагает, что высказывание также является формулой, ее частным случаем.

Итак, каждому набору истинностных значений высказывательных переменных в формуле соответствует некоторое истинностное значение этой формулы. Таким образом, всякая формула определяет некоторую истинностную функцию, которую можно представить таблицей истинности. Используются также сокращенные таблицы истинности.

Если в формуле имеется n переменных высказываний, то истинностная таблица для этой формулы будет иметь $2n$ строк, поскольку возможны $2n$ различных распределений истинностных значений переменных.

4. Тавтологии. Равносильные формулы

Определение. Формула называется тождественно истинной или тавтологией, если она обращается в истинное высказывание при всех наборах значений переменных. Обозначение: $\vDash$ F.

Пример: $X \Rightarrow X$, $X \vee \bar{X}$.

Тождественно ложной или противоречием называется формула, которая обращается в ложное высказывание при всех наборах значений высказывательных переменных.

Пример: $X \wedge \bar{X}$ $\quad$ $A \Leftrightarrow \bar{A}$

И ∧ Л $\quad$ И ∧ Л

Л ∧ И $\quad$ Л ∧ И

Заметим, что формула F является тавтологией тогда и только тогда, когда $\bar{F}$ есть противоречие.

Лемма. Если F и (F⇒G) – тавтологии, то и G – тавтология.

Если $\vDash$ F и $\vDash$ F ⇒ G, то и $\vDash$ G.

Доказательство.

Пусть F и F⇒G – тавтологии. Предложим противное: при некотором наборе истинностных значений переменных, входящих в F и G, формула G обращается в ложное высказывание. Поскольку по условию формула F – тавтология, то на этом наборе значений импликация F⇒G принимает значение 0. Это противоречит условию, что $\vDash$ F⇒G. Следовательно G – тавтология. Лемма доказана.

Определение. Формулы F$(X1, X2, \ldots, Xn)$ и G$(X1, X2, \ldots, Xn)$ называются равносильными F=G, если F и G принимают одинаковые значения истинности на одних и тех же наборах истинностных значений переменных.

Пример: $\overline{X \wedge Y} \equiv \bar{X} \vee \bar{Y}$

В соответствии с определением равносильности формул, два высказывания А и В равносильны А=В, если А и В имеют одинаковые значения истинности.

Равносильность является отношением эквивалентности. Покажем это. Действительно,

1. F ≡ F – отношение равносильности рефлексивно, очевидно.
2. Также, очевидно, если F ≡ G, то и G ≡ F, т.е. отношение равносильности транзитивно.

п.2. Теорема. Пусть F($X1$, $X2$, …, Xn) и G($X1$, $X2$, …, Xn) – две формулы алгебры высказываний. Тогда F ≡ G тогда и только тогда, когда F ⇔ G – тавтология.

Введем иерархию операций в формулах. Если в формуле отсутствуют скобки, то логические операции выполняются в следующем порядке: «–», «∧», «∨», «⇒», «⇔».

5. Свойства логических операций. Алгебры Буля

1. Коммутативность $A\wedge B \equiv B\wedge A$, $A\vee B \equiv B \vee A$.
2. Ассоциативность $(A\wedge B) \wedge C \equiv A \wedge (B \wedge C)$, $(A\vee B) \vee C \equiv A\vee(B \vee C)$.
3. Дистрибутивность $(A\wedge B)\vee C \equiv (A\vee C)\wedge(B\vee C)$, $(A\vee B)\wedge C \equiv (A\vee C)\vee(B\wedge C)$.
4. Идемпотентность $A\vee A \equiv A$, $A\wedge A \equiv A$.
5. $A\vee 1 \equiv 1$, $A\wedge 0 \equiv A$, $A\wedge 1 \equiv A$, $A\wedge 0 \equiv 0$.
6. $\bar{\bar{A}} \equiv A$, $A\vee\bar{A} \equiv 1$ (закон исключенного третьего),

   $A\wedge\bar{A} \equiv 0$.
7. Законы де Моргана:

   $\overline{A\vee B} \equiv \bar{A} \wedge\bar{B}$,

   $\overline{A\wedge B} \equiv \bar{A} \vee\bar{B}$,
8. Законы поглощения:

   $A\vee(A\wedge B) \equiv A$

   $A\wedge(A\vee B) \equiv A$

<u>Доказательство.</u>

$$A\vee(A\wedge B) \equiv (A\wedge 1)\vee(A\wedge B) \equiv A\wedge(1\vee B) \equiv A\wedge 1 \equiv A.$$

$$A\wedge(A\vee B) \equiv (A\wedge A)\vee(A\wedge B) \equiv A\vee(A\wedge B).$$

9) $A\Rightarrow B \equiv \bar{A}\vee B$

10) $A\Rightarrow B \equiv \bar{B}\Rightarrow\bar{A}$

<u>Доказательство.</u>

$$A\Rightarrow B \equiv \bar{A}\vee B \equiv \bar{A}\vee \bar{\bar{B}} \equiv \bar{\bar{B}}\vee\bar{A} \equiv \bar{B}\Rightarrow\bar{A}$$

11) $A\Leftrightarrow B \equiv (A\Rightarrow B)\wedge(B\Rightarrow A)$

12) $A\Leftrightarrow B \equiv B\Leftrightarrow A$

13) $A\vee B \equiv \overline{\bar{A}\wedge\bar{B}}$.

<u>Замечание</u>. Эти свойства справедливы и для формул.

Булевы алгебры

Часть операции конъюнкции и дизъюнкции интерпретируют как логические умножение и сложение «·», «+» соответственно или наоборот.

Данную аналогию позволяют провести приведенные свойства, очень похожие на свойства операций сложения и умножения чисел.

Система элементов, на которой определены операции сложения, умножения и отрицания, называется алгеброй Буля (булева алгебра), если операции удовлетворяют зависимостям:

1) $\bar{\bar{A}} \equiv A$;
2) $A \wedge B \equiv B \wedge A$;
3) $(A \wedge B) \wedge C \equiv A \wedge (B \wedge C)$;
4) $A \vee B \equiv B \vee A$;
5) $(A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C)$;
6) $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$;
7) $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$;
8) $\overline{A \vee B} \equiv \bar{A} \wedge \bar{B}$;
9) $\overline{A \wedge B} \equiv \bar{A} \vee \bar{B}$;
10) $A \vee A \equiv A$;
11) $A \wedge A \equiv A$;
12) $A \wedge 1 \equiv A$;
13) $A \vee 0 \equiv A$.

Понятие алгебры Буля имеет широкое распространение не только в математической логике.

Например, рассмотрим систему подмножеств некоторого множества М, на которой, как известно, определены операции пересечения и объединения множеств. Под операцией умножения для этой системы будем понимать пересечение множеств; сложения – объединение множеств. Операция отрицания представляет собой взятие дополнения до М (если X – подмножество, то $\bar{X}$= M \X). Роль единицы 1 припишем всему множеству М, а 0 – пустому подмножеству.

6. Логические законы. Логическое следование

Будем рассматривать формулы алгебры высказываний. Среди формул будем выделять тавтологии, т.е. тождественно истинные. Ясно, что тавтологий существует бесчисленное множество, но некоторые из них являются замечательными, наиболее употребимыми. Выделим эту группу тавтологий и назовем их законами. Естественно, это наше деление условно.

Заметим, что из свойств операций (равносильностей) легко получить законы.

<u>Например</u>, $X \Rightarrow Y \equiv \bar{X} \vee Y$ означает, что $(X \Rightarrow Y) \Leftrightarrow (\bar{X} \vee Y)$ – закон о связи эквиваленции и равносильности.

Итак, приведем некоторые законы, являющиеся основными в математической логике.

I. $X \Leftrightarrow X$ - закон тождества: «повторяясь в умозаключениях, высказывание сохраняет значение истинности».

II. $\overline{X \wedge \bar{X}}$ - закон противоречия: «противоположные высказывания не могут быть одновременно истинными».

III. $X \vee \bar{X}$ - закон исключения: «из двух противоположных высказываний, одно – обязательно ложно».

IV. $\bar{\bar{X}} \Leftrightarrow X$ - закон двойного отрицания: «отрицание отрицания - есть само высказывание». Определение двойного отрицания по Гегелю: «отрицание отрицания - есть нечто».

V. $\bar{X} \Rightarrow (X \Rightarrow Y)$ - «Из ложного следует все, что угодно».

VI. $X \wedge (X \Rightarrow Y) \Rightarrow Y$ - утверждающий способ: «если истинна посылка и сама импликация, то и следствие также истинно».

VII. $(X \Rightarrow Y) \wedge (Y \Rightarrow Z) \Rightarrow (X \Rightarrow Z)$ - закон силлогизма: «из истинности двух, связанных между собой импликаций следует истинность третьей импликации».

VIII. $(X \Rightarrow Y) \wedge (X \Rightarrow \bar{Y}) \Rightarrow \bar{X}$ - закон доказательства от противного: «если истинна некоторая импликация, и ложно следствие этой импликации, то ложна и посылка».

IX. $(X \Rightarrow Y) \Leftrightarrow (\bar{Y} \Rightarrow \bar{X})$ - закон контрапозиции.

Тождественно-истинные высказывания используются для выражения логически правильных форм рассуждений.

В качестве иллюстрации приведем решение задачи, восходящей к немецкому математику и логику Э. Шредеру: «Один химик, имея ввиду построить на этом дальнейшие заключения, выдвинул утверждение: «Соли, которые не окрашены, суть соли, которые не являются органическими телами, или суть органические тела, которые не окрашены». Другой химик с этим не согласился. Кто был прав?

A_1: «Нечто есть соль»;

A_2: «Нечто есть органическое тело»;

A_3: «Нечто окрашено».

Все рассуждения можно представить в виде сложного высказывания: $(A_1 \wedge \overline{A_3}) \Rightarrow ((\,(A_1 \wedge \overline{A_2}) \vee ((\,A_2 \wedge \overline{A_3}) \equiv \ldots 1$.

Следовательно, рассуждение первого химика было логически правильным, а его оппонент допустил ошибку.

«Если нечто есть соль и (это нечто) не окрашено, то (это нечто) есть соль и не есть органическое тело или есть органическое тело и не окрашено».

Логическое следование.

Определение. Формула $F(X1, \ldots, Xn)$ называется логическим следствием формул $G1(X1, \ldots, Xn), \ldots, Gm(X1, \ldots, Xn)$, если она обращается в истинное высказывание на всех тех наборах значений переменных, на которых в истинные высказывания обращаются формулы $G1, \ldots, Gm$.

Обозначение: $G1, \ldots, Gm \vDash F$.

Примеры:

1. Если A и B – высказывания, то $A \wedge B \vDash A$. Доказательство почти очевидно по определению.
2. $F \vDash F$
3. $F1, F2, \dots, Fn \vDash F1 \wedge F2 \wedge \dots \wedge Fn.$
4. Если $F \vDash G$, $F \vDash H$, то $F \vDash G \wedge H$ и $F \vDash G \vee H$.

Теорема. Формула $G(X1, \dots, Xn)$ тогда и только тогда является логическим следствием формулы $F(X1, \dots, Xn)$, когда $\vDash F \Rightarrow G$.

Доказательство.

1. Пусть $F \vDash G$. Покажем, что тогда $\vDash F \Rightarrow G$.
2. Пусть $G \vDash F \Rightarrow G$. Покажем, что $F \vDash G$.

Доказанная теорема свидетельствует о тесной связи между импликацией и логическим следованием и позволяет легко переходить от одного к другому и наоборот.

7. Нормальные формы.

Поставим задачу: Найти способ, позволяющий за конечное число шагов выяснить, является произвольная формула тождественно-истинной или нет.

Эта задача носит название «проблемы разрешимости». Она ставится не только для алгебры высказываний, но и для других логических систем. Для алгебры высказываний проблема решается достаточно просто: пусть F($X1, \dots, Xn$) – формула алгебры высказываний, содержащая переменные высказывания $X1, \dots, Xn$. Эта формула определяет некоторую функцию переменных $X1, \dots, Xn$, причем как переменные $X1, \dots, Xn$, так и функция F могут принимать лишь два значения; число возможных комбинаций значений переменных $X1, \dots, Xn$ конечно и равно в точности 2^n. Для каждой такой комбинации мы можем узнать значение формулы F, подставив вместо $X1, \dots, Xn$ их значения и вычислив затем значение формулы F, что можно выполнить за конечное число шагов. Узнав значение формулы F для каждой комбинации значений переменных $X1, \dots, Xn$, мы выясним, является ли она тождественно-истинной.

Такой прямой способ дает теоретическое решение проблемы, но практически такая проверка трудноосуществима из-за большого числа испытаний.

Приведем другой способ, суть которого состоит в приведении формулы к так называемой «нормальной форме».

Определение. Элементарным произведением будем называть конъюнкцию (произведение) переменных и их отрицаний.

Определение. Элементарной суммой будем называть дизъюнкцию (сумму) переменных и их отрицаний.

Вместе с этими понятиями будем рассматривать и сумму элементарных произведений, а также произведение элементарных сумм, которые будем употреблять и в тривиальном случае, т.е. в случае одного слагаемого или множителя соответственно.

Теорема 1. Элементарная сумма тождеств истинна тогда и только тогда, когда в ней содержится хотя бы одна пара слагаемых, одно из которых есть некоторое переменное, другое – его отрицание.

Доказательство. Достаточность. Пусть такая пара слагаемых нашлась. Тогда сумма примет вид: $X \vee \bar{X} \vee Y \vee Z \vee \ldots$ (слагаемых Y, Z, … может и не быть). Но $X \vee \bar{X} \equiv 1$.

Необходимость. Пусть элементарная сумма является тождественно истинной и в ней нет такой пары слагаемых. Распределим истинностные значения следующим образом: каждое слагаемое, не содержащее знака отрицания, заменим 0, а каждое переменное, стоящее под знаком отрицания – 1. Это возможно, так как ни одна переменная не входит в сумму вместе со своим отрицанием. Каждое слагаемое после этой замены примет значение 0. Тогда и вся элементарная сумма примет значение 0, что противоречит предположению о тождественной истинности формулы.

Теорема 2. Элементарное произведение тогда и только тогда является тождественно ложным, когда в нем содержится хотя бы одна пара множителей, из которых один является отрицанием другого.

Определение. Дизъюнктивной нормальной формой формулы F называется формула, равносильная F и, представляющая собой сумму элементарных произведений.

Теорема 3. Для любой формулы существует Д.Н.Ф.

Доказательство. Учитывая свойства логических операций, легко сделать вывод, что все логические операции можно свести к трем: $\wedge$, $\vee$, $-$. Поэтому, не ограничивая общности рассуждений, будем считать, что всякая формула содержит лишь эти операции. В связи с законами де Моргана, знак $-$ предположим отнесенным только к простым высказываниям.

Теперь заметим, что с формулой, составленной из переменных и их отрицаний при помощи операций $\wedge$ и $\vee$ можно производить такие же преобразования, как с алгебраическими выражениями. С помощью законов дистрибутивности можно раскрыть все скобки и представить всякую формулу в виде суммы элементарных произведений.

Пример.

$A\wedge(\overline{\bar{B}\wedge C})\wedge(P\vee Q)\equiv(A\wedge(\bar{B}\vee\bar{C})\wedge(P\vee Q))\equiv(A\wedge B\wedge P)\vee(A\wedge B\wedge Q)\vee(A\wedge\bar{C}\wedge P)\vee(A\wedge\bar{C}\wedge Q)$.
Д Н – форма получена.

Определение: Конъюнктивной нормальной формой формулы F называется равносильная ей формула, представляющая собой произведение элементарных сумм.

Теорема 4. Для каждой формулы существует конъюнктивная нормальная форма.

Доказательство аналогично Теореме 3.

Замечание. 1. Доказательства теорем 3 и 4 нельзя назвать строгими; они носят скорее описательный характер. Но вместе с тем они описывают способ получения КН и ДН – форм.

2. Для каждой формулы можно построить бесконечное множество КН и ДН – форм. Но все они равносильны.

Теперь мы можем описать новый метод решения проблемы разрешимости, отличный от таблицы истинности.

Пусть формула F – тождественно-истинна. Рассмотрим ее конъюнктивную нормальную формулу F'. Она имеет вид произведения $F' \equiv F1'\wedge \dots \wedge Fn'$, где каждый множитель Fi' является элементарной суммой.

Так как F – тождественно-истинна, то каждый множитель должен быть тождественно-истинной формулой. Но Fi' - элементарная сумма, а по теореме 1 об элементарных суммах, такая сумма может быть ТИ тогда и только тогда, когда она содержит некоторую переменную вместе с ее отрицанием. Поэтому, если формула F ≡ ТИ, то каждый множитель ее КН – формы содержит в качестве слагаемых какую-нибудь переменную и ее отрицание. Обратное также верно.

Таким образом, получен критерий тождественной истинности формулы: для того, чтобы формула была ТИ, необходимо и достаточно, чтобы каждый множитель ее конъюнктивной нормальной формы имел хотя бы два слагаемых, из которых одно является отрицанием другого.

По аналогии можно сформулировать и доказать <u>критерий тождественной ложности формулы</u>: для того, чтобы формула была ТЛ, необходимо и достаточно, чтобы каждое слагаемое ее дизъюнктивной нормальной формы содержало хотя бы одну пару множителей, из которых один является отрицанием другого.

Эти критерии дают полное решение «проблемы разрешимости».

<u>Примеры</u>.

1. Является ли ТИ формула: $Y \vee (X \wedge \bar{Y}) \vee (\bar{X} \wedge \bar{Y}) \equiv Y \vee (\bar{Y} \wedge (X \vee \bar{X})) \equiv (Y \vee \bar{Y}) \wedge (Y \vee X \vee \bar{X}) \equiv 1$
2. Будет ли ТИ формула: $(X \wedge Y \wedge Z) \vee (\bar{X} \wedge \bar{Y} \wedge Z) \vee (X \wedge \bar{Y} \wedge \bar{Z}) \equiv$

   Приведем к КН – форме (дистрибутивность):

   $\equiv (X \vee \bar{X} \vee X) \wedge (X \vee \bar{X} \vee \bar{Y}) \wedge (X \vee \bar{X} \vee \bar{Z}) \wedge (X \vee \bar{Y} \vee X) \wedge \ldots \wedge (X \vee \bar{Y} \vee \bar{Y}) \wedge (X \vee \bar{Y} \vee \bar{Z}) \wedge \ldots$

В множителе $(X \vee \bar{Y} \vee \bar{Z})$ – нет X и $\bar{X}$. Поэтому исходная формула не является ТИ.

8. Литература

1. Акимов, О.Е. Дискретная математика: логика, группы, графы. /О.Е. Акимов. – М.: Лаборатория базовых знаний, 2001. – 352с.
2. Аляев, Ю.А. Тюрин, С.Ф. Дискретная математика и математическая логика. — М.: Финансы и статистика, 2006. — 368с.
3. Андерсон, Д.А. Дискретная математика и комбинаторика: Пер. с англ./ Д.А. Андерсон – М.: Издательский дом «Вильямс», 2003 – 960с.
4. Босс, В. И. Лекции по математике. Т. 6: От Диофанта до Тьюринга. - М.: КомКнига, 2006. — 208с.
5. Верещагин, Н.К., Шень, А. Лекции по математической логике и теории алгоритмов. Ч.2 Языки и исчисления. М.:МЦНМО, 2000. – 288с.
6. Верещагин, Н.К., Шень, А. Лекции по математической. логике и теории алгоритмов. Ч.1 Начала теории множеств. М.: МЦНМО, 1999. – 128с.
7. Гаврилов, Г. П., Сапоженко, А. А. Задачи и упражнения по дискретной математике: Учеб. пособие. — 3-е изд., перераб.-М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. — 416с.
8. Галиев, Ш.И. Математическая логика и теория алгоритмов. - Казань, КГТУ, 2002. — 258с.
9. Горбатов, В.В. Логика: Учебное пособие / Московский государственный университет экономики, статистики и информатики. – М., 2005. – 213с.
10. Гуц, А.К. Математическая логика и теория алгоритмов. - Омск: Издательство Наследие. Диалог-Сибирь, 2003. — 108с.
11. Ершов, Ю.Л. Математическая логика: учеб. пособие / Ю.Л. Ершов, Е. А. Палютин. – 3-е изд., стер. – СПб. [и др.]: Лань, 2004. – 336с.
12. Игошин, В.И. Задачи и упражнения по математической логике и теории алгоритмов / В. И. Игошин. — 3-е изд., стер. — М.: Издательский центр «Академия», 2007. — 304с.
13. Игошин, В.И. Математическая логика и теория алгоритмов : учеб. пособие для студ. высш. учеб. заведений / В. И. Игошин. — 2-е изд., стер. — М. : Издательский центр «Академия», 2008. — 448с.

14. Козлов, В.А., Маловичко, Н.С. Булевы алгебры// Методический поиск: проблемы и решение №2 2013- С. 30-32.