Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«АРМАВИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Институт прикладной информатики, математики и физики
Кафедра математики, физики и методики их преподавания

Методические рекомендации к выполнению контрольной работы по дисциплине «Математика»

Составители: ст. пр. кафедры математики, физики и МП, Савадова А.А.,
ст. пр. кафедры математики, физики и МП, Насикан И.В.,
ст. пр. кафедры математики, физики и МП, Кривопустова Н.Ю.

Армавир, 2020

Контрольная работа – одна из основных форм проверки выполнения требований учебной программы по дисциплине за истекший период работы, получения объективных данных и определения уровня достижения всеми обучающимися знаний и умений, определенных программой, способствующая, вместе с тем, закреплению теоретических знаний и формирующая у обучающихся дополнительные навыки самостоятельного анализа теории и ее практического применения при решении задач.

Контрольная работа представляет собой письменный ответ на вопрос (решение задачи или выполнение конкретного задания), который рассматривается в пределах одной или нескольких тем учебной дисциплины. Содержание ответа на поставленный вопрос включает демонстрацию автором знания как теории и понятийного аппарата, так и понимание алгоритма решения задачи и навыка его реализации.

Раздел «Элементы линейной алгебры» дисциплины «Математика» для обучающихся направленности (профиля) «Экономика и технология» включает следующие темы:

1. Решение систем линейных уравнений методом последовательного исключения неизвестных
2. Матрицы. Операции над матрицами
3. Определители. Вычисление определителей
4. Обратная матрица
5. Решение матричных уравнений
6. Решение систем линейных уравнений в матричной форме.
7. Формулы Крамера
8. Ранг матрицы
9. Исследование систем линейных уравнений
10. Однородная система линейных уравнений. Фундаментальный набор решений.

При выполнении контрольной работы студентам необходимо строго придерживаться указанных ниже правил:

- контрольная работа должна быть выполнена в отдельной тетради, на обложке которой следует разборчиво написать название дисциплины, указать группу, фамилию, инициалы и вариант;
- решение задач необходимо проводить в последовательности, указанной в контрольной работе; при этом условие каждой задачи полностью переписывают перед ее решением, в тетради обязательно оставляют поля;
- решение задач следует излагать подробно и аккуратно, объясняя и мотивируя все действия по ходу решения и делая необходимые чертежи.

После получения прорецензированной работы - как зачтенной, так и незачтенной, - следует исправить отмеченные ошибки и недочеты и выполнить все рекомендации рецензента. Незачтенные задания необходимо выполнить заново. Работа над ошибками выполняется в той же тетради.

Контрольные задания.

Задания 1-10. Решить системы линейных уравнений методом Гаусса

1. $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 5x_4 = -3, \\ x_1 - x_2 + x_3 = -2, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 4. \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = -4, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = -6, \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -4. \end{cases}$$

3. $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 1, \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -5. \end{cases}$$

4. $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 8, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -8. \end{cases}$$

5. $$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4, \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 6, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 6, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 6. \end{cases}$$

6. $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 4, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 - 5x_4 = 4, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 2, \\ 4x_1 + 3x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3. \end{cases}$$

7. $$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_4 = 2, \\ 3x_1 - x_3 + x_4 = -3, \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 = -6. \end{cases}$$

8. $$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4, \\ x_2 - x_3 + x_4 = -3, \\ x_1 + 3x_2 - 3x_4 = 1, \\ -7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3. \end{cases}$$

9. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 4, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 - 5x_4 = 4, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 2, \\ 4x_1 + 3x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 = 2, \\ 3x_1 - 5x_2 - x_3 + 2x_4 = -1, \\ 6x_1 - 11x_2 - 3x_3 + x_4 = 2, \\ -2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$

Задания 11-20. Найдите значение матричного многочлена $f(A)$, если

11. $f(x) = 3x^3 + x^2 + 2$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$;

12. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

;

13. $f(x) = 2x^3 - x^2 + 3$, $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$;

14. $f(x) = 4x^3 + x^2 - 3$, $A = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$;

15. $f(x) = -3x^3 - 2x^2 + 1$, $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$;

16. $f(x) = -2x^3 + 5x^2 - 7$, $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$;

17. $f(x) = 5x^3 - 4x^2 + 6$, $A = \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$;

18. $f(x) = 6x^3 - 5x^2 - 4$, $A = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 9 & 6 \end{pmatrix}$;

19. $f(x) = 7x^3 + 2x^2 - 5$, $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

20. $f(x) = -5x^3 + 3x^2 - 4$, $A = \begin{pmatrix} -7 & 8 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

Задания 21-30. Вычислить определитель двумя способами: а) разложением по строке или столбцу; б) с использованием свойств определителя (получающиеся при решении определители третьего порядка вычисляйте по определению).

21. $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$

22. $\begin{vmatrix} 0 & 5 & 2 & 0 \\ 8 & 3 & 5 & 4 \\ 7 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

23. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 6 & 3 & 1 & -3 \\ 3 & 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}$

24. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 5 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 6 & 3 \\ 1 & 5 & -1 & 2 \end{vmatrix}$

25. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \\ 3 & 6 & -2 & 0 \end{vmatrix}$

26. $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

27. $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$

28. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \end{vmatrix}$

29. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \\ -6 & -6 & 9 & 3 \\ -4 & -4 & 2 & 8 \end{vmatrix}$

30. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & -2 \\ 4 & 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$

Задания 31-40. Найдите для заданной матрицы обратную: а) элементарными преобразованиями; б) с помощью присоединенной матрицы.

31. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

32. $\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

33. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 4 \\ -4 & -14 & -6 \end{pmatrix}$

34. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

35. $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 6 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

36. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

37. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

38. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

39. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

40. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

Задания 41-50. Решите матричное уравнение.

41. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}$

42. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

43. $\begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -4 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

44. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix}$

45. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -2 & -4 & -1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 6 & 3 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

46. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -3 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

47. $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

48. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

49. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

50. $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Задания 51-60. Решить систему линейных уравнений в матричной форме и при помощи формул Крамера.

51. $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 9, \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 3. \end{cases}$

52. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = -8, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = -3, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = -1. \end{cases}$

53. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 9, \\ 3x_1 - 5x_2 + x_3 = -4, \\ 4x_1 - 7x_2 + x_3 = 5. \end{cases}$

54. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 2, \\ 5x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1. \end{cases}$

55. $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 1, \\ 5x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$

56. $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 4, \\ 3x_1 + 5x_2 - 3x_3 = -1, \\ -2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 1. \end{cases}$

57. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1, \\ 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 = -2, \\ 9x_1 + 8x_2 + 7x_3 = 3. \end{cases}$

58. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 3, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -1, \\ x_1 + x_2 = 5. \end{cases}$

59. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2. \end{cases}$

60. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 5. \end{cases}$

Задания 61-70. Найдите ранг матрицы: а) методом элементарных преобразований; б) методом окаймляющих миноров.

61. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 13 \\ 3 & 1 & -7 & 9 \\ -1 & 2 & 0 & -10 \\ 2 & 1 & -5 & 5 \end{pmatrix}$

62. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 11 \\ 3 & -1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & -3 & -18 \\ 5 & 0 & -1 & -13 \end{pmatrix}$

63. $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & -10 \\ 3 & -1 & 1 & 10 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 7 & 10 & 6 & -10 \end{pmatrix}$

64. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

65. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

66. $\begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & 5 \\ 4 & -3 & -5 & -7 \\ 1 & 0 & 7 & 11 \end{pmatrix}$

67. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 5 & -3 & -1 & 8 \\ 3 & 8 & -9 & -5 \end{pmatrix}$

68. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$

69. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & 2 \\ 2 & 4 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

70. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

Задания 71-80. Найдите общее решение и фундаментальный набор решений для однородной системы линейных уравнений:

71. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 0, \\ 7x_1 + 8x_2 + 9x_3 = 0. \end{cases}$

72. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0, \\ 6x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$

73. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 0, \\ 7x_1 + 8x_2 + 10x_3 = 0. \end{cases}$

74. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$

75. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0, \\ 5x_1 - 3x_2 - 8x_3 = 0. \end{cases}$

76. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ 2x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 0. \end{cases}$

77. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0, \\ x_1 + 8x_2 - 5x_3 = 0. \end{cases}$

78. $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0, \\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 = 0. \end{cases}$

79. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - 5x_4 = 0. \end{cases}$

80. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ 2x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 0, \\ -3x_1 + 6x_2 - 9x_3 = 0. \end{cases}$

Методические указания к контрольной работе.

Решение задания типа 1-10.

Решить систему линейных уравнений методом Гаусса.

При выполнении данного задания можно столкнуться с совместной определенной, совместной неопределенной и несовместной системой линейных уравнений, подходы к решению каждой из которых имеют отличительные особенности. Продемонстрируем их соответственно в примерах 1, 2 и 3.

Пример 1. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -9 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 2 \\ 3x_1 - 6x_2 - x_3 = 25 \end{cases}.$$

Решение. Выпишем расширенную матрицу системы линейных уравнений:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & -6 & -1 & 25 \end{array}\right).$$

При помощи элементарных преобразований приведем данную матрицу к ступенчатому виду: зафиксируем первую строку, исключим из второй строки первую переменную (обратив в нуль элемент матрицы a_{21}), а из третьей строки – первую и вторую (обратив в нуль элементы матрицы a_{31} и a_{32}). Для этого умножим первую строку на -1 и сложим со второй, получим:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 0 & -3 & -2 & 11 \\ 3 & -6 & -1 & 25 \end{array}\right).$$

Умножим первую строку на -3 и сложим с третьей, получим:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 0 & -3 & -2 & 11 \\ 0 & -12 & -16 & 52 \end{array}\right).$$

Зафиксируем также и вторую строку. Умножим вторую строку на -4 и сложим с третьей, получим:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 0 & -3 & -2 & 11 \\ 0 & 0 & -8 & 8 \end{array}\right).$$

В матице, приведенной к ступенчатому виду число столбцов равно числу строк. Это означает, что система линейных уравнений совместная определенная, то есть имеет единственное решение. Таким образом, $x_3 = -1$. Из второй строки получаем:

$$-3x_2 - 2x_3 = 11;$$

$$-3x_2 - 2 \cdot (-1) = 11;$$

$$-3x_2 + 2 = 11;$$

$$-3x_2 = 9;$$

$$x_2 = -3.$$

Из первой:

$$x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -9;$$

$$x_1 + 2 \cdot (-3) + 5 \cdot (-1) = -9;$$

$$x_1 - 6 - 5 = -9;$$

$$x_1 - 11 = -9;$$

$$x_1 = 2.$$

Итак, (2;-3;-1).

Пример 2. Решить систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3-x_4+x_5=1 \\ x_1-x_2+x_3+x_4-2x_5=0 \\ 3x_1+3x_2-3x_3-3x_4+4x_5=2 \\ 4x_1+5x_2-5x_3-5x_4+7x_5=3 \end{cases}$$

Решение. Выпишем расширенную матрицу системы линейных уравнений:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 3 & -3 & -3 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & -5 & -5 & 7 & 3 \end{array}\right).$$

При помощи элементарных преобразований приведем данную матрицу к ступенчатому виду, предварительно для удобства вычислений поменяв местами первую и вторую строки:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & -3 & -3 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & -5 & -5 & 7 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 6 & -6 & -6 & 10 & 2 \\ 0 & 9 & -9 & -9 & 15 & 3 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & -3 & 5 & 1 \end{array}\right).$$

В матрице, приведенной к ступенчатому виду 5 столбцов и 2 строки, а это означает, что система линейных уравнений совместная неопределенная, то есть имеет бесконечно много решений. Для того, чтобы записать общий вид решений данной системы, необходимо положить свободными 3 переменные ($n-r=5-2=3$, где n - число переменных, r - число строк в матрице, приведенной к ступенчатому виду). Положим $x_3, x_4, x_5 \in \mathrm{R}$ и выразим x_1 и x_2 через них. Получим:

$$3x_2-3x_3-3x_4+5x_5=1;$$

$$3x_2=3x_3+3x_4-5x_5+1;$$

$$x_2=\frac{1+3x_3+3x_4-5x_5}{3}.$$

Отсюда:

$$x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 0;$$

$$x_1 = x_2 - x_3 - x_4 + 2x_5;$$

$$x_1 = \frac{1 + 3x_3 + 3x_4 - 5x_5}{3} - x_3 - x_4 + 2x_5;$$

$$x_1 = \frac{1 + 3x_3 + 3x_4 - 5x_5 - 3x_3 - 3x_4 + 6x_5}{3};$$

$$x_1 = \frac{1 + x_5}{3}.$$

Таким образом, общее решение исходной системы линейных уравнений при данном выборе свободных переменных имеет вид:

$$\left(\frac{1 + x_5}{3}; \frac{1 + 3x_3 + 3x_4 - 5x_5}{3}; x_3; x_4; x_5 \right), x_3, x_4, x_5 \in \mathbf{R}.$$

Используя общее решение, можно записать какое-нибудь частное решение системы. Например, при $x_3 = 1, x_4 = -1, x_5 = 0$ получим $x_2 = \frac{1 + 3 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) - 5 \cdot 0}{3} = \frac{1}{3}$, $x_1 = \frac{1}{3}$. И частное решение: $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; 1; -1; 0 \right)$.

Пример 3. Решить систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 2 \\ 5x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 4 \end{cases}.$$

Решение. Выпишем расширенную матрицу системы линейных уравнений:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 & -3 & 2 \\ 5 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & -3 & 4 \end{array} \right).$$

При помощи элементарных преобразований приведем данную матрицу к ступенчатому виду (зафиксируем первую строку; первую строку умножим на -3 и сложим со второй строкой, умноженной на 2):

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 & -3 & 2 \\ 5 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & -3 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & 7 & -9 & 1 \\ 5 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & -3 & 4 \end{array}\right) \sim$$ (первую строку умножим на -5 и сложим с третьей, умноженной на 2):

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & 7 & -9 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -1 & -7 \\ 2 & -1 & 1 & -3 & 4 \end{array}\right) \sim$$ (первую строку умножим на -1 и сложим с четвертой):

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & 7 & -9 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -1 & -7 \\ 0 & -2 & 2 & -4 & 3 \end{array}\right) \sim$$ (зафиксируем вторую строку; вторую строку умножим на 3 и сложим с третьей, умноженной на -7):

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & 7 & -9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -20 & 52 \\ 0 & -2 & 2 & -4 & 3 \end{array}\right) \sim$$ (вторую строку умножим на -2 и сложим с четвертой, умноженной на 7):

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & 7 & -9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -20 & 52 \\ 0 & 0 & 0 & -10 & 19 \end{array}\right) \sim$$ (зафиксируем третью строку; сложим третью строку с четвертой, умноженной на -2):

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & 7 & -9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -20 & 52 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 14 \end{array}\right).$$

В результате последовательного исключения неизвестных получили уравнение вида:

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 14.$$

Оно не имеет решений, а это означает, что и исходная система не имеет решений, то есть несовместна.

Решение задания типа 11-20.

Найти значение матричного многочлена $f(A)$, если $f(x) = -2x^2 + 5x + 9$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$.

Решение. $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot1+2\cdot3 & 1\cdot2+2\cdot0 \\ 3\cdot1+0\cdot3 & 3\cdot2+0\cdot0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$,

$$f(A) = -2A^2 + 5A + 9 = -2\cdot\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + 9\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 & -4 \\ -6 & -12 \end{pmatrix} +$$

$$+\begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 15 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 9 & -3 \end{pmatrix}.$$

Решение задания типа 21-30.

Вычислить определитель двумя способами: а) разложением по строке или столбцу; б) с использованием свойств определителя (получающиеся при решении определители третьего порядка вычисляйте по определению).

Пример 1. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -5 \end{vmatrix}$.

Решение. По формуле для вычисления определителя 2-го порядка имеем:

$$\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = -1\cdot(-5) - 4\cdot 2 = 5 - 8 = -3.$$

Пример 2. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -4 \\ 5 & -2 & -3 \end{vmatrix}$.

Решение. По формуле для вычисления определителя 3-го порядка имеем:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -4 \\ 5 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 1\cdot 3\cdot(-3) + 0\cdot 2\cdot(-2) + (-1)\cdot(-4)\cdot 5 - 0\cdot 3\cdot 5 - 1\cdot(-4)\cdot(-2) - (-1)\cdot 2\cdot(-3) =$$

$$= -9 + 0 + 20 - 0 - 8 - 6 = -3.$$

Пример 3. Вычислить определитель 4-го порядка $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 5 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 6 & 3 \\ 1 & 5 & -1 & 2 \end{vmatrix}$ методом разложения его по элементам второй строки.

Решение. $$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 5 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 6 & 3 \\ 1 & 5 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 5\cdot(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -1 & 6 & 3 \\ 5 & -1 & 2 \end{vmatrix} + 0\cdot(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 2 & 6 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)\cdot(-1)^{2+3}\cdot$$

$$\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix} + 0\cdot(-1)^{2+4}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 6 \\ 1 & 5 & -1 \end{vmatrix} = -5\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -1 & 6 & 3 \\ 5 & -1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix} = -5\cdot(-4) - 2 = 20 - 2 = 18.$$

Замечание. Можно было вычислить данный определитель, разложив его по элементам любой строки (столбца). Однако выбор второй строки представляется наиболее рациональным, поскольку в ней содержится наибольшее число нулей, что сокращает вычисления.

Установим некоторые свойства определителей n-го порядка, применение которых позволяет существенно упростить процесс вычисления определителя.

Свойство 1. Если какая-либо строка (столбец) определителя состоит из нулей, то и сам определитель равен нулю.

Свойство 2. При перестановке двух строк (столбцов) определитель меняет знак на противоположный.

Свойство 3. Определитель, содержащий две пропорциональные строки (два пропорциональных столбца), равен нулю.

Свойство 4. Общий множитель элементов любой строки (столбца) можно выносить за знак определителя.

Свойство 5. Если каждый элемент некоторой строки (столбца) представляет собой сумму двух слагаемых, то определитель может быть представлен в виде суммы двух определителей, в каждом из которых все элементы те же, что и в исходном определителе, за исключением элементов указанной строки (столбца). В первом определителе указанная строка состоит из первых слагаемых, во втором из вторых.

Например, $$\begin{vmatrix} b_{11}+c_{11} & b_{12}+c_{12} & \dots & b_{1n+}c_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Свойство 6. Определитель не изменится, если к элементам некоторой строки (столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умноженные на одно и то же число.

Свойство 7. Определитель не изменится, если его строки заменить столбцами, не меняя их порядка.

Свойство 8. Сумма произведений элементов какой-либо строки (столбца) определителя на алгебраические дополнения соответствующих элементов другой строки (столбца) равна нулю.

Свойство 9. Определитель произведения двух матриц равен произведению определителей этих матриц.

Формула разложения определителя по строке (или столбцу) принимает особенно простой вид, когда в этой строке (или столбце) все элементы, кроме одного, скажем a_{ij}, равны нулю. В этом случае $\Delta = a_{ij}(-1)^{i+j}M_{ij}$. Тем самым вычисление определителя n-го порядка сводится к вычислению единственного определителя (n-1) - го порядка M_{ij} . Хотя в заданном определителе может и не оказаться строки или столбца с нужным количеством нулей, тем не менее, всегда можно, не изменяя величины определителя, преобразовать его так, чтобы, в выбранной строке или выбранном столбце все элементы, кроме одного, обратились в нуль. Для этого достаточно использовать одно из вышерассмотренных свойств.

Пример 4. Вычислить определитель 5-го порядка $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$.

Решение. Во второй строке уже имеются два нуля, поэтому займемся именно этой строкой. Не изменяя величины определителя, преобразуем его так, чтобы во второй строке все элементы, кроме $a_{24} = 1$, оказались равными нулю. Для этого достаточно ко второму столбцу прибавить четвертый, умноженный на 2, а к третьему – четвертый, умноженный на -2. После этих преобразований получим определитель $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 7 & -2 & 1 \end{vmatrix}$, равный исходному. Разложим его по элементам второй строки. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 7 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{2+4} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 7 & 1 \end{vmatrix}$. В полученном определителе удобно взять второй столбец, так как в нем уже имеется один нуль. Преобразуя, получим определитель $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{vmatrix}$, по-прежнему равный исходному.

Разлагаем его по второму столбцу и находим
$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = (-1)\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 1.$$

Решение задания типа 31-40.

Найдите для заданной матрицы обратную: а) элементарными преобразованиями; б) с помощью присоединенной матрицы.

Пример 1. Найти A^{-1} для матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение. Запишем «сдвоенную» матрицу $G = (A|E)$ и с помощью элементарных преобразований над ее строками приведем ее к ступенчатому виду:

$$G = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -6 & -4 \end{array}\right).$$

Теперь приведем данную матрицу к виду $G' = (E\,|\,A^{-1})$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -6 & -4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6 & 4 \end{array}\right).$$

Таким образом, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$.

Сделаем проверку:

$$A^{-1}\cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Второй способ нахождения матрицы A^{-1}, обратной к невырожденной матрице A связан с использованием формулы

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ . & . & . & . \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Матрица $\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ . & . & . & . \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$, полученная транспонированием матрицы, составленной из алгебраических дополнений A_{ij} к элементам a_{ij} матрицы A, называется *присоединенной матрицей* к квадратной матрице A.

Пример 2. Вычислить при помощи формулы определитель матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ из предыдущего примера.

Решение. Найдем $\det A$:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -2 + 6 + 0 - 3 - 0 - 2 = -1 \neq 0$$

Так как $\det A \neq 0$, то матрица A^{-1} существует.

Найдем алгебраические дополнения ко всем элементам матрицы A:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1; \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -(-4) = 4 \quad ;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 3;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1; \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 5;$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 3;$$

$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -6;$

$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4.$

Найдем матрицу $A^{-1} = \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \\ -1 & 5 & 3 \\ 1 & -6 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$

Решение задания типа 41-50.

Решите матричное уравнение.

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

Решение. Запишем данное матричное уравнение в виде $AX = B$. Его решением является матрица $X = A^{-1}B$ (если существует матрица A^{-1}). Найдем обратную матрицу при помощи элементарных преобразований:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right).$$

Таким образом, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Вычислим $X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$

Матричные уравнения простейшего вида с неизвестной матрицей X записываются следующим образом:

$AX = B$,

$XA = B$,

$AXC = B$.

В этих уравнениях A, B, C, X - матрицы таких размерностей, что все используемые операции умножения возможны, и с обеих сторон от знаков равенства находятся матрицы одинаковых размерностей. Если в уравнениях $AX = B$ и $XA = B$ матрица A невырожденная, то их решения записываются соответственно следующим образом: $X = A^{-1}B$ и $X = BA^{-1}$. Если в уравнении $AXC = B$ матрицы A и C невырожденные, то его решение записывается так: $X = A^{-1}BC^{-1}$.

Решение задания типа 51-60.

Решить систему линейных уравнений в матричной форме и при помощи формул Крамера.

Пример 1. Решить систему линейных уравнений в матричной форме:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 9, \\ 7x_1 + 8x_2 = -6. \end{cases}$$

Решение. Данную систему линейных уравнений можно записать в матричной форме следующим образом:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ -6 \end{pmatrix},$$

то есть $AX = B$. Как было показано выше, решением этого уравнения является матрица вида $X = A^{-1}B$. Найдем A^{-1} с помощью присоединенной матрицы.

Вычислим $\det A$, разложив его по элементам третьей строки:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix} = 7 \cdot (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} + 8 \cdot (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 7 \cdot (-3) - 8 \cdot (-6) = -21 + 48 = 27 \neq 0$$

Так как $\det A \neq 0$ то матрица A^{-1} существует.

Найдем алгебраические дополнения ко всем элементам матрицы A:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} = -48; \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} = 24; \quad A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -3;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} = 42; \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} = -21; \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 6;$$

$$A_{13} - (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -3; \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 6; \quad A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -3.$$

Найдем матрицу $A^{-1} = \frac{1}{27} \cdot \begin{pmatrix} -48 & 24 & -3 \\ 42 & -21 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{16}{9} & \frac{8}{9} & -\frac{1}{9} \\ \frac{14}{9} & -\frac{7}{9} & \frac{2}{9} \\ -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \end{pmatrix}.$

Проверкой убеждаемся, что матрица A^{-1} была найдена правильно.

Найдем решение системы уравнений:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -\frac{16}{9} & \frac{8}{9} & -\frac{1}{9} \\ \frac{14}{9} & -\frac{7}{9} & \frac{2}{9} \\ -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{18}{9} \\ \frac{9}{9} \\ \frac{18}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, $x_1 = -2,\ x_2 = 1,\ x_3 = 2$.

Пример 2. Решить систему линейных уравнений с помощью формул Крамера:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 9, \\ 7x_1 + 8x_2 = -6. \end{cases}$$

Решение. Найдем определитель Δ основной матрицы системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix} = 27.$$

Так как $\Delta \neq 0$, то решение системы существует и единственно. Найдем определители $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$, подставляя столбец свободных членов $\begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ -6 \end{pmatrix}$ вместо первого, второго и третьего столбца определителя Δ соответственно:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 9 & 5 & 6 \\ -6 & 8 & 0 \end{vmatrix} = -6 \cdot (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} + 8 \cdot (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 9 & 6 \end{vmatrix} = -6 \cdot (-3) - 8 \cdot 9 = 18 - 72 = -54;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 4 & 9 & 6 \\ 7 & -6 & 0 \end{vmatrix} = 7 \cdot (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 9 & 6 \end{vmatrix} + (-6) \cdot (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 7 \cdot 9 + 6 \cdot (-6) = 63 - 36 = 27;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 4 & 5 & 9 \\ 7 & 8 & -6 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 9 \\ 8 & -6 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 9 \\ 7 & -6 \end{vmatrix} + 6 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -102 - 2 \cdot (-87) +$$

$$+ 6 \cdot (-3) = -102 + 174 - 18 = 54.$$

Отсюда получим решение системы уравнений:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-54}{27} = -2;$$

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{27}{27} = 1;$$

$$x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{54}{27} = 2.$$

Таким образом, $x_1 = -2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$ (как и при решении в матричной форме).

Решение задания типа 61-70.

Найдите ранг матрицы: а) методом элементарных преобразований; б) методом окаймляющих миноров.

Пример 1. Найти ранг матрицы методом элементарных преобразований:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 4 & 7 \\ 5 & 0 & 10 & 5 \end{pmatrix}.$$

Решение. Приведем с помощью элементарных преобразований данную матрицу к ступенчатому виду, то есть к виду, при котором крайний элемент каждой строки находится правее крайнего элемента предыдущей строки. Поменяем местами первую и вторую строки:

$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 4 & 7 \\ 5 & 0 & 10 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \\ 5 & 0 & 10 & 5 \end{pmatrix} \sim$ (первую строку умножим на -5 и сложим с третьей):

$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & -10 & -10 & -30 \end{pmatrix} \sim$ (вторую строку умножим на -10 и сложим с третьей):

$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Таким образом, мы получили ступенчатую матрицу с двумя ненулевыми строками. Ранг данной матрицы $r(A) = 2$.

Пример 2. Найти ранг матрицы методом окаймляющих миноров и указать один из базисных миноров:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 3 & 4\\ 0 & 0 & 1 & 2\\ 2 & 6 & 1 & -2\end{pmatrix}.$$

Решение. *Метод окаймляющих миноров* нахождения ранга матрицы A состоит в следующем. Необходимо:

1. Найти какой-нибудь минор M_1 первого порядка (то есть элемент матрицы), отличный от нуля. Если такого минора нет, то матрица A нулевая и $r(A)=0$.
2. Вычислять миноры 2-го порядка, содержащие M_1 (*окаймляющие* M_1) до тех пор, пока не найдется минор M_2, отличный от нуля. Если такого минора нет, то $r(A)=1$, если есть, то $r(A)\geq 2$ и т. д.
3. Вычислять (если они существуют) миноры $k-$ го порядка, окаймляющие минор $M_{k-1}\neq 0$. Если таких миноров нет, или все они равны нулю, то $r(A)=k-1$; если есть хотя бы один такой минор $M_k\neq 0$, то $r(A)\geq k$, и процесс продолжается.

При нахождении ранга матрицы таким способом достаточно на каждом шаге найти всего один ненулевой минор $k-$го порядка, причем искать его только среди миноров, содержащих минор $M_{k-1}\neq 0$.

Таким образом, можно сказать, что *рангом матрицы* A называется наибольший из порядков ее миноров, не равных нулю.

Базисным минором называется любой из отличных от нуля миноров матрицы A, порядок которого равен $r(A)$.

Так как у матрицы A есть ненулевые элементы, то $r(A)\geq 1$. Найдем какой-нибудь ненулевой минор 2-го порядка (если он существует). Таким минором является, например, $M_2=\begin{vmatrix}3 & 3\\ 0 & 1\end{vmatrix}=3\neq 0$. Значит $r(A)\geq 2$. Вычислим миноры 3-го порядка, окаймляющие M_2:

$$M_3^{(1)} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 0+0+6-0-0-6=0; \; M_3^{(2)} = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 6 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -6+0+36-24-0-6=0.$$

Все миноры 3-го порядка, окаймляющие M_2, раны нулю, следовательно $r(A) < 3$.

Итак, $r(A) = 2$.

Одним из базисных миноров является $M_2 = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$.

Решение задания типа 71-80.

Найдите общее решение и фундаментальный набор решений для однородной системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

Решение. Запишем расширенную матрицу системы и приведем ее к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Так как $r(A) = r(A \mid B) = 2 < 3 = n$, то система неопределенна. Количество главных переменных равно $r(A) = 2$, количество свободных переменных равно $n - r(A) = 3 - 2 = 1$. Для определения главных переменных выберем какой-нибудь не равный нулю минор 2-го порядка полученный из матрицы A, например, минор $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$. Его столбцы – 1-й и 2-й столбцы матрицы A - соответствуют переменным x_1 и x_2 - это будут главные переменные, а x_3 - свободная переменная. (Заметим, что в качестве главных переменных в данном примере нельзя выбрать пару x_2, x_3, так как соответствующим им минор равен нулю: $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$).

Запишем систему, соответствующую полученной матрице:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

Из второго уравнения, выражая x_2 через x_3 получим $x_2 = x_3$; подставляя это выражение в первое уравнение, получим $x_1 = 0$. Обозначив свободную переменную через t , получим общее решение системы $(0;t;t) = t \cdot (0;1;1)$. Фундаментальный набор решений образует, например, решение $(0;1;1)$.

Список источников, рекомендованных для подготовки к контрольной работе:

1. Гусак, А. А. Аналитическая геометрия и линейная алгебра. Примеры и задачи: учебное пособие / А. А. Гусак. — Минск: ТетраСистемс, 2011. — 265 с. — ISBN 978-985-536-229-7. — Текст: электронный//Электронно-библиотечная система IPR BOOKS: [сайт]. — URL: http://www.iprbookshop.ru/28035.html

2. Емельянова, Т. В. Линейная алгебра. Решение типовых задач : учебное пособие / Т. В. Емельянова, А. М. Кольчатов. — Саратов: Ай Пи Эр Медиа, 2018. — 184 с. — ISBN 978-5-4486-0331-0. — Текст: электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS: [сайт]. — URL: http://www.iprbookshop.ru/74559.html

3. Кузнецова, С. Н. Конспект лекций для студентов экономических специальностей. I курс (модуль 1–2). Линейная алгебра и аналитическая геометрия / С. Н. Кузнецова, М. В. Лукина. — Санкт-Петербург: Университет ИТМО, 2010. — 72 с. — ISBN 2227-8397. — Текст: электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS: [сайт]. — URL: http://www.iprbookshop.ru/67220.html

4. Попов, Л. Д. Линейная алгебра для экономистов: учебное пособие / Л. Д. Попов, М. М. Фоминых. — Екатеринбург: Уральский федеральный университет, ЭБС АСВ, 2013. — 112 с. — ISBN 5-7996-0945-0. — Текст:

электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS: [сайт]. — URL: http://www.iprbookshop.ru/68344.html

5. Романников, А. Н. Линейная алгебра: учебное пособие / А. Н. Романников. — Москва: Евразийский открытый институт, Московский государственный университет экономики, статистики и информатики, 2007. — 124 с. — ISBN 5-7764-0356-1. — Текст: электронный// Электронно-библиотечная система IPR BOOKS: [сайт]. — URL: http://www.iprbookshop.ru/10890.html

6. Элементы линейной алгебры: учебное пособие / Т. А. Гулай, А. Ф. Долгополова, В. А. Жукова [и др.]. — Ставрополь: Ставропольский государственный аграрный университет, Сервисшкола, 2017. — 88 с. — ISBN 2227-8397. — Текст: электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: http://www.iprbookshop.ru/76070.html