Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«АРМАВИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Институт прикладной информатики, математики и физики
Кафедра математики, физики и методики их преподавания

Неравенства, уравнения, функции

Составители: доцент кафедры математики, физики и МП, Иващенко Е.В.,
ст. пр. кафедры математики, физики и МП, Спевакова Н.Ю.

Армавир, 2020

Содержание

Введение	3
Тематика заданий муниципального и регионального этапа олимпиады по разделу «Неравенства. Уравнения. Функции»	4
Неравенства	6
Уравнения	11
Функции	14
Заключение	21
Список использованных в работе источников и литературы	21

Введение

Методические рекомендации по теме «Неравенства. Уравнения. Функции» составлены с целью расширения и углубления знаний учащихся по рассматриваемым вопросам указанной темы, формирования познавательных УУД учащихся и развитие их интеллектуальных и творческих способностей.

В Методических рекомендациях по теме «Неравенства. Уравнения. Функции» подобраны задания для учащихся 9-11 классов с целью получения школьниками знаний, выходящих за рамки школьного курса математики; решать олимпиадные задачи и получению навыков решения нестандартных математических задач повышенной сложности по данной тематике.

Для достижения поставленных целей решаются следующие задачи: развитие качеств мышления, характерных для математической деятельности; формирование у учащихся устойчивого интереса к математике; формирование представлений о математике как части общечеловеческой культуры.

В методических рекомендациях приведены решения типовых задач по указанной теме; а также даны задачи для самостоятельного решения.

Актуальность работы. Выявление познавательных интересов и потребностей учащихся, развитие мыслительных способностей, активизация самостоятельной работы.

Цель работы: разработать методические рекомендации по теме «Неравенства. Уравнения, функции» для участников математических олимпиад (9-11 классы).

Тематика заданий муниципального и регионального этапа олимпиады по разделу «Неравенства. Уравнения. Функции»

8-9 классы

Уравнения: Уравнение с одной переменной. Корни уравнения. Линейное уравнение. Квадратное уравнение. Формула корней квадратного уравнения. Теорема Виета. Решение рациональных уравнений. Уравнение с двумя переменными. Система уравнений. Решение системы двух линейных уравнений с двумя переменными. Решение простейших нелинейных систем. Графическая интерпретация решения систем уравнений с двумя переменными.

Неравенства: Неравенства с одной переменной и их системы. Неравенства второй степени с одной переменной. Неравенства о средних. Текстовые задачи, сводящиеся к решению уравнений, неравенств, систем уравнений.

Функции. Прямоугольная система координат на плоскости. Функция. Область определения и область значений функции. График функции. Возрастание функции, сохранение знака на промежутке. Функции: $y = kx$, $y = kx + b$, $y = k/x$, $y = x^2$, $y = x^3$, $y = ax^2 + bx + c$, $y = |x|$. Преобразование графиков функций. Свойства квадратного трехчлена. Геометрические свойства графика квадратичной функции.

10-11 классы

Уравнения. Иррациональные уравнения. Показательные и логарифмические уравнения, их системы. Тригонометрические уравнения. Неравенства с одной переменной. Решение неравенств методом интервалов. Показательные и логарифмические неравенства. Уравнения и неравенства, содержащие переменную под знаком модуля. Уравнения, неравенства и системы с параметрами.

Неравенства. Неравенства второй степени с одной переменной. Неравенства о средних. Системы уравнений. Текстовые задачи, сводящиеся к решению уравнений, неравенств, систем уравнений.

Функции. Числовые функции и их свойства: периодичность, четность и нечетность, экстремумы, наибольшее и наименьшее значения, промежутки знакопостоянства, ограниченность. Понятие об обратной функции. Свойство графиков взаимно обратных функций. Тригонометрические функции числового аргумента: синус, косинус, тангенс, котангенс и их свойства. Показательная функция, логарифмическая функция, степенная функция, их свойства и графики. Производная, ее геометрический и механический смысл. Применение производной к исследованию функций, нахождению их наибольших и наименьших значений и построению графиков. Построение и преобразование графиков функций. Касательная и ее свойства.

Неравенства о средних значениях

Неравенство о средних для двух чисел имеет вид:

$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, где $a, b \geq 0$.

Числа $\frac{a+b}{2}$ и $\sqrt{ab}$ называются средним арифметическим и средним геометрическим чисел a и b.

Неравенство о средних справедливо для любого конечного числа слагаемых.

Для n неотрицательных чисел оно примет вид:

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}$$

Решение типовых задач. Неравенства.

9 класс

1. Докажите, что если $a + b + c = 0$ $(a \neq 0)$, то $ab + bc + ca < 0$.

Решение. Возведем равенство $a + b + c = \mathbf{0}$ в квадрат.

Получим $a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) = 0$, откуда $ab + bc + ca = -\frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2) < 0$.

2. Что больше 31^{11} или 17^{14}.

Решение. $31^{11} < 32^{11} = 16^{11}2^{11} < 16^{11} \cdot 2^{12} = 16^{14} < 17^{14}$.

3. Числа a и b таковы, что $a^3 - b^3 = 2, a^5 - b^5 \geq 4$. Докажите, что $a^2 - b^2 \geq 2$.

Решение.

Заметим, что $2(a^2 + b^2) = (a^2 + b^2)(a^3 - b^3) = (a^5 - b^5) + a^2b^2(a - b) \geq 4 + a^2b^2(a - b)$. Поскольку $a^3 > b^3$, мы имеем $a > b$, а значит $a^2b^2(a - b \geq 0$. Итак, $2a2+b2\geq 4$, откуда и следует утверждение задачи.

4. Сумма трех неотрицательных чисел x_1, x_2, и x_3 не превосходит $\frac{1}{2}$. Докажите, что $(1 - x_1)(1 - x_2)(1 - x_3) \geq \frac{1}{2}$.

Решение

Преобразуем левую часть A доказываемого неравенства: $A = (1 - x_1)(1 - x_2)(1 - x_3) = 1 - (x_1 + x_2 + x_3) + x_1x_2(1 - x_3) + x_2x_3 + x_1x_3$. Из условия следует, что $x_1x_2(1 - x_3) \geq 0$ и $x_1x_3 \geq 0$, поэтому $A \geq 1 - (x_1 + x_2 + x_3) \geq \frac{1}{2}$.

Замечание. Равенство достигается, когда одно из данных чисел равно $\frac{1}{2}$, а два других равны 0.

5. Числа a и b – длины катетов, c – длина гипотенузы прямоугольного треугольника. Докажите, что $a^4 + a^2b^2 + b^4 \geq \frac{3}{4}c^4$.

Решение

Из равенства $a^2 + b^2 = c^2$ следует: $a^4 + 2a^2b^2 + b^4 = c^4$, поэтому доказываемое неравенство принимает вид

$4(a^4 + a^2b^2 + b^4) \geq 3\,(a^4 + 2a^2b^2 + b^4) \Leftrightarrow a^4 - 2a^2b^2 + b^4 \geq 0 \Leftrightarrow (a^2 - b^2)^2 \geq 0.$

6. Докажите, что $\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \cdots + \frac{2020}{2021!} < 1$

Решение

$$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \cdots + \frac{2020}{2021!} = \left(\frac{2}{2!} - \frac{1}{2!}\right) + \left(\frac{3}{3!} - \frac{1}{3!}\right) + \cdots + \left(\frac{2021}{2021!} - \frac{1}{2021!}\right)$$
$$= \left(1 - \frac{1}{2!}\right) + \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2020!} - \frac{1}{2021!}\right) = 1 - \frac{1}{2021!} < 1$$

7. Докажите, что при всех положительных x, y, z выполняется неравенство $\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} \geq 4(x - z)$.

Решение

Докажем, что при $x, y > 0$ выполняется неравенство

$\frac{x^2}{y} \geq 4(x - y)$. Действительно, домножим обе части неравенства на y:

$x^2 \geq 4(xy - y^2)$ или $(x - 2y)^2 \geq 0$. Теперь, сложив неравенство $\frac{x^2}{y} \geq 4(x - y)$ с неравенством $\frac{y^2}{z} \geq 4(y - z)$, мы получим требуемое.

9-10 *класс*

8. Докажите, что для любых положительных чисел a, b*, c в*ыполняется неравенство $1 < \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} < 2$.

Решение. Имеем $\boldsymbol{S} = \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} > \frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{a+b+c} + \frac{c}{a+b+c} = 1.$

С другой стороны, $S_1 = \frac{b}{a+b} + \frac{c}{b+c} + \frac{a}{c+a}$, откуда $\boldsymbol{S} < 2$ так как $S_1 > 1$.

9. Произведение положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ равно единице. Докажите, что

$$(1 + 2a_1)\cdot(1 + 2a_2)\cdot \ldots \cdot(1 + 2a_n) \geq 3^n$$

Решение. По неравенству о средних

$$1 + 2a_k = 1 + a_k + a_k \geq 3\sqrt[3]{\boldsymbol{1 \cdot a_k \cdot a_k}} = 3\boldsymbol{a_k^{\frac{2}{3}}}.$$

Следовательно, $(1 + 2a_1)\cdot(1 + 2a_2)\cdot \ldots \cdot(1 + 2a_n) \geq \boldsymbol{3^n \cdot (a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n)^{\frac{2}{3}}} \geq$

$\mathbf{3^n}$.

10. Сравните числа 51^{101} и $101!$.

Решение.

Заметим, что $101! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 101 = (1 \cdot 101) \cdot (2 \cdot 100) \cdot \ldots \cdot (50 \cdot 52) \cdot 51$.

В каждой скобке записано произведение вида $(51 - k)(51 + k) = 51^2 - k^2 < 51^2$, откуда следует, что $101! < 51^{101}$.

Ответ. $51^{101} > 101!$

11. Найдите треугольник наибольшей площади, который можно вписать в данную окружность.

Решение. Покажем, что если искомый треугольник существует, то он должен быть равнобедренным. Действительно, у равнобедренного треугольника ABC высота больше, чем у треугольника ABC (рис. 1).

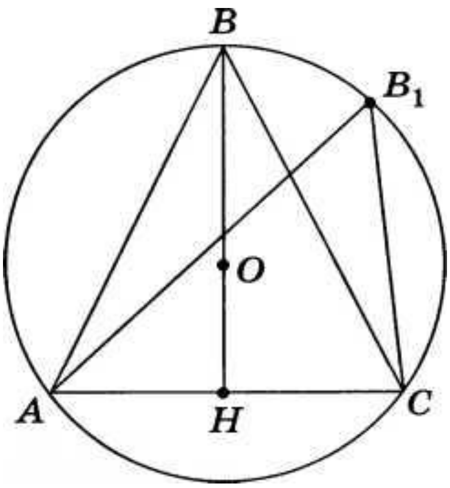

Рисунок 1

Центр O окружности лежит на высоте BH треугольника ABC, т. е. $BO = AO = R$. Пусть $OH = x$, тогда

$$S_{ABC} = (\boldsymbol{R} + \boldsymbol{x}) \cdot \sqrt{\boldsymbol{R^2 - x^2}},$$

$$\text{т. е. } S^2 = (R + x)^3(R - x) = \frac{1}{3}(R + x)^3(3R - 3x).$$

По неравенству о среднем для четырех чисел $a = b = c = R + x$, $d = 3R - 3x$ получаем $abcd \le \left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^4$, т.е. $3S^2 \le \left(\frac{3(R+x)+3R-3x}{4}\right)^4 = \left(\frac{3}{2}R\right)^4$.

Значит, наибольшую площадь имеет треугольник, для которого $R + x = 3R - 3x$, т. е. $x = OH = \frac{1}{2}BO = \frac{1}{2}R$.

Такой треугольник – равносторонний, его площадь равна $\frac{3\sqrt{3}}{4}R^2$.

Ответ. Искомый треугольник – равносторонний.

12. Последовательность $\{a_n\}$ задается следующим образом: $a_1 = 1$, a_{n+1}

$= a_n + \frac{1}{a_n}$ для любого натурального n. Докажите, что $a_{100} > 14$.

Решение. Заметим, что $a_n > \mathbf{0}$ для любого натурального n. Также $a_{n+1}^2 = \left(a_n + \frac{1}{a_n}\right)^2 > a_n^2 + 2$. Тогда $a_{100}^2 > a_{99}^2 + 2 > a_{98}^2 + 2 \cdot 2 > \cdots > a_1^2 +$ $+2 \cdot 99 = 199 > 14^2$, что и требовалось доказать.

10-11 класс

13. Числа x и y удовлетворяют неравенству $x > y > \frac{2}{x-y}$. Докажите, что $x^2 > y^2 + 4$.

Решение. Сложив неравенства $x > \frac{2}{x-y}$ и $y > \frac{2}{x-y}$, получаем, что $x + y > \frac{4}{x-y}$.

Из условия $x > y$ следует, что знаменатель дробей положителен, поэтому на него можно умножить без изменения знака неравенства. Тогда получаем: $(x + y)(x - y) > 4$, то есть $x^2 - y^2 > 4$. Утверждение доказано.

Замечание. Число 4 нельзя заменить на большее, поскольку при $0 < \varepsilon < 1$, $x = \frac{2}{\varepsilon} + 2\varepsilon$ и $y = \frac{2}{\varepsilon} + \varepsilon$ но при этом

$$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y) = \varepsilon\left(\frac{4}{\varepsilon} + 3\varepsilon\right) = 4 + 3\varepsilon^2,$$

что может быть сколь угодно близким к 4 при достаточно малых ε.

10 - 11класс

14. Положительные числа a,b,c удовлетворяют соотношению $ab + bc + ca = 1$. Докажите, что

$$\sqrt{a + \frac{1}{a}} + \sqrt{b + \frac{1}{b}} + \sqrt{c + \frac{1}{c}} \geq 2\left(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}\right).$$

Решение.

Заметим, что $a + \frac{1}{a} = a + \frac{ab + bc + ca}{a} = a + b + c + \frac{bc}{a}$.

Применяя неравенство о средних для чисел а и bc/a, получаем

$$a+\frac{1}{a}\geq b+c+2\sqrt{bc}=\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2;$$

отсюда $\sqrt{a+\frac{1}{a}}\geq\sqrt{b}+\sqrt{c}.$ Аналогичным образом выводятся неравенства $\sqrt{b+\frac{1}{b}}\geq\sqrt{c}+\sqrt{a}$ и $\sqrt{\mathrm{c}+\frac{1}{\mathrm{c}}}\geq\sqrt{a}+\sqrt{b}$. Складывая последние три неравенства, получаем требуемый результат.

11 класс

15. Положительные числа x, y и z удовлетворяют условию $xyz \geq xy + yz + zx$. Докажите неравенство $\sqrt{xyz}\geq\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}.$

Решение. По неравенству о средних имеем $xy+xz\geq 2\sqrt{xy\cdot xz}, xy+yz\geq 2\sqrt{xy\cdot yz}, xz+yz\geq 2\sqrt{xz\cdot yz}$. Сложим эти три неравенства и разделим полученное на 2. С учётом условия, получаем

$$xyz \geq xy + yz + zx \geq x\sqrt{yz}+y\sqrt{xz}+z\sqrt{xy}.$$

Деля полученное неравенство на $\sqrt{xyz}$, получаем требуемое.

Замечание. Идею решения легче придумать, если переписать данное и требуемое неравенства в виде $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\leq 1$ и $\frac{1}{\sqrt{xy}}+\frac{1}{\sqrt{xz}}+\frac{1}{\sqrt{yz}}\leq 1.$

10 – 11 класс

16. Докажите, что если x и y – произвольные положительные числа, m и n – натуральные числа, причем $m\geq n,$ то $\sqrt[m]{x^m+y^m}\leq\sqrt[n]{x^n+y^n}$

Решение. Пусть для определенности $x\geq y$, тогда, разделив обе части неравенства на x, получим равносильное неравенство $\sqrt[m]{1+t^m}\leq\sqrt[n]{1+t^n}$ или $(1+t^m)^n\leq(1+t^n)^m,$ где $0<t=\frac{y}{x}\leq 1$. Последнее нера-

венство верно, так как при $m \geq n$ $1 < 1 + t^m \leq 1 + t^n$.

11 класс

17. Пусть $x \geq 0$. Докажите неравенство $(1 + x + x^2 + \cdots + x^{100}) \cdot (1 + x^{100}) \geq 200x^{100}$.

Решение.

Раскроем скобки и сгруппируем слагаемые: $1 + x + x^2 + \ldots + x^{100} + x^{100} + x^{101} + \ldots + x^{200} - 200x^{100} = (1 + x^{200}) + (x + x^{199}) + (x^2 + x^{198}) + \ldots + (x^{100} + x^{100}) - 200x^{100} \geq 2x^{100} + 2x^{100} + \ldots + 2x^{100} - 200x^{100} = 2x^{100} \geq 0$ (мы воспользовались неравенством о среднем $x^k + x^{200-k} \geq 2\sqrt{x^k \cdot x^{200-k}} = 2x^{100}$).

Решение типовых задач. Уравнения

9 класс

18. Докажите, что при любых a и b уравнение

$(a^2 - b^2)x^2 + 2(a^3 - b^3)x + (a^4 - b^4) = 0$ имеет решение.

Решение. Если $a^2 - b^2 \neq 0$, то данное уравнение квадратное с дискриминантом $\frac{1}{4}D = (a^3 - b^3)^2 - (a^2 - b^2)(a^4 - b^4) = a^2b^4 - 2a^3b^3 + a^4b^2 = a^2b^2(a - b) \geq 0$.

9 класс

19. Существует ли треугольник со сторонами x, y и z такой, что $x^3 + y^3 + z^3 = (x + y)(y + z)(z + x)$?

Первое решение. Пусть такой треугольник существует. Можно считать, что $x > y > z$. Тогда по неравенству треугольника $y + z > x$, откуда $(x + y)(x + z)(y + z) > (x + y)(x + z)x = x^3 + x^2y + x^2z + xyz > x^3 + x^2y + x^2z > x^3 + y^3 + z^3$. Противоречие.

Замечание. В подобном решении можно обойтись и без упорядочения переменных. Именно, $(x + y)(x + z)(y + z) = x^2(y + z) + y^2(x + z) + z^2(x + y) + 2xyz > x^2 \cdot x + y^2 \cdot y + z^2 \cdot z + 0$ по неравенству треугольника.

Второе решение. Пусть такой треугольник существует. Отметим точки касания его сторон со вписанной окружностью. Пусть отрезки касательных от вершин до этих точек касания равны a, b и c, тогда $x = b + c$, $y = a + c$ и $z = a + b$. Имеем $(x + y)(y + z)(z + x) = (a + 2b + c)(a + b + 2c)(2a + b + c) = 2(a^3 + b^3 + c^3) + 7(a^2b + ab^2 + a^2c + ac^2 + b^2c + bc^2) + 16abc$ и $x^3 + y^3 + z^3 = (a + b)^3 + (b + c)^3$ $(c + a)^3 = 2(a^3 + b^3 + c^3) + 3(a^2b + ab^2 + a^2c + ac^2 + b^2c + bc^2)$.

Значит, разность $(x + y)(y + z)(z + x) - x^3 + y^3 + z^3$ после подстановки и приведения подобных слагаемых приобретает вид $4(a^2b + ab^2 + a^2c + ac^2 + b^2c + bc^2) + 16abc$, что, очевидно, больше 0. Противоречие.

Замечание. Существуют тройки положительных чисел x, y, z такие, что равенство из условия выполнено – например, 1, 1, $1+\sqrt{5}$.Таким образом, условие, что x, y, z являются длинами сторон треугольника, существенно.

Ответ. Нет, не существует.

10 класс

20. Произведение четырех чисел – корней уравнений $x^2 + 2bx + c = 0$ и $x^2 + 2cx + b = 0,$ где b и c положительны, равно единице. Найти b и c.

Решение. По теореме Виета $x_1x_2x_3x_4 = cb \Rightarrow bc = 1$. Но $b^2 - c \geq 0$ и $c^2 - b \geq 0 \Rightarrow b^2 \geq \frac{1}{b}, \frac{1}{b^2} \geq b,$ т. е. $b \geq 1$ и $\frac{1}{b} \geq 1,$ откуда $B = 1.$

Ответ. $b = c = 1$.

10 класс

21. Найдите все пары $(a; b)$ действительных чисел a и b, таких, что уравнения $x^2 + ax + b^2 = 0$ и $x^2 + bx + a^2 = 0$ имеют по крайней мере один общий корень

Решение. Предположим, что $a \neq b$ и x_0 – общий корень уравнений. Подставляя x_0 в уравнения и вычитая одно из другого, получаем $(a - b)x_0 + b^2 - a^2 = 0$, откуда $x_0 = a + b$. Следовательно, $(a + b)^2 + a\,(a + b) +$

$b^2 = 0$ или $2a^2 + 3ab + 2b^2 = 2\left(a + \frac{3}{4}b\right)^2 + \frac{7}{8}b^2 = 0$, откуда $a = b = 0$ – противоречие.

Пусть теперь $a = b$. Тогда оба уравнения имеют вид $x^2 + ax + a^2 = 0$. Дискриминант этого уравнения равен $-3a^2 \le 0$, т. е. единственная возможность: $a = b = 0$. Очевидно, что эта пара удовлетворяет условию.

Ответ. (0; 0).

10 класс

22. Решите в натуральных числах уравнение $a! + b! + c! = d!$.

Решение. Без ограничений общности можно считать $a \le b \le c$. Тогда из данного уравнения следует, сто $d > c$, значит $d \ge c + 1, d! \ge (c + 1)! = (c + 1) \cdot c! > 3c! \ge a! + b! + c!$, если $c + 1 > 3$. Итак, если $c \ge 3$, уравнение решений не имеет. Значит, c=1 или c=2. Осталось проверить, что из наборов (1; 1; 1), (1; 1; 2), (1; 2; 2), (2; 2; 2) уравнению удовлетворяет только последний.

11 класс.

23. Решите систему уравнений $\begin{cases} x + y + z = 0, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0. \end{cases}$

Решение.

Перемножив равенства $z = -x - y$ и $\frac{1}{z} = -\frac{1}{x} - \frac{1}{y}$ получим $1 = \frac{(x+y)^2}{xy} \Longrightarrow$ $x^2 + xy + y^2 = 0$. Здесь $D = -3y^2 < 0$, поэтому уравнение может иметь решение только при $y = 0$, но из второго уравнения системы $y \ne 0$.

Ответ. Система несовместна.

11 класс

24. Известно, что $\sin x \cdot \cos y = \cos x \cdot \sin y = \frac{1}{2}$. Найдите $\cos 2x = \sin 2y$.

Первое решение.

Перемножив данные равенства и умножив произведение на 4, получаем $\sin 2x \cdot \sin 2y = 1$. Отсюда $\sin 2x = \sin 2y = 1$ или $\sin 2x = \sin 2y = -1$ (оба случая возможны; достаточно взять $x = y = \frac{\pi}{4}$ или $x = \frac{3\pi}{4}, y = -\frac{\pi}{4}$). В обоих случаях $\cos 2x = 0$. Тогда $\cos 2x - \sin 2y = -1$ или $\cos 2x - \sin 2y = 1$.

Второе решение представлено в методическом пособии.

Второе решение.

Из условия имеем $\sin(x + y) = \sin x \cdot \cos y + \sin y \cdot \cos x = 1$ и, аналогично, $\sin(x - y) = 0$. Тогда $x + y = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ и $x - y = \pi\lambda$ при целых k и λ. Но тогда $2x = (x + y) + (x - y) = \frac{\pi}{2} + \pi(2k + \lambda)$, откуда $\cos 2x = 0$, а $2y = (x + y) - (x - y) = \frac{\pi}{2} + \pi(2k - \lambda)$, откуда $\sin 2y = \pm 1$. Значит, $\cos 2x - \sin 2y = \mp 1$. Те же примеры показывают, что оба ответа возможны.

Решение типовых задач. Функции

9 класс

25. Квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ имеет корни. Верно ли, что трехчлен $a^3x^2 + b^3x + c^3$ также имеет корни?

Решение. Так как $ax^2 + bx + c$ имеет корни, то $b^2 \geq 4ac$, откуда $b^6 \geq 64a^3c^3$. Если $ac \geq 0$, то $64a^3c^3 \geq 4a^3c^3$, а если $ac < 0$, то $b^6 \geq 0 > 4a^3c^3$ – обоих случаях $b^6 \geq 4a^3c^3$, т. е. дискриминант неотрицателен.

Ответ. Верно.

9 класс

26. Даны положительные числа p и r. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ – линейные функции с корнями p и r. Найдите все корни уравнения $f(x) \cdot g(x) = f(0) \cdot g(0)$.

Первое решение. Пусть данные функции имеют вид: $f(x) = ax + b$ и $g(x) = cx + d$. Тогда уравнение принимает вид $(ax + b)(cx + d) - bd = 0$, то есть $x(acx + ad$

$+ bc) = 0$. Один корень этого уравнения $x_1 = 0$, а второй $x_2 = \frac{-ad-bc}{ac}$, то есть $x_2 = -\frac{d}{c} - \frac{b}{a}$. Осталось заметить, что $-\frac{d}{c}$ – есть r , а $-\frac{b}{a}$. это p .

Второе решение представлено в методическом пособии.

Второе решение. Запишем наши функции в виде: $f(x) = a(x - p)$, $g(x) = c(x - r)$. Тогда уравнение принимает вид $ac(x - p)(x - r) - acpr = 0$, то есть $acx(x - p - r) = 0$, откуда и следует ответ.

9-10 класса

27. Даны квадратные трёхчлены $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_{100}(x)$ с одинаковыми коэффициентами при x^2, одинаковыми коэффициентами при x, но различными свободными членами; у каждого из них есть по два корня. У каждого трёхчлена $f_i(x)$ выбрали один корень и обозначили его через x_i. Какие значения может принимать сумма $f_2(x_1) + f_3(x_2) + \cdots + f_{100}(x_{99}) + f_1(x_{100})$?

Решение. Пусть i-й трёхчлен имеет вид $f_i(x) = ax^2 + bx + c_i$. Тогда, $f_2(x_1) = ax_1^2 + bx_1 + c_2 = (ax_1^2 + bx_1 + c_1) + (c_2 - c_1) = c_2 - c_1$,

Поскольку $f_1(x_1) = 0$. Аналогично получаем равенства $f_3(x_2) = c_3 - c_2, \ldots, f_{100}(x_{99}) = c_{100} - c_{99}$ и $f_1(x_{100}) = c_1 - c_{100}$. Складывая полученные равенства, получаем $f_2(x_1) + f_3(x_2) + \cdots + f_{100}(x_{99}) + f_1(x_{100}) = (c_2 - c_1) + (c_1 - c_{100}) = 0$.

Значит, единственное возможное значение суммы – ноль.

Ответ. Только 0.

10 класс

28. На рисунке 2 изображены графики трех квадратных трехчленов. Могут ли это быть трехчлены $ax^2 + bx + c$, $cx^2 + ax + b$, $bx^2 + cx + a$?

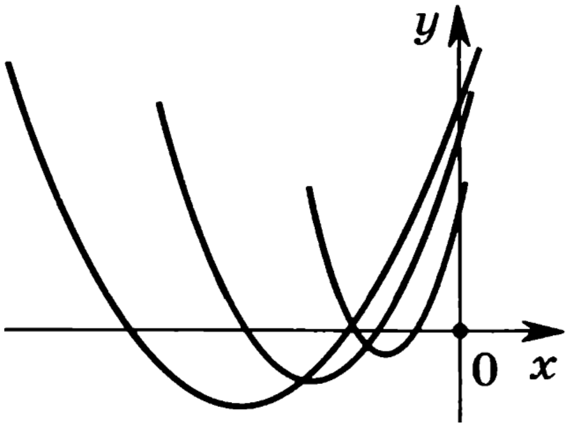

Рисунок 2

Решение. Предположим противное. Из рисунка видно, что все трехчлены имеют по два корня, следовательно $a^2 > 4bc,\ b^2 > 4ac$ и $c^2 > 4ab$,

причем a > 0, $b > 0$ и с > 0 (так как ветви парабол направлены вверх).

Перемножая полученные неравенства, приходим к противоречию: $a^2b^2c^2 > 64a^2b^2c^2$.

Ответ. Не могут.

10 класс.

30. Дан график функции $y = x^2 + ax + a$ (рис. 3). Найдите а.

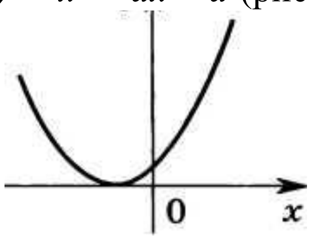

Рисунок 3

Решение

График касается оси O:с, поэтому $y = (x + x_0)^2$, $y = x^2 + 2x_0x + x_0^2$, т. е. $a = 2x_0$ и $a = x_0^2$. Отсюда $a = 0$ или $a = 4$. Но из графика следует, что $a \neq 0$.

Ответ. 4.

31. Докажите что функция $f(x) = \frac{1+sinx-cosx}{1+sinx+cosx}$ является нечетной

Решение.

$f(x)=\frac{1+sinx-cosx}{1+sinx+cosx}=\frac{2sin^2\frac{x}{2}+2sin\frac{x}{2}cos\frac{x}{2}}{2cos^2\frac{x}{2}+2sin\frac{x}{2}cos\frac{x}{2}}=tg\frac{x}{2}$, а на интервале $x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ функция $tg\frac{x}{2}$ – нечетная.

10 класс

32. Пусть $f(x) = x^2 + 2ax + b$. Известно, что уравнение $f(x) = 0$ имеет два корня. Докажите, что тогда при любом положительном k уравнение $f(x) + k(x + a)^2 = 0$ имеет два корня.

Первое решение. По условию $a^2-b>0$. Пусть $F(x) = f(x) + k(x + a)^2$. Вычислим дискриминант нового трёхчлена $F(x)$. Имеем:

$$F(x)=x^2+2ax+b+k(x+a)^2=(k+1)x^2+2a(k+1)x+(b+ka^2).$$

Значит,

$$\frac{1}{4}D_1=a^2(k+1)^2-(k+1)(b+ka^2)=(k+1)(a^2-b).$$

что доказывает утверждение задачи, поскольку $k + 1 > 0$.

Второе решение представлено в методическом пособии.

Второе решение. Перепишем исходный трёхчлен в виде $(x+a)^2+(b-a^2)$. Его значение в вершине равно $b-a^2<0$. Новый трёхчлен есть

$$F(x)=(k+1)(x+a)^2+(b-a^2).$$

причём его старший коэффициент положителен. Так как трёхчлен F в точке $x = -a$ принимает отрицательное значение $b - a^2$, то он имеет два корня. трёхчлен F в точке $x = -a$ принимает отрицательное значение $b - a^2$, то он имеет два корня.

10 класс

33. Про квадратные трехчлены f_1 и f_2 известно, что они имеют корни, а $f_1 - f_2$ не имеет. Докажите, что $f_1 + f_2$ имеет корни.

Первое решение. Предположим противное: $f_+ = f_1 + f_2$ и $f_- = f_1 - f_2$ оба не имеют корней. Есть два варианта: f_+ и f_- одного знака или они разных знаков (если у многочлена нет корней, то он принимает значения одного знака). В первом случае их сумма также постоянного знака, но $f_+ + f_- = 2f_1$ имеет корни – противоречие. Во втором случае их разность должна иметь постоянный знак, но $f_+ - f_- = 2f_2$ тоже имеет корни – противоречие.

Второе решение представлено в методическом пособии.

Второе решение. Пусть $f_1(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1$, $f_2(x) = a_2x^2 + b_2x + c_2$. По условию $D_l = b_1^2 - 4a_1c_1 \geq 0$, $D_2 = b_2^2 - 4a_1c_1 \geq 0$ и $D_- = (b_1 - b_2)^2 - 4(a_1 - a_2)(c_1 - c_2) < 0$. Из последнего неравенства следует, что $2b_1b_2 > b_1^2 \; b_2^2 - 4(a_1 - a_2)(c_1 - c_2)$, поэтому $D_+ = (b_1 + b_2)^2 - 4(a_1 +$ $a2c1+c2>2b12+2b22-4a1-a2c1-c2-4a1+a2c1+c2=2b12-4a1c1+2b22$ $-4a2c2 \geq 0$.

11 класс

34. Квадратный трёхчлен $f(x) = ax^2 + bx + c$, не имеющий корней, таков, что коэффициент b рационален, а среди чисел c и $f(c)$ ровно одно иррационально. Может ли дискриминант трехчлена $f(x)$ быть рациональным?

Решение. Так как трёхчлен $f(x)$ не имеет корней, то $c = f(0) \neq 0$ и $f(c) \neq 0$. Тогда выражение $\frac{f(c)}{c} = \frac{ac^2+bc+c}{c} = ac + b + 1.$ Так как $b + 1$ рационально, то ac – иррационально как отношение рационального и иррационального чисел. Но. Так как b + 1 рационально, то ac – иррационально. Получаем, что дискриминант $D = b^2 - 4ac$ иррационален как разность рационального и иррационального чисел.

Ответ. Нет, не может.

35. Дан график функции $y = ax^4 - x^2 + bx + c.$ Найдите знаки чисел a, b и c.

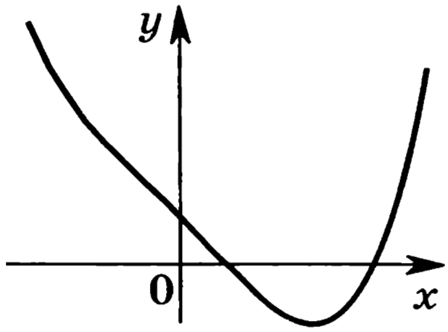

Рисунок 4

Решение.

При $x \to +\infty$ $y \to +\infty$, значит, a > 0. График пересекает ось Oy в точке с положительной ординатой, поэтому c = y(0) > 0. В этой же точке функция убывает, значит, $y'(0) < 0$. Но $y' = 4ax^3 - 2x + b$, т. е. $y'(0) = b < 0$.

Ответ, $a > 0$, $b < 0$, $c > 0$.

11 класс

36. Касательная к графику функции $y = x^2$ пересекает координатные оси Ox и Oy в точках A и B так, что $OA = OB$. Найдите длину отрезка AB.

Решение. Из условия следует, что уравнение касательной имеет вид $y = x + b$ или $y = -x + b$, поэтому в точке касания производная $y'(x_0) = \pm 1$, т. е. $x_0 = \pm 1/2$. Значит, $y_0 = \left(\pm\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$. Уравнения касательных в точках $X\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$ $и$ $Y\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$: $y = x - \frac{1}{4}$ и $y = -x - \frac{1}{4}$, следовательно $OA = OB = \frac{1}{4}$, откуда $AB = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

Ответ. $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

Задачи для самостоятельного решения

9 класс

1. Рассматриваются квадратичные функции $y = x^2 + px + q$, у которых $p + \frac{1}{2}q = 2001$. Докажите, что их графики проходят через одну точку.

2. Квадратный трехчлен $x^2 + ax + b$ имеет целые корни, по модулю большие 2. Докажите, что число $a + b + 1$ составное.

3. Все коэффициенты квадратного трехчлена – целые нечетные числа. Может ли он иметь два целых корня?

10 класс

1. Может ли один из корней уравнения $x^2 - 2(\sin\alpha + \cos\alpha)x + \sin(2\alpha) = 0$ при некотором α быть в 3 раза больше другого?

2. Найдите все такие простые p и q, что уравнение $px^2 + pqx + q = 0$ имеет целые корни.

3. Вычислить $arctg1 + arctg2 + arctg3$.

11 класс

1. Пусть $\cos x \neq 0$. Докажите неравенство $\left|\frac{cos2x+3}{cosx}\right| \geq 4$.

2. Найдите какую-нибудь функцию $f(x)$, такую, чтобы уравнения $f(x) = 0$ и

$f'(x) + x^2 + 1 = 0$ имели одно и тоже непустое множество корней.

3. На рисунке 5 изображены графики трех квадратных трехчленов. Могут ли это быть трехчлены $ax^2 + bx + c$, $cx^2 + ax + b$, $bx^2 + cx + a$?

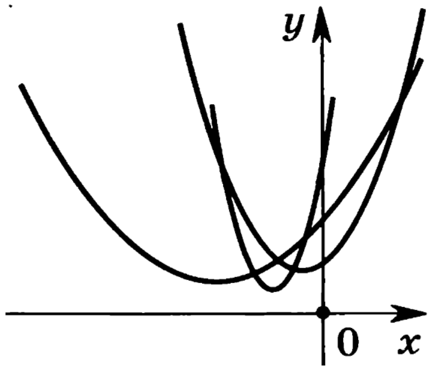

Рисунок 5

4. Решите систему уравнений $\begin{cases} sinx + siny = \sqrt{2}tgz, \\ cosx + cosy = \sqrt{2}\, ctgz. \end{cases}$

Заключение

Подготовлены методические рекомендации по теме «Неравенства. Уравнения. Функции» для участников математических олимпиад (9-11 классы). Приведены решения типовых задач по указанной теме; задачи для самостоятельного решения.

Список используемых источников

1. Московские математические олимпиады 1993 – 2005 г. / Р. М. Федоров и др. Под ред. В. М. Тихомирова. – М.: МЦНМО, 2006. –456 с.
2. Агаханов Н. Х. Математика. Районные олимпиады. 6-11классы / Н. Х. Агаханов, О. К. Подлипский. – М. : Просвещение, 2010. – 192 с.
3. Математика в задачах. Сборник материалов выездных школ команды Москвы на Всероссийскую математическую олимпиаду / Под ред. А. А. Заславского, Д. А. Пермякова, А. Б. Скопенкова, М. Б. Скопенкова и А. В. Шаповалова. – М.: МЦНМО, 2009. – 488 с.