Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«АРМАВИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Институт прикладной информатики, математики и физики
Кафедра математики, физики и методики их преподавания

Теория графов. Комбинаторика

Составители: доцент кафедры математики, физики и МП, Иващенко Е.В.,
ст. пр. кафедры математики, физики и МП, Мозговая М.А.

Армавир, 2020

Содержание

Введение

Методические рекомендации по теме «Теория графов. Комбинаторика» составлены с целью расширения и углубления знаний учащихся по рассматриваемым вопросам указанной темы, формирования познавательных УУД учащихся и развитие их интеллектуальных и творческих способностей.

В Методических рекомендациях по теме «Теория графов. Комбинаторика» подобраны задания для учащихся 9-11 классов с целью получения школьниками знаний, выходящих за рамки школьного курса математики; решать олимпиадные задачи и получению навыков решения нестандартных математических задач повышенной сложности по данной тематике.

Для достижения поставленных целей решаются следующие задачи: развитие качеств мышления, характерных для математической деятельности; формирование у учащихся устойчивого интереса к математике; формирование представлений о математике как части общечеловеческой культуры.

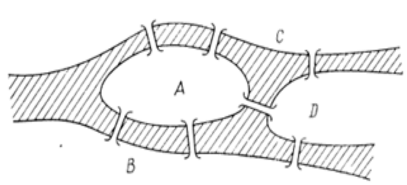
В методических рекомендациях приведены решения типовых задач по указанной теме; а также даны задачи для самостоятельного решения.

ТЕОРИЯ ГРАФОВ

Теория графов – это область дискретной математики, особенностью которой является геометрический подход. Основной объект теории графов – граф и его обобщения.

Теория графов применяется в таких областях, как физика, химия, информатика, машиностроение, архитектура и многих других. Эта теория тесно связана также со многими разделами математики, среди которых теория вероятностей, топология. Главные достоинства графов – простота и наглядность представления информации. Эта позволяет с успехом применять графы в решении различных математических задач.

Родоначальником теории графов является математик Леонард Эйлер, решивший в 1736 г. широко известную в то время задачу, называвшуюся проблемой кенигсбергских мостов. В городе Кенигсберге (сейчас Калининград) было два острова, соединенных семью мостами с берегами реки и друг с другом так, как показано на рис. 1.1. Задача состояла в следующем: найти маршрут прохождения всех четырех частей суши, который начинался бы с любой их них, кончался бы на этой же части и ровно один раз проходил по каждому мосту. Исключительный вклад Эйлера в решение этой задачи заключается в том, что он доказал невозможность такого маршрута.



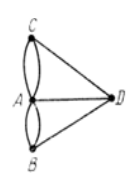


Рис. 1.1. ***Рис. 1.2***

Для доказательства Эйлер обозначил каждую часть суши точкой (вершиной), а каждый мост - линией (ребром), соединяющий соответствующие точки. Получился «граф». Он показан на рис. 1.2. Утверждение о не существовании решения задачи эквивалентно утверждению о невозможности обойти граф, представленный на рис. 1.2.

Граф *– это фигура, состоящая из точек (вершин) и отрезков (ребра), соединяющих эти точки.*

Рис. 2. Граф

Если две вершины графа соединены более чем одним ребром, то каждое такое ребро называется ***кратным.***

Вершины и рёбра графа называются также ***элементами*** *графа, число вершин в графе —* ***порядком****, число рёбер —* ***размером*** *графа.*

Ребро называется ***петлёй****, если его концы совпадают.*

Вершина называется ***изолированной****, если она не является концом ни для одного ребра.*

Ребро называется ***инцидентным*** *вершине, если она является одним из его концов.*

Задача 1. В 10-значном числе каждые две подряд идущие цифры образуют двузначное число, которое делится на 13. Докажите, что среди этих цифр нет цифры 8.

Решение. Существует 7 двузначных чисел, которые делятся на 13. Обозначим эти числа точками, и, если вторая цифра одного числа совпадает с первой цифрой другого числа, соединим их линией. Видим, что если 10-значное число обладает заданным свойством, то оно состоит из периодически повторяющихся цифр…1391 или …6526… Цифры 8 быть не может.

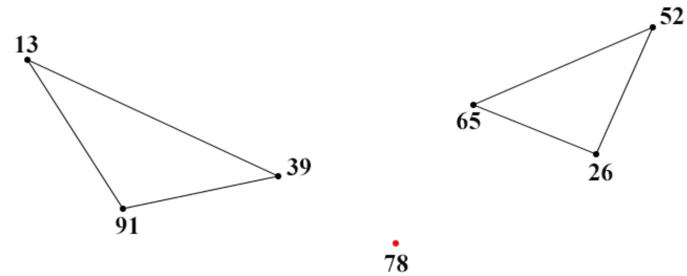


Рис. 3.

Число ребер, сходящихся в вершине, называют ***степенью вершины****.*

Лемма 1.*Число ребер в графе ровно в два раза меньше, чем сумма степеней вершин.*

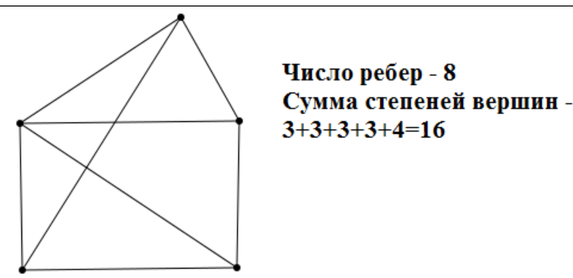


Рис. 4.

Задача 2. В деревне 10 домов, и из каждого выходит по 7 тропинок, идущих к другим домам. Сколько всего тропинок проходит между домами?

Решение. Пусть дома – вершины графа, тропинки – ребра. Тогда степень каждой вершины равна 7, всего сумма степеней вершин $7 \cdot 10 = 70$, тогда число ребер (тропинок) $70 : 2 = 35$

Лемма 2.*Число нечетных вершин графа четно.*

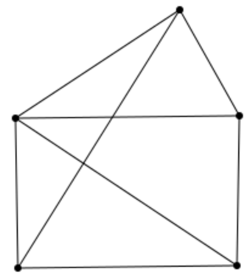


Рис.5.

Задача 3. Маша сказала своей подружке Лене: «У нас в классе двадцать пять человек. И представь, каждый из них дружит ровно с семью одноклассниками». «Не может этого быть», - ответила Лена. Почему она так решила?

Решение. Представим себе, что между каждыми двумя друзьями протянута веревочка. Тогда каждый из 25 учеников будет привязан к 7 концам веревочек, и значит, всего у протянутых веревочек будет $25 \cdot 7 = 175$ концов. Но их общее число не может быть нечетным, так как у каждой веревочки 2 конца.

Полным называется граф, в котором каждая пара различных вершин смежна. Полный граф изображен на рисунке 6.

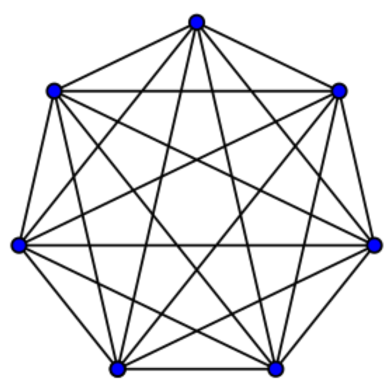


Рис. 6

Лемма 3. *В полном графе с n вершинами число ребер равно* $\frac{n(n-1)}{2}$

Задача 4.Сколько диагоналей в 17-угольнике?

Решение. Вершины 17-угольника – вершины графа, диагонали и стороны – ребра графа. Всего

$17 \cdot (17 - 1) : 2 = 136$ ребер. Из них 17 сторон, остальные – диагонали. Значит диагоналей $136 - 17 = 119$.

Задача 5. Написано 2009-значное число. Каждое двузначное число, образованное соседними цифрами этого числа, идущими в той же последовательности, делится на 23 или на 17. Последняя цифра 7. Какая цифра первая?

Решение. Двузначные числа, которые делятся на 23 – 23, 46, 69, 92. Двузначные числа, которые делятся на 17 – 17, 34, 51, 68, 85. Нарисуем граф, в котором вершинами будут цифры. Соединим их дугами, если они составляют число, которое делится на 23 или на 17. Так как в числе 2009 цифр и последняя 7, то до этого обязательно стояли цифры 1, 5, 8, 6, а потом цифры в обратном порядке повторялись: 6-4-3-2-9-6-4-…, при этом в цикле 5 цифр. На них остается 2009 - 4 = 2005 цифр, то есть целое число циклов. Цикл начался с 6, значит, последняя цифра цикла 9. Так как мы двигались от последней цифры к первой, то 9 – это и есть первая цифра 2009-значного числа.

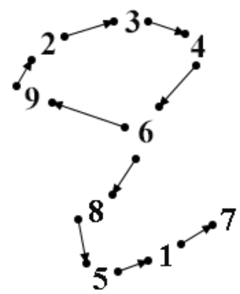


Рис.7

*Граф называется **связным,** если все его вершины связаны.*

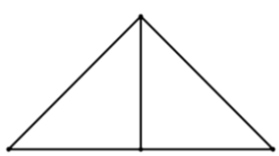


Рис. 8. Связный граф

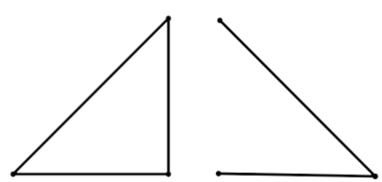


Рис. 9. Несвязный граф

Задача 6. В кабинете стоит несколько приборов и одна розетка, при этом некоторые из них соединены проводами. Все концы проводов подключены к приборам, и один конец подключен к розетке. От компьютера отходят 7 проводов, а от всех остальных приборов по 4. Докажите, что компьютер соединен с розеткой (может быть, через другие приборы).

Решение. Рассмотрим компоненту связности графа, содержащую компьютер. Докажем, что она содержит и розетку. Предположим, что это не так. Тогда в этой компоненте связности одна вершина имеет степень 7, а все другие 4. Но в графе не может быть нечетного числа нечетных вершин, получили противоречие. Значит, компьютер соединен с розеткой.

***Деревом** называется связный граф, не имеющий циклов. То есть в дереве нельзя вернуться в исходную вершину, двигаясь по ребрам и проходя по одному ребру не более одного раза. В дереве с n вершинами n-1 ребер.*

Задача 7. В государстве Морляндия 17 островов, между ними проложены маршруты так, что с каждого острова выходит ровно четыре маршрута. Докажите, что в Морляндии есть такие два острова, что с одного до другого можно добраться двумя разными путями (но может быть, с пересадками на других островах).

Решение. Представим себе острова вершинами графа, а маршруты – ребрами этого графа. В таком графе сумма степеней вершин равна $17 \cdot 4$, и значит, в нем $17 \cdot 4 : 2 = 34$ ребра. Если в этом графе есть цикл, то между любыми вершинами цикла есть два пути – с противоположным направлением обхода. Если же циклов в этом графе нет, то граф является деревом или состоит из нескольких деревьев, а в любом дереве число ребер на 1 меньше числа вершин. Но у нас в графе ребер больше, чем вершин, значит, в графе есть цикл.

Виды графов.

Ориентированный граф.

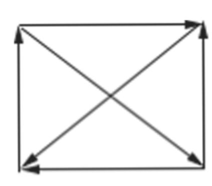


Рис. 10. Ориентированный граф.

Ориентированный граф (орграф) *– граф, на котором указаны направления всех его ребер.*

Дуга*–это ориентированное ребро.*

Смешанный граф.

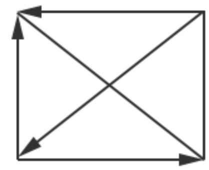


Рис. 11. Смешанный граф.

Смешанный граф *– это граф, в котором некоторые рёбра могут быть ориентированными, а некоторые - неориентированными.*

Изоморфные графы.

Изоморфные графы G_1 и G_2 *– это графы, между вершинами которых можно установить такое взаимно однозначное соответствие, что пары вершин графа G_1 в том и только в том случае соединены ребром, когда соединены ребром соответствующие пары вершин графа G_2.*

В случае ориентированных графов это соответствие должно сохранять ориентацию ребер.

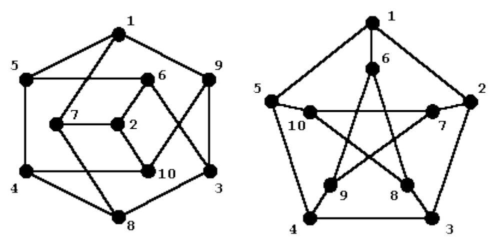


Рис. 12. Изоморфные графы G_1 и G_2

Последовательность чередующихся вершин и ребер, которая начинается и оканчивается вершинами и такая, что каждое ребро соединяет вершины, между которыми оно находится в последовательности, называется ***маршрутом.***

Цепью *называется маршрут без повторяющихся рёбер.* ***Простой*** *цепью называется маршрут без повторяющихся вершин (откуда следует, что в простой цепи нет повторяющихся рёбер).*

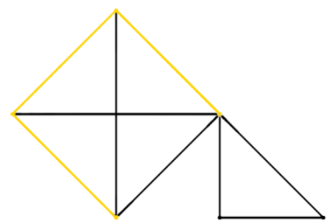


Рис. 13. Цепь

Циклом *называют цепь, в которой первая и последняя вершины совпадают. При этом* ***длиной пути*** *(или цикла) называют число составляющих его рёбер.*

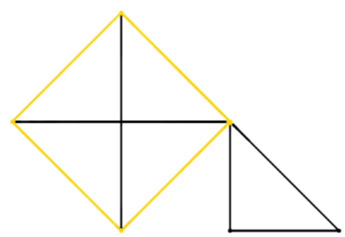


Рис. 14. Цикл

Граф называется ***сильно связным*** *или ориентированно связным, если он ориентированный, и из любой вершины в любую другую имеется ориентированный путь.*

Граф называется ***планарным****, если его можно изобразить на плоскости без пересечения ребер.*

С помощью графов можно создавать интеллект - карты. Интеллект - карты – это инструмент, позволяющий эффективно структурировать и обрабатывать информацию. Поэтому можно обобщить понятия графа (рис. 15).

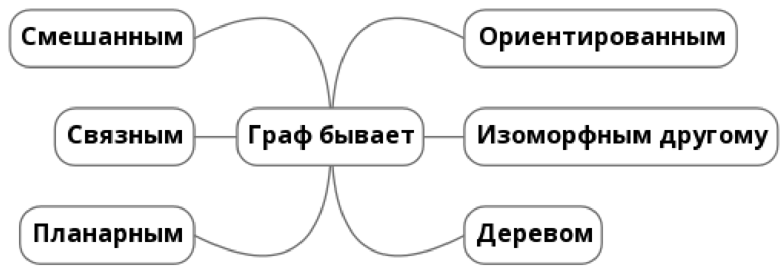


Рис. 15

Эйлеров и гамильтонов циклы. Рисование фигур единым росчерком.

Эйлеров путь в графе *– это путь, проходящий по всем рёбрам графа и притом только по одному разу.*

Эйлеров цикл *– эйлеров путь, являющийся циклом. То есть замкнутый путь, проходящий через каждое ребро графа ровно по одному разу.*

Эйлеров граф *– граф, содержащий эйлеров цикл.*

Отсюда следует, что граф Кенигсбергских мостов не является эйлеровым.

Гамильтонов путь *— простой путь в графе, содержащий все вершины графа ровно по одному разу.*

Гамильтонов цикл *— простой цикл в графе, содержащий все вершины графа ровно по одному разу.*

Гамильтонов граф *— граф, в котором есть гамильтонов цикл.*

Как мы видим, существует аналогия между эйлеровыми и гамильтоновыми линиями. Первая проходит один раз по каждому ребру, вторая – через каждую вершину. Несмотря на такое сходство, это задачи совершенно различные. Для эйлерова графа достаточно проверить, являются ли все его вершины четными. Для гамильтоновых линий до сих пор не найдено еще такого общего критерия, что жалко, так как во многих вопросах теории графов важно, существуют ли на определенных графах гамильтоновы линии.

Одним из видов задач в теории графов, в том числе и олимпиадных являются задачи о прохождении графа «одним росчерком». Граф, который можно начертить, не отрывая карандаш от бумаги, разумеется должен быть связным.

Задача 8. Можно ли придумать такой обход (т.е. нарисовать граф «одним росчерком») графов на рисунке, при котором каждое ребро входит в обход ровно один раз? (Эйлеров путь). Возможно ли, чтобы начало и конец пути при этом совпадали? (Эйлеров цикл).

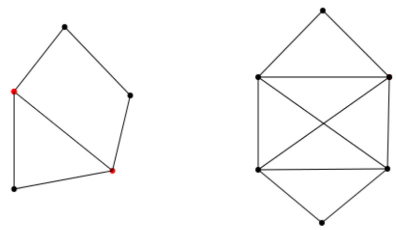


Рис. 16

Граф а) невозможно обойти полностью и вернуться в начальную точку.

Граф на рисунке б) можно обойти, начав с любой вершины и закончив в ней же.

Граф на рисунке обойти «одним росчерком» невозможно, так как существует следующие *свойства графа*:

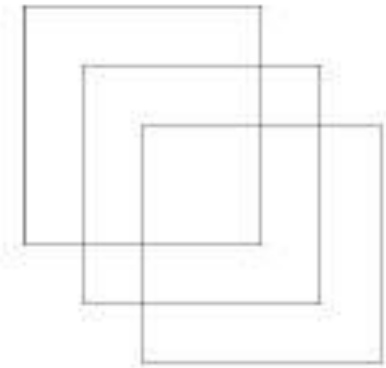
Если в графе все вершины четные, то это ***эйлеров цикл*** *(можно обойти все ребра по одному разу и вернуться в исходную точку);*

Если в графе две вершины нечетные, то это ***эйлеров путь*** *(можно обойти все ребра по одному разу);*

Если в графе больше двух нечетных вершин, то его ребра невозможно пройти, не повторяясь.

Пример.

Можно ли нарисовать эту картинку (см. рис.), не отрывая карандаша от бумаги и проходя по каждой линии по одному разу?



Решение

Нарисовать эту фигуру можно следующим образом. Пронумеруем три квадрата, из которых состоит фигура. Начнем рисовать первый квадрат с любой его точки до тех пор, пока не дойдем до точки пересечения со вторым квадратом. Затем прерываем обход первого квадрата и рисуем второй до тех пор, пока не дойдем до его точки пересечения с третьим. Затем рисуем полностью третий квадрат, окончив дорисовываем второй, затем — первый. Каждый раз мы будем оканчивать рисовать квадрат в той же точке, в которой начинали, то есть в точке пересечения с предыдущим квадратом.

Раскраска графов

Бывают такие ситуации, в которых одни пары элементов множества находятся между собой в одном отношении, другие пары этого множества - в другом отношении, третьи - в третьем (но каждая пара - в одном отношении). Например, среди участников шахматного турнира к какому-то моменту могут быть такие, которые уже сыграли партию друг с другом, и такие, которые не сыграли. Для удобства на рисунках графов ребра, соответствующие одному отношению, окрашивают в один цвет, а ребра, соответствующие другому отношению, - во второй цвет и т. д. Таким образом, раскраска помогает решить множество разных задач.

Задача 9. Шесть школьников участвуют в шахматном турнире, который проводится в один круг, т. е. каждый шахматист встречается со всеми участниками по одному разу. Докажите, что среди них всегда найдутся три участника турнира, которые провели уже все встречи между собой или еще не сыграли друг с другом ни одной партии.

Решение. Любые два участника турнира непременно находятся между собой в одном из двух отношений: они либо уже сыграли между, собой, либо еще не сыграли.

Каждому участнику поставим в соответствие вершину графа. Соединим вершины попарно ребрами двух цветов. Пусть ребро красного цвета означает, что двое уже сыграли между собой, а синего — что не сыграли. Получим полный граф с шестью вершинами и ребрами двух цветов.

Теперь для решения задачи достаточно доказать, что в таком графе обязательно найдется «треугольник» с одноцветными сторонами.

Каждая вершина нашего графа принадлежит пяти ребрам. Скольким ребрам одного цвета может принадлежать произвольная вершина такого графа? Пять принадлежащих одной вершине ребер могут быть окрашены без учета порядка следующим образом (***красное ребро обозначим буквой к, синее- с***): ccccc; кcccc; ккссс; кккcc; ккккс; ккккк. То есть каждая вершина принадлежит, по меньшей мере, трем ребрам одного цвета. Пусть, например, вершина 1 принадлежит трем ребрам красного цвета (рис. 17).

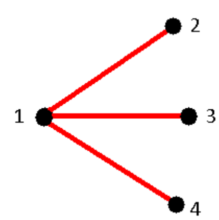


Рис .17.

Какого цвета ребра могут соединять вершины 2, 3 и 4?

Если хотя бы одно из них окажется красным, как на рисунке 18, то получится треугольник с красными сторонами.

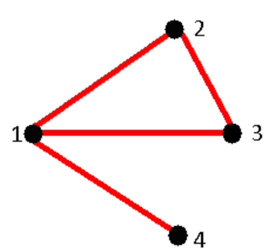


Рис.18.

Если же все эти ребра синие, как на рисунке 19, то они вместе образуют «треугольник» с синими сторонами.

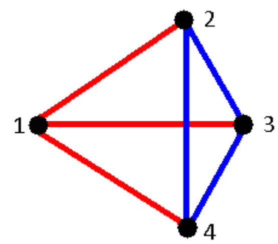


Рис.19

Задача решена. Кроме того, при ее решении доказаны два свойства таких графов.

Свойство 1. Любая вершина полного графа с шестью или более вершинами и ребрами двух цветов принадлежит, по меньшей мере, трем ребрам одного цвета.

Свойство 2. В любом полном графе с шестью или более вершинами и ребрами двух цветов найдется, по меньшей мере, один треугольник с одноцветными сторонами.

Задача 10. На географической карте выбраны пять городов. Известно, что среди них из любых трех найдутся два, соединенные авиалиниями, и два – несоединенные. Докажите, что тогда: 1) каждый город соединен авиалиниями непосредственно с двумя и только с двумя другими городами; 2) вылетев из любого города, можно облететь остальные, побывав в каждом по одному разу, и вернуться назад.

Решение. И в этой задаче рассматриваются множество объектов - городов и два отношения, заданные для элементов этого множества; каждые два города находятся в одном из двух отношений - они либо соединены между собой авиалиниями, либо не соединены. Пусть вершины графа соответствуют городам: красное ребро - наличию авиалинии, синее – отсутствию. По условию среди трех ребер, соединяющих любые три вершины, одно – красное, второе - синее, а это означает, что в графе нет ни одного треугольника с одноцветными сторонами. Тогда из решения предыдущей задачи следует, что каждая вершина непременно принадлежит двум красным ребрам и двум синим (рис. 20), поскольку в противном случае образовался бы треугольник с одноцветными сторонами.

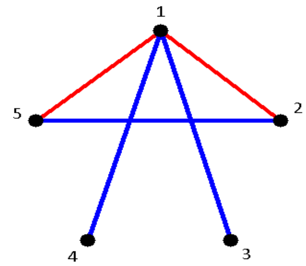


Рис. 20

А это и означает, что каждый город соединен авиалиниями с двумя и только с двумя городами.

Остается показать, что в графе найдется «пятиугольник», все ребра которого - красные.

Выберем одну из вершин, например *1*, а красными будут, скажем, ребра (1, 5) и (1, 2). Ребро (5, 2) не может быть красным, следовательно, красным является одно из ребер: либо (2, 3), либо (2, 4). Пусть красное (2, 3). Если теперь соединить красным ребром вершины 3 и 5, то вершина 4 должна быть соединена красными ребрами с вершинами, которые принадлежат уже двум красным ребрам. По условию это невозможно. Остается соединить красными ребрами вершины *3* и 4, 5 и 4. Остальные ребра должны быть синими (рис. 21).

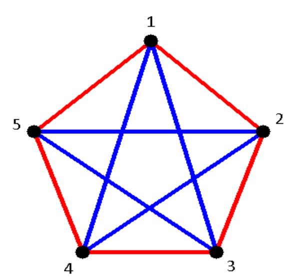


Рис.21.

Итак, получим еще одно свойство.

Свойство 3. Если в полном графе с пятью вершинами и ребрами двух цветов не найдется треугольника с одноцветными сторонами, то граф можно изобразить в виде «пятиугольника» с красными сторонами и синими диагоналями.

Свойство 4. В любом полном графе с шестью или более вершинами и ребрами одного из двух цветов всегда найдутся два разных треугольника с одноцветными сторонами. Эти два треугольника могут иметь общую вершину или даже общее ребро.

Познакомимся со свойствами полного графа, ребра которого окрашены в один из трех цветов. (Каждый цвет соответствует одному из трех отношений между объектами заданного множества.)

Приведем олимпиадную, в решении которой можно использовать графы с цветными ребрами, что существенно упростит ход рассуждений.

Задача 11. Каждый из семнадцати ученых переписывается с остальными. В их переписке речь идет лишь о трех темах. Каждая пара ученых переписывается друг с другом лишь по одной теме. Докажите, что не менее трех ученых переписываются друг с другом по одной и той же теме.

Решение. Условию задачи соответствует полный граф с семнадцатью вершинами и ребрами трех цветов. Из каждой вершины выходят шестнадцать ребер. Докажем, что в таком графе найдется хотя бы один треугольник с одноцветными сторонами. Заметим, что каждая вершина этого графа принадлежит хотя бы шести ребрам одного цвета. Пусть, например, вершина A принадлежит шести красным ребрам (рис. 22).

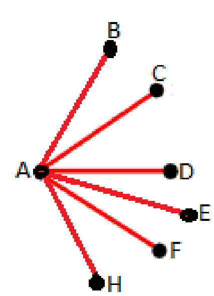


Рис. 22

Если среди вершин B, C, D, E, F, H найдутся две, которые соединены красным ребром, то получится треугольник с красными сторонами. Если не найдутся, то все шесть вершин *B, C, D, E, F, H* соединены между собой попарно ребрами двух цветов (зеленым и синим). В этом графе с шестью вершинами найдется хотя бы один треугольник либо с синими, либо с зелеными сторонами. Задача решена.

Свойство 5. В полном графе с семнадцатью или более вершинами и ребрами трех цветов всегда найдется, по меньшей мере, один треугольник с одноцветными сторонами.

Заметим, что не случайно отношения, которые мы при решении задач изображали цветными ребрами, симметричны (если *A* друг *B,* то *B* друг *A*), но не обязательно транзитивны (если *A* друг *B* и *B* друг С, то *A* может и не быть другом С). В случае, когда отношение между объектами было транзитивным, то соответствующие ребра образовывали треугольник с одноцветными сторонами.

Такие отношения характерны для задач, которые можно решать с помощью графов с цветными ребрами.

КОМБИНАТОРИКА

Основная задача комбинаторики – подсчёт числа элементов конечного множества. В комбинаторных задачах нас обычно интересует, сколько комбинаций, удовлетворяющих тем или иным условиям, можно составить из заданного конечного набора объектов.

Перебор вариантов

В простейших случаях мы можем выписать все нужные нам комбинации и непосредственно подсчитать их. Однако при бессистемном выписывании легко упустить какую-то комбинацию или, наоборот, посчитать некоторую комбинацию дважды. Поэтому при переборе вариантов желательно придерживаться двух правил.

1. Обозначать комбинации буквами или цифрами так, что каждая комбинация будет обозначена своей уникальной последовательностью букв или цифр.
2. Выписывать комбинации в алфавитном порядке (при обозначении буквами) или по возрастанию чисел (при обозначении цифрами).

Задача 1. Сколько существует четырёхзначных чисел, сумма цифр которых меньше 4?

Решение. Выпишем по возрастанию все четырёхзначные числа, сумма цифр которых равна 1, 2 или 3:

1000, 1001, 1002, 1010, 1011, 1020, 1100, 1101, 1110, 1200, 2000, 2001, 2010, 2100, 3000.

Всего получилось 15 чисел.

Задача 2 (9 – 11 класс). Сколькими способами цифры от 1 до 9 можно разбить на несколько (больше одной) групп так, чтобы суммы цифр во всех группах были равны друг другу? (Разбиения, отличающиеся только перестановкой групп, считаются одинаковыми.)

Решение. Сумма цифр от 1 до 9 равна 45. Если мы разбиваем числа на группы, и суммы везде равны S, то S делит 45 и не равно 45. Также $S \geq 9$, так как цифра 9 входит в группу. Получается два варианта: S = 9 или S = 15.

Если S = 9, то 9 идёт отдельно, 8 может входить только с 1, 7 только с 2, и так же 6 + 3, 5 + 4. Это один способ.

Пусть S = 15. Тогда 9 идёт вместе с числами, в сумме дающими 6, и варианты такие:

а) 9 + 6

б) 9 + 5 + 1

в) 9 + 4 + 2

г) 9 + 3 + 2 + 1

Для каждого случая смотрим на группу, куда входит 8. Если эта вторая группа сформирована, то третья определена однозначно. Число 8 идёт с суммой, равной 7, и это либо 7, либо 6 + 1, либо 5 + 2, либо 4 + 3, либо 4 + 2 + 1.

Для а) подходят 4 из этих случаев (кроме 6 + 1), для б) и в) по 2 случая, для г) всего один случай (только 7). Итого 4 + 2 + 2 + 1 = 9. Вместе с одним случаем для S = 9 получается итоговый ответ 10.

Вариантов может быть довольно много, но в некоторых случаях, тем не менее, самый быстрый способ решения задачи – разумно организованный перебор.

Задача 3. (*9 -10 класс*) Сколько одночленов окажется в многочлене $(1 + t^3 + t^6 + ... + t^{30})(1 + t^5 + t^{10} + ... + t^{30})$ после раскрытия скобок и приведения подобных членов?

Решение. Раскроем скобки и (не приводя подобные члены) выпишем в таблицу все получающиеся степени одночленов. Первая строка таблицы – это степени, получающиеся при умножении первого многочлена-сомножителя на первое слагаемое второго многочлена (равное 1); вторая строка – это степени, получающиеся при умножении первого многочлена на второе слагаемое второго многочлена (равное t^5), и т. д.

0	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
5	8	11	14	17	20	23	26	29	32	35
10	13	16	19	22	25	28	31	34	37	40
15	18	21	24	27	30	33	36	39	42	45
20	23	26	29	32	35	38	41	44	47	50
25	28	31	34	37	40	43	46	49	52	55
30	33	36	39	42	45	48	51	54	57	60

Всего в таблице 77 чисел, из них 24 входят в таблицу более одного раза (блоки повторяющихся чисел обведены рамкой). Следовательно, после приведения подобных членов получится 77 – 24 = 53 одночлена.

В некоторых ситуациях не представляется возможным непосредственно выписать все варианты, но тем не менее очевидно, сколько их на самом деле.

***Задача 4.* (*9 - 10 класс*)** Сколько пар натуральных чисел удовлетворяет равенству

$2x + 5y = 90000$?

Решение. Переписав данное равенство в виде $2x = 90000 - 5y$, мы видим, что правая часть делится на 5. Тогда $2x$ делится на 5, а значит, и x делится на 5; то есть $x = 5n$ для некоторого натурального n. Аналогично заключаем, что $y = 2k$ для некоторого натурального k.

Теперь исходное равенство принимает вид: $10n + 10k = 90000$, то есть $n + k = 9000$. Спрашивается: сколько пар (n, k) удовлетворяют полученному равенству?

Понятно, что n может принимать значения от 1 до 8999. Число k однозначно определяется выбором n (поскольку $k = 9000 - n$). Следовательно, имеется 8999 пар чисел (n, k).

Но число x однозначно определяется по n, а число y однозначно определяется по x (или по k). Значит, искомое количество пар (x, y) также равно 8999.

Задача 5. **(*9 класс*)** Из множества $\{1, 2, 3, 4\}$ выбираются три различных натуральных числа a, b, c. Сколько существует способов сделать это так, чтобы число a^{b^c} делилось на 4?

Решение.

На 4 не будут делится числа с основанием степени a, равным 1 или 3. Остается только рассмотреть варианты с основаниями 2 и 4.

$a = 2 \Rightarrow b^c = 1^3;\ 3^1;\ 1^4;\ 4^1;\ 3^4;\ 4^3.$

$a = 4 \Rightarrow b^c = 1^3;\ 3^1;\ 1^2;\ 2^1;\ 3^2;\ 2^3.$

Всего 12 вариантов. Из них необходимо исключить два: $a^{b^c} = 2^{1^3} = 2^{1^4} = 2$, т.к. эти числа не делятся на 4. Остается 10 способов.

Правила суммы и произведения

Правило суммы и правило произведения – основные комбинаторные принципы, которые используются в комбинаторике повсеместно.

Правило суммы

Проиллюстрируем правило суммы на примере.

Пример. На полке стоят десять томов Пушкина, четыре тома Лермонтова и шесть томов Гоголя. Сколькими способами можно выбрать с полки одну книгу?

Решение. Понятно, что 10 + 4 + 6 = 20 способами.

Правило суммы. Пусть объект a можно выбрать m способами, а объект b можно выбрать n способами, причём выбор одного объекта исключает одновременный выбор другого объекта. Тогда выбор «либо a, либо b» можно сделать $m + n$ способами.

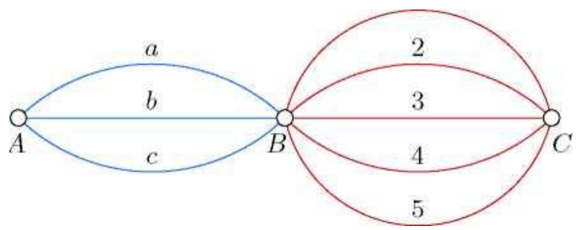
Более общим образом, пусть объект a_1 можно выбрать n_1 способами, объект a_2 можно выбрать n_2 способами, …, объект a_k можно выбрать n_k способами, причём выбор одного объекта исключает одновременный выбор другого объекта. Тогда выбор «либо a_1, либо a_2, ... , либо a_k» можно осуществить $n_1 + n_2 + ... + n_k$ способами.

Правило произведения

При решении комбинаторных задач часто приходится умножать число способов выбора одного объекта на число способов выбора другого объекта. Рассмотрим некоторые примеры.

Пример 1. Имеются три города: А, В и С. Из А в В ведут три дороги, из В в С – пять дорог. Сколько различных путей ведут из А в С? Прямого пути между А и С нет.

Решение. Обозначим дороги буквами и цифрами. Именно, дороги из А в В назовём *a, b, c;* дороги из В в С назовём 1, 2, 3, 4, 5.



Тогда любой маршрут из А в С получает уникальное имя в виде пары из буквы и цифры. Например, маршрут b4 означает, что из А и В мы пошли по дороге b, а из B в С – по дороге 4. Выпишем все такие пары в виде таблицы:

$a1$	$a2$	$a3$	$a4$	$a5$
$b1$	$b2$	$b3$	$b4$	$b5$
$c1$	$c2$	$c3$	$c4$	$c5$

Всего получилось $3 \cdot 5 = 15$ маршрутов. Как видим, число маршрутов равно *произведению* числа дорог из A в B на число дорог из B в C.

Пример 2. Сколько существует пятизначных чисел, у которых все цифры чётные?

Решение. Представим себе пять последовательных позиций для цифр пятизначного числа. На первую позицию можно поставить четыре цифры: 2, 4, 6 или 8. На вторую позицию можно поставить пять цифр: 0, 2, 4, 6 или 8. На третью, четвёртую и пятую позиции можно поставить те же пять цифр: 0, 2, 4, 6 или 8. Всего имеем $4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 2500$ вариантов заполнения позиций; именно столько и будет искомых чисел.

Дадим строгую формулировку этого правила.

Правило произведения. Пусть объект a можно выбрать m способами, после чего объект b можно выбрать n способами. Тогда упорядоченную пару $(a,\ b)$ можно выбрать $m \cdot n$ способами; иными словами, существует $m \cdot n$ различных упорядоченных пар $(a,\ b)$.

Более общим образом, пусть объект a_1 можно выбрать n_1 способами, после чего объект a_2 можно выбрать n_2 способами, …, после чего объект a_k можно выбрать n_k способами, Тогда цепочку $(a_1,\ a_2, \ldots,\ a_k)$ можно выбрать $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$ способами.

Задача 6. Сколько подмножеств у 5-элементного множества? У n-элементного?

Решение. Пусть имеется множество из 5 элементов $A = \{a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5\}$. Каждому его подмножеству B можно дать уникальное имя в виде упорядоченной пятёрки нулей и единиц по следующему правилу: если на i-й позиции пятёрки стоит единица, то $a_i \in B$; если же на i-й позиции пятёрки стоит нуль, то $a_i \notin B$.

Например, пятёрка 10010 обозначает подмножество $\{a_1,\ a_4\}$. Пятёрки 00000 и 11111 обозначают соответственно пустое множество и само множество А.

Таким образом, у множества А имеется ровно столько подмножеств, сколько существует упорядоченных пятёрок из нулей и единиц. Каждую позицию пятёрки можно заполнить двумя способами (0 или 1), поэтому таких пятёрок $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5 = 32$. Это и есть число подмножеств 5-элементного множества.

Для n-элементного множества рассуждение аналогично. Каждое его подмножество получает уникальное имя (по тому же правилу) в виде цепочки длины n, состоящей из нулей и единиц. Всего таких цепочек 2^n. Следовательно, *число всех подмножеств n-элементного множества равно 2^n*. Таким образом мы получили формулу комбинаторики – формулу размещений с повторениями.

Пример. (*Размещения с повторениями*) Сколькими способами можно разложить m различных шаров в n различных ящиков? На число шаров в ящике ограничений нет.

Решение. Представим себе m клеток (это шары). В каждую клетку можно вписать любое число от 1 до n (номер ящика, в который кладётся шар). Всего получится n^m всевозможных способов заполнить клетки, то есть разложить шары по ящикам.

Число разложений m различных шаров по n различным ящикам (без ограничений на число шаров в ящике) называется иногда *числом размещений с повторениями из n по m* и обозначается $\overline{\mathrm{A}}_n^m$. Таким образом, $\overline{\mathrm{A}}_n^m = n^m$.

О более содержательном понятии – числе размещений (без повторений) скажем ниже

Пример. Сколько делителей у числа 720?

Решение. Разложим на простые множители: $720 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$. Следовательно, всякий делитель числа 720 должен иметь вид $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$, где $a \in \{0,1,\ 2,\ 3,\ 4\}$, $b \in \{0,1,2\}$, $c \in \{0,1\}$. Мы видим, что каждому делителю соответствует единственная упорядоченная тройка $(a,\ b,\ c)$ и наоборот – каждой упорядоченной тройке $(a,\ b,\ c)$ с элементами из данных множеств отвечает единственный делитель числа 720. Можно сказать, что $(a,\ b,\ c)$ – это уникальное имя делителя, и потому делителей будет ровно столько же, сколько получится упорядоченных троек (a,b,c).

Но число a можно выбрать 5 способами, число b можно выбрать 3 способами, число с можно выбрать 2 способами; значит, упорядоченную тройку (a, b, c) можно выбрать $5 \cdot 3 \cdot 2 = 30$ способами. Таким образом, у числа 720 имеется 30 делителей.

Решение последней задачи можно обобщить и найти количество делителей произвольного натурального числа, представленного своим разложением на простые множители.

Задача 7. *(10-11 классы*) Сколько существует четырёхзначных чисел, делящихся на 4, в десятичной записи которых нет цифр 4, 5, 6, 8?

Решение.

Делимость на 4 зависит только от двух последних цифр. Первые две цифры при этом выбираются произвольно, с учётом ограничений. На первом месте может стоять любая из 5 цифр, кроме нуля и четырёх «запрещённых; на втором месте любая из 6. Итого 30 вариантов.

На конце находится чётная цифра, и это либо 0, либо 2. Перед нулём также находится чётная цифра, и это даёт два варианта 00 и 20. Перед 2 находится нечётная цифра, любая кроме 5. Это даёт ещё 4 варианта для двух последних цифр: 12, 32, 72, 92. Итого 6 возможностей.

По правилу произведения, всего чисел будет $30 \cdot 6=180$.

В комбинаторной задаче могут использоваться также факты, связанные с делимостью.

Задача 8. (*9-11 классы*) Сколько пар натуральных чисел (x,y) удовлетворяют равенству НОД (x, y) + НОК$(x, y) = 2011$?

Решение. Напомним для начала некоторые простые факты про НОД и НОК. Они наверняка пригодятся вам на олимпиадах.

Пусть НОД $(x, y) = d$. Тогда $x = ad$ и $y = bd$ для некоторых натуральных a и b. При этом числа a и b являются взаимно простыми (то есть не имеют общих делителей, кроме 1). В самом деле, если у a и b есть общий делитель с > 1, то число cd будет общим делителем чисел x и y. Но это противоречит тому, что d – наибольший общий делитель этих чисел.

Пусть z есть общее кратное чисел x и y (не обязательно наименьшее). Поскольку z делится на x и на y, имеем: $z = kx = kad$ и $z = my = mbd$ для некоторых натуральных k и m. Отсюда $kad = mbd$, то есть $ka = mb$; но так как a и b взаимно просты, то m делится на a: $m = na$ для некоторого натурального n. Следовательно, $z = nabd$, откуда видно, что *наименьшее* общее кратное получается при $n =1$: НОК$(x, y) = abd$.

Заметим попутно, что НОД$(x, y) \cdot$ НОК$(x, y) = d \cdot abd = ad \cdot bd = xy$. Мы доказали тем самым известный факт: *произведение НОД и НОК двух чисел равно произведению этих чисел.*

Теперь переходим к решению задачи. Имеем:

$2011 = d + abd = d(1 + ab)$.

Отсюда следует, что 2011 делится на $1 + ab > 1$. Однако 2011 - простое число (убедитесь в этом самостоятельно), поэтому единственным его делителем, большим единицы, может быть лишь оно само: $1 + ab = 2011$, откуда $ab = 2010$. Тогда $d = 1$, то есть $x = a$ и $y = b$.

Задача свелась к следующему вопросу: сколько пар натуральных чисел (a, b) удовлетворяют равенству $ab = 2010$? Из этого равенства b однозначно определяется по a; поэтому фактически нам надо выяснить, сколько делителей a имеется у числа 2010.

Для этого раскладываем 2010 на простые множители: $2010 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 67$. Дальнейшее рассуждение вам уже знакомо: каждый делитель числа 2010 имеет вид $2^p \cdot 3^q \cdot 5^r \cdot 67^s$, где числа p, q, r, s могут принимать значения 0 или 1. Поэтому количество делителей числа 2010 равно $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$. Это и есть искомое число пар (x, y).

Часто в задачах работают одновременно оба правила – суммы и произведения.

Пример. Сколько трёхзначных чисел содержат ровно одну цифру 7?

Решение. Единственная цифра 7 может стоять либо на первом месте, либо на втором, либо на третьем. Соответственно находим количества чисел в каждом из этих случаев, после чего пользуемся правилом суммы.

Найдём количество n_1 трёхзначных чисел, у которых единственная цифра 7 будет первой. На второй и третьей позициях может стоять любая из цифр, кроме 7; следовательно, вторую и третью позицию мы можем заполнить $9 \cdot 9 = 81$ способами. Итак, $n_1 = 81$.

Теперь найдём количество n_2 трёхзначных чисел, у которых единственная цифра 7 стоит на втором месте. Первая цифра может быть любой, кроме 0 и 7 (то есть 8 способов выбора). Вторая цифра – любая, кроме 7 (это 9 способов). Следовательно, $n_2 = 8 \cdot 9 = 72$.

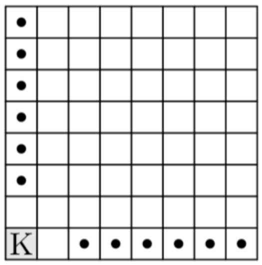
Аналогично находим количество n_3 трёхзначных чисел, у которых единственная цифра 7 стоит на третьем месте: $n_3 = 8 \cdot 9 = 72$.

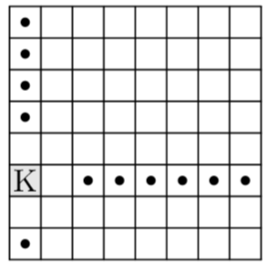
По правилу суммы искомое количество чисел равно $n\backslash + n_2 + n_3 = 81 + 72 + 72 = 225$.

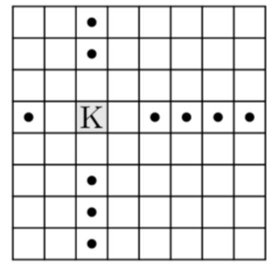
Задача 9 *(9 класс)* Сколько существует способов расставить на шахматной доске 8 х 8 белую ладью и чёрного короля так, чтобы ладья била короля, но король не бил ладью? Способы расстановки, получающиеся друг из друга поворотом доски, считаются разными.

Решение. Где бы ни стояла на доске ладья, она держит под боем ровно 14 клеток – 7 по горизонтали и 7 по вертикали.

Если король стоит в углу доски (таких клеток 4), то в своих горизонтали и вертикали он бьёт две клетки. Значит, ладью можно поставить на 12 клеток (рисунок слева)







Если король стоит на краю доски, но не в углу (таких клеток 24), то в своих горизонтали и вертикали он бьёт три клетки. Значит, ладью можно поставить на 11 клеток (рисунок в центре).

Если же король стоит не на краю доски (таких клеток 36), то в своих горизонтали и вертикали он бьёт четыре клетки. В этом случае ладью можно поставить на 10 клеток (рисунок справа).

Всего требуемых расстановок короля и ладьи получается

$4 \cdot 12 + 24 \cdot 11 + 36 \cdot 10 = 672$.

Размещения, перестановки и сочетания

Размещения

Выше нам уже встретились размещения с повторениями. Однако повторения возможны не всегда. В некоторых ситуациях бывает, что выбор, сделанный на данном этапе, ограничивает число вариантов выбора на следующем этапе.

Пример. В футбольной команде 11 человек. Сколькими способами можно выбрать: а) капитана и его ассистента; б) капитана, первого ассистента и второго ассистента?

Решение. а) Капитаном можно выбрать любого из 11 футболистов. Ассистентом – любого из 10 оставшихся. Поэтому капитана и ассистента можно выбрать $11 \cdot 10 = 110$ способами.

б) Капитана и первого ассистента мы уже выбрали 11 ·10 способами. Для выбора второго ассистента остаётся 9 способов. Поэтому капитана, первого ассистента и второго ассистента можно выбрать 11 · 10 · 9 = 990 способами.

В этой задаче мы фактически нашли число упорядоченных пар и упорядоченных троек, которые можно выбрать из 11-элементного множества. Теперь рассмотрим данный вопрос в общем виде.

Определение. Пусть имеется множество, содержащее n элементов. Произвольный упорядоченный набор, составленный из k различных элементов данного множества, называется *размещением из* n *элементов по* k *элементов* (или просто размещением из n по k).

Число размещений из n элементов по k элементов обозначается A_n^k и вычисляется по формуле

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)$$

Данную формулу можно записать в более компактном виде, если правую часть умножить и разделить на $(n-k)!$:

то есть $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$

Перестановки

Перестановка есть простой частный случай размещения, однако настолько важный, что заслуживает отдельного рассмотрения.

Пример. Сколько пятизначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5 при условии, что цифры не должны повторяться?

Решение. Для выбора первой цифры имеется пять способов, для выбора второй – четыре, для выбора третьей – три, для выбора второй – два, и для выбора последней цифры остаётся один способ. Всего чисел получается 5 · 4 · 3 · 2 · 1 = 5! = 120.

Определение. Пусть имеется множество, содержащее n элементов. Произвольная цепочка длины n, составленная из всех элементов данного множества, называется *перестановкой* этого множества (или перестановкой n элементов).

Иными словами, перестановка n элементов – это размещение из n по n. Число перестановок n-элементного множества обозначается P_n

$P_n = n!$

Данная формула легко получается также из формул (1) и (2) при $k = n$.

Сочетания

Переходим к рассмотрению *сочетаний.* Вернёмся к нашей футбольной команде, в которой мы выбирали капитана и ассистента.

Пример. Сколькими способами можно выбрать троих футболистов из 11 для прохождения допинг-контроля?

Решение. Произведение 11 · 10 · 9 (число способов выбора капитана, первого ассистента и второго ассистента) есть число *упорядоченных* троек футболистов. В данном же случае, порядок не важен, поэтому нам нужно найти число *неупорядоченных* троек фуболистов, выбираемых из 11 человек.

В одну неупорядоченную тройку склеиваются те и только те упорядоченные тройки, которые отличаются лишь порядком следования элементов. Число таких троек равно числу перестановок трёх элементов, то есть 3! = 6. Например, в одну неупорядоченную тройку

{Петя, Вася, Коля}

склеиваются ровно шесть упорядоченных троек

(Вася, Коля, Петя), (Вася, Петя, Коля), (Коля, Вася, Петя), (Коля, Петя, Вася), (Петя, Вася, Коля), (Петя, Коля, Вася).

Следовательно, число неупорядоченных троек в 3! раз меньше числа упорядоченных троек.

Соответственно, имеется $\frac{11 \cdot 10 \cdot 9}{3!} = 165$ способов выбрать троих человек для допинг-контроля.

Теперь рассмотрим данный вопрос в общем виде.

Определение. Пусть имеется множество, содержащее n элементов. Произвольный неупорядоченный набор, состоящий из *к* различных элементов данного множества, называется *сочетанием из* n *элементов по к элементов* (или просто сочетанием из n по k).

Иными словами, сочетание из n элементов по k элементов – это просто k -элементное подмножество n-элементного множества.

Число сочетаний из n элементов по k элементов обозначается и вычисляется по формуле $C_n^k = \frac{A_n^k}{k!}$

или воспользовавшись формулой числа размещений получим

$$C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

В следующих задачах нужно не просто находить числа сочетаний, но и одновременно использовать правила произведения и суммы.

Задача 10. (*10-11 классы*) Сколькими способами можно собрать бригаду из 3 маляров и 4 штукатуров, если имеется 6 маляров и 8 штукатуров?

Решение. Маляров можно выбрать C_6^3 способами. Штукатуров можно выбрать C_8^4способами. Значит, для формирования бригады имеется $C_6^3 \cdot C_8^4$ = 20 · 70 = 1400 способов.

Задача 11. (*9 класс*) Сколько среди целых чисел от 100 до 10000 таких, в записи которых встречаются ровно три одинаковых цифры?

Решение. Описанные в условии числа будем называть *хорошими.* Трёхзначных хороших чисел, очевидно, девять: 111, 222, ... , 999.

Ищем количество четырёхзначных хороших чисел. Ровно двух нулей в записи хорошего числа быть не может. Остаются следующие варианты: три нуля, один нуль, нет нулей. Хороших четырёхзначных чисел с тремя нулями девять: 1000, 2000, …, 9000. Предположим, что среди цифр хорошего четырёхзначного числа ровно один нуль. Остальные три (совпадающие) цифры можно выбрать 9 способами. При этом нуль может стоять на втором, третьем или четвёртом месте. Всего получается 9 · 3 = 27 хороших четырёхзначных чисел с одним нулём.

Предположим, что среди цифр хорошего четырёхзначного числа нуля нет. Тройку совпадающих цифр можно выбрать 9 способами; три позиции для этой тройки можно выбрать C_4^3= 4 способами; четвёртую цифру можно выбрать 8 способами. Всего хороших четырёхзначных чисел без нуля получается 9 · 4 · 8 = 288.

Искомое количество хороших чисел равно 9 + 9 + 27 + 288 = 333.

Задача 12. (*9-11 классы*) На некоторой прямой произвольно отмечено 10 точек, а на параллельной ей прямой – 12 точек. Сколько существует треугольников и сколько четырёхугольников с вершинами в этих точках?

Решение. Будем для краткости называть 10 точек на первой прямой *красными,* а 12 точек на второй прямой – *синими*.

У треугольника может быть: 1) одна красная вершина и две синих; 2) одна синяя вершина и две красных. В первом случае мы выбираем красную вершину 10 способами, а синюю - C_{12}^2 = 12 · 11/2 = 66 способами. Во втором случае мы выбираем синюю вершину 12 способами, а красную - C_{10}^2 = 45 способами. Всего треугольников получается 10 · 66 + 12 · 45 = 1200.

У четырёхугольника лишь одна возможность: две красные вершины и две синие. Число четырёхугольников получается равным $C_{10}^2 \cdot C_{12}^2 = 45 \cdot 66$ = 2970.

Перестановки с повторениями

Идея нахождения числа перестановок с повторениями иногда называется *методом кратного подсчёта.* Суть метода проста: чтобы посчитать нужное количество комбинаций, мы сначала находим количество других комбинаций, превосходящее количество исходных комбинаций в некоторое число раз, а потом делим на это число.

Формула для числа сочетаний немедленно получается с помощью метода кратного подсчёта. В самом деле, число способов выбора k объектов из n объектов равно числу анаграмм n-буквенного слова

$$\underbrace{aa\dots a}_{k}\underbrace{bb\dots b}_{n-k},$$

состоящего из k букв a и n - k букв b (ведь каждая анаграмма – это определённый выбор k позиций из n для букв a). Из сказанного выше ясно, что у данного слова имеется $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ анаграмм; столько же получается и сочетаний из n по k.

Теперь сформулируем общую задачу о перестановках с повторениями.

Задача. Имеются m различных шаров и n различных ящиков. Сколькими способами можно разложить шары по ящикам так, чтобы m_1 шаров оказались в первом ящике, m_2 шаров – во втором, …, m_n шаров – в n-м ящике ($m_1 + m_2 + \dots + m_n = m$)?

Решение. Искомое число способов обозначим $P(m_1, m_2, \dots, m_n)$. Оно равно количеству анаграмм n-буквенного слова

$$\underbrace{a_1 a_1 \dots a_1}_{m_1}\underbrace{a_2 a_2 \dots a_2}_{m_2}\dots\underbrace{a_n a_n \dots a_n}_{m_n}.$$

и вычисляется по формуле $P(m_1, m_2, \dots, m_n) = \frac{m!}{m_1! m_2! \dots m_n!}$

Нетрудно видеть, что данная формула обобщает формулу для числа сочетаний. В самом деле, мы просто имеем $C_n^m = P(m, n - m)$.

Сочетания с повторениями

Как мы знаем, число способов разложить m различных шаров в n различных ящиков (без каких-либо дополнительных ограничений) есть число размещений с повторениями: $\overline{A}_n^m = n^m$. Следующая формула дает ответ на вопрос, сколько получится способов, если шары *одинаковые*?

Число способов, которыми можно разложить m одинаковых шаров по n различным ящикам, называется *числом сочетаний с повторениями из* n *по* m, обозначается $\bar{C}_n^m$ и вычисляется по формуле $\bar{C}_n^m = C_{n+m-1}^m$.

Задача. Сколькими способами можно разложить пять одинаковых шаров по трём различным ящикам так, чтобы ни один ящик не пустовал?

Решение. Положим вначале по одному шару в каждый ящик – тогда ни один ящик пустым не будет. У нас остались два шара, которые надо разложить по трём ящикам произвольным образом. Число таких раскладываний есть число последовательностей из двух нулей и двух единиц, то есть C_4^2.

Можно рассуждать и по-другому. Положим в ряд пять шаров. Перегородки могут быть только в промежутках между шарами. Таким образом, нам нужно поместить две перегородки в какие-то два из четырёх промежутков, а выбрать две позиции из четырёх можно C_4^2 способами.

Задача. Сколько решений в натуральных числах имеет уравнение x + y + z = 5?

Решение. Это в точности предыдущая задача, поскольку ни одна из переменных теперь не может равняться нулю. Уравнение имеет $C_4^2 = 6$ решений в натуральных числах. Нетрудно решить задачу и непосредственным перебором (сделайте это).

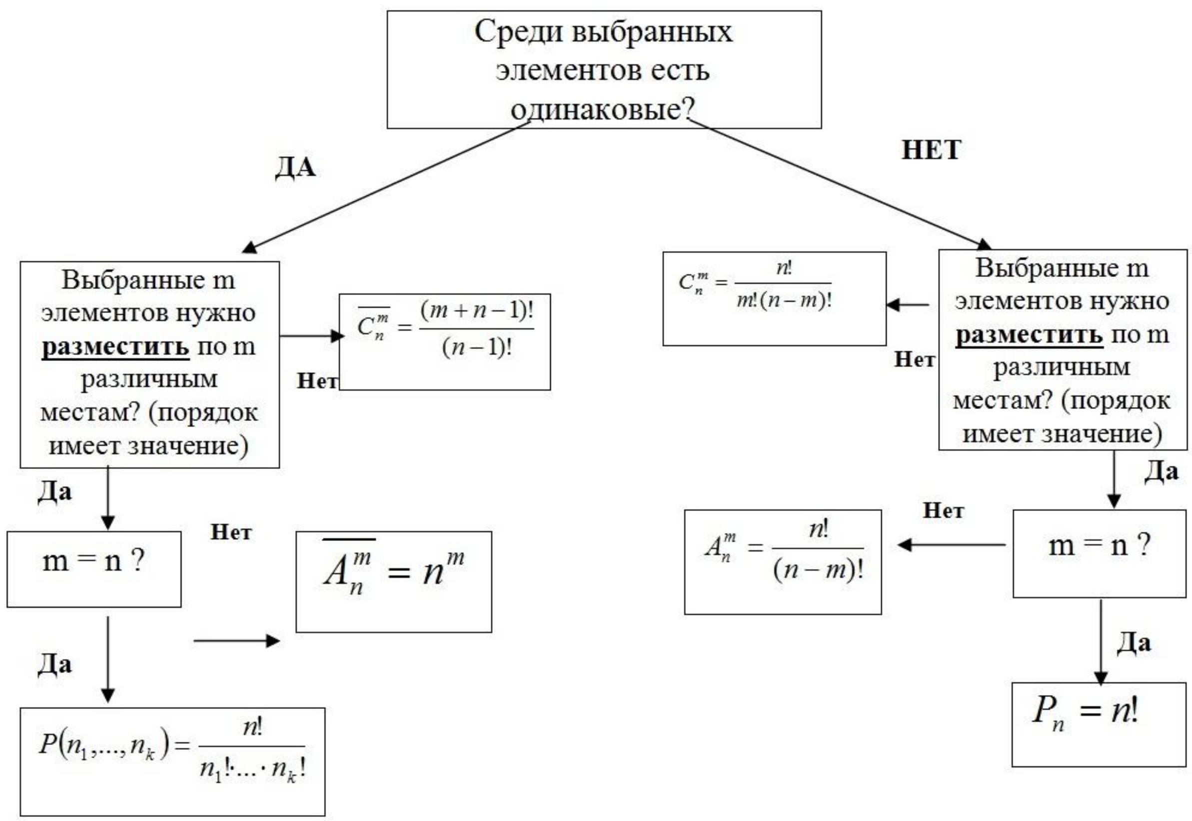
Задача 13. (*9-11классы*) 19 депутатов Городского Собрания выбирают Председателя из 5 кандидатов. Каждый голосует ровно за одного из них. После голосования составляется протокол заседания, в котором указывается лишь количество голосов за каждого кандидата (без указания, кто за кого проголосовал). Сколько различных протоколов может получиться?

Решение. Пусть за первого кандидата проголосовало x_1 депутатов, за второго – x_2 депутатов, ... , за пятого – x_5 депутатов. Тогда

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 19 \qquad (*)$$

поскольку каждый депутат голосовал лишь за одного кандидата. Теперь ясно, что искомое количество протоколов равно количеству решений уравнения (*) в целых неотрицательных числах. А это количество, в свою очередь, есть число способов разложить 19 одинаковых шаров по пяти различным ящикам, то есть число последовательностей из 19 нулей (шаров) и 4 единиц (перегородок). Таких последовательностей имеется $C_{23}^{4} = 8855$.

ОПОРНЫЙ КОНСПЕКТ ПО ТЕМЕ «КОМБИНАТОРИКА»



ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Большая часть заданий для самостоятельного решения к этому занятию не разбиты на классы, т.к. во-первых теория графов не входит в перечень тем школьной математики , а во-вторых, комбинаторные задачи, рассматриваемые на этом занятии решаются с помощью основных формул, таким образом задачи на эти тему под силу решить как 9-тикласснику, так и выпускнику школы.

Задача 1.

За круглым столом сидят несколько гостей. Некоторые из них знакомы между собой; знакомство взаимно. Все знакомые любого гостя (считая его самого) сидят вокруг стола через равные промежутки. (Для другого человека эти промежутки могут быть другими.) Известно, что любые двое имеют хотя бы одного общего знакомого. Докажите, что все гости знакомы друг с другом.

Задача 2.

а) Можно ли занумеровать ребра куба натуральными числами от 1 до 12 так, чтобы для каждой вершины куба сумма номеров ребер, которые в ней сходятся, была одинаковой?

б) Аналогичный вопрос, если расставлять по ребрам куба числа $-6, -5, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

Задача 3. (9 класс)

На конкурсе по математике в институте МИМИНО предлагалось 20 задач. На закрытие пришло 20 школьников. Каждый из них решил по две задачи, причем выяснилось, что среди пришедших каждую задачу решило ровно два школьника. Докажите, что можно так организовать разбор задач, чтобы каждый школьник рассказал одну из решенных им задач, и все задачи были разобраны.

Задача 4. (10-11 классы)

В одной из вершин а) октаэдра б) куба сидит муха. Может ли она проползти по всем его ребрам ровно по одному разу и возвратиться в исходную вершину? (Примечание: октаэдр представляет собой две четырехугольные пирамиды, склеенные по основаниям.)

Задача 5. (9–11 классы)

Сколькими способами можно поставить цифры от 1 до 9 вместо букв так, чтобы все неравенства выполнялись?

$$\begin{array}{ccccc} a & > & b & > & c \\ \vee & & \vee & & \vee \\ d & > & e & > & f \\ \vee & & \vee & & \vee \\ g & > & h & > & i \end{array}$$

Задача 6. (9–11 классы)

В детский сад завезли карточки для обучения чтению: на некоторых написано «МА», на остальных - «НЯ». Каждый ребёнок взял три карточки и стал составлять из них слова. Оказалось, что слово «МАМА» могут сложить из своих карточек 25 детей, слово «НЯНЯ» - 30 детей, а слово «МАНЯ» - 36 детей. У скольких ребят все три карточки одинаковы?

Задача 7.(10–11 классы)

Задача. Сколько пар натуральных чисел (x,y) удовлетворяют равенству НОД(x,y) + НОК(x,y) = 2011?

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Подготовлены методические рекомендации по теме «Теория графов. Комбинаторика» для участников математических олимпиад (9-11 классы). Приведены решения типовых задач по указанной теме; задачи для самостоятельного решения.

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Кудревич, Е.А. Обучение решению математических задач с помощью графов. Электрон. тестовые дан.– кафедра математического анализа ХГПУ– 2016. Режим доступа: http://www.km.ru/referats/6A0C11F96B144C3CB6D77EDC145EDEB6
2. МОУ ДПОС «Центр медиаобразования». Дистанционная олимпиада по математике – г. Тольятти 2017-2018 год.
3. Н. Я. Виленкин и др. Комбинаторика. М.: МЦНМО, 2013.
4. С. А. Генкин, И. В. Итенберг, Д. В. Фомин. Ленинградские математические кружки. Киров: «АСА», 1994. Главы «Комбинаторика-1» и «Комбинаторика-2».
5. Н. Б. Алфутова, А. В. Устинов. Алгебра и теория чисел. Сборник задач для математических школ. М.: МЦНМО, 2002. Глава 2. Комбинаторика. В свободном доступе: http://www.mccme.ru/free-books/pdf/alfutova.pdf.
6. В. В. Прасолов. Задачи по алгебре, арифметике и анализу. М.: МЦНМО, 2007. Глава 14. Комбинаторика. В свободном доступе: ftp://ftp.mccme.ru/users/prasolov/algebra/algebra.pdf.
7. В. В. Прасолов. Задачи по планиметрии. М.: МЦНМО, 2006. Глава 27, § 2. Комбинаторика. В свободном доступе: http://ilib.mccme.ru/pdf/planim5.pdf.
8. В. В. Прасолов. Задачи по стереометрии. М.: МЦНМО, 2010. Глава 19, § 3. Комбинаторика. В свободном доступе: tp://ftp.mccme.ru/users/prasolov/stereo/stereo.pdf.