Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«АРМАВИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Институт прикладной информатики, математики и физики
Кафедра математики, физики и методики их преподавания

Методы решения олимпиадных задач по теме «Треугольники. Окружности»

Составители: доцент кафедры математики, физики и МП, Тарасова Т.А.,
ст. пр. кафедры математики, физики и МП, Спевакова Н.Ю.

Армавир, 2019

Аннотация

В методических рекомендациях по темам «Треугольники» и «Окружность» представлен краткий теоретический материал по соответствующим вопросам рассматриваемой темы; разобраны решения олимпиадных задач школьных и муниципальных математических олимпиад для учащихся 9-11 классов; составлен перечень задач для самостоятельного решения. Представленные методические рекомендации полезны учащимся 9-11 для подготовки к олимпиадам по математике в дистанционном формате обучения.

Пояснительная записка

Методические рекомендации по теме по темам «Треугольники» и «Окружность» составлены с целью расширения и углубления знаний учащихся по рассматриваемым вопросам указанной темы, формирования познавательных УУД учащихся и реализацию их интеллектуальных и творческих способностей.

В Методических рекомендациях по по темам «Треугольники» и «Окружность» подобран и систематизирован теоретический материал таким образом, что бы учащиеся самостоятельно могли получать знания, выходящие за рамки школьного курса математики; решать олимпиадные задачи по данной тематике.

Для достижения поставленных целей решаются следующие задачи: развивать качества мышления, характерные для математической деятельности; сформировать у учащихся устойчивый интерес к математике; сформировать представление о математике как части общечеловеческой культуры.

В методических рекомендациях рассмотрены следующие вопросы:признаки равенства треугольников. Признаки подобия треугольников. Неравенство треугольника. Площадь треугольника. Многоугольники. Правильные многоугольники. Окружность. Касательная к окружности и ее свойства. Центральные и вписанные углы. Окружность, описанная около треугольника. Окружность, вписанная в треугольник.

Содержание

Введение

Актуальность работы. Выявление познавательных интересов и потребностей учащихся, развитие мыслительных способностей, активизации самостоятельной работы.
Цель работы: разработать методические рекомендации по темам «Треугольники» и «Окружность» для участников математических олимпиад (9-11 классы) и их использование в практической работе.

Теоретический материал

Признаки равенства треугольников

Треугольник − это геометрическая фигура, образованная соединением отрезками трех, не лежащих на одной прямой точек.
Эти точки называются **вершинами** треугольника. Отрезки, соединяющие эти точки, называются **сторонами** треугольника.

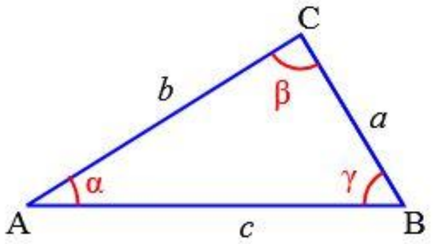


Рисунок 1 – треугольник

Виды треугольников по углам

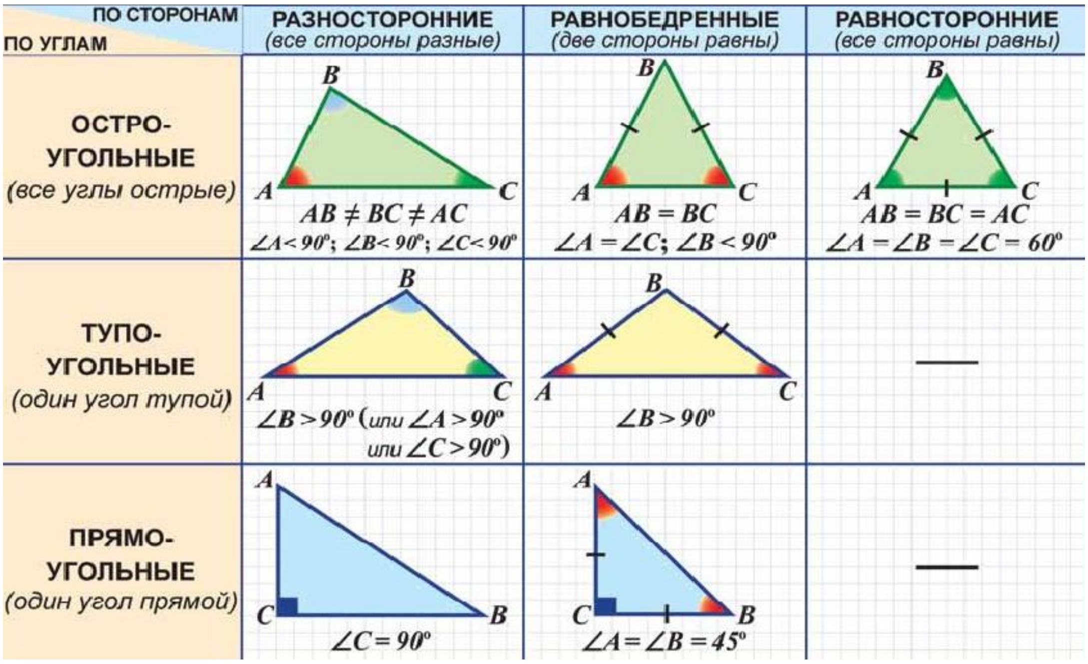


Рисунок 2 – виды треугольников по углам

Первый признак равенства треугольников

Теорема 1. Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то эти треугольники равны.

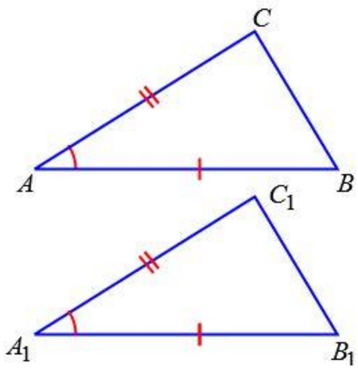


Рисунок 3

Доказательство. Рассмотрим треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ (Рисунок 3).
Пусть $AB=A_1B_1$, $AC=A_1C_1$ и $\angle A=\angle A_1$. Докажем, что $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.
Так как $\angle A=\angle A_1$, то треугольник ABC можно наложить на треугольник $A_1B_1C_1$ так, чтобы вершины A и A_1 совпадали, а стороны AB и AC наложились на лучи A_1B_1 и A_1C_1, соответственно. Так как по условию теоремы $AB=A_1B_1$, $AC=A_1C_1$, то сторона AB совместится со стороной A_1B_1, а сторона AC − со стороной A_1C_1.Тогда совместятся B и B_1, C и C_1.
Следовательно, сторона BC совместится со стороной B_1C_1. То есть треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ полностью совместятся. **Теорема доказана.**

Второй признак равенства треугольников

Теорема 2. Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то эти треугольники равны.

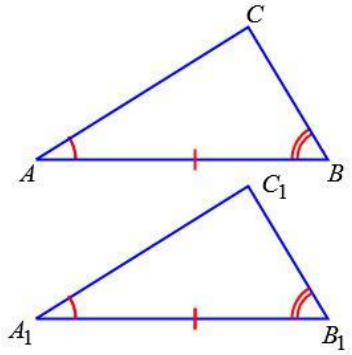


Рисунок 4

Доказательство. Рассмотрим треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ (Рисунок 4).
Пусть $AB=A_1B_1$, $\angle A=\angle A_1$, $\angle B=\angle B_1$. Докажем, что$\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.
Наложим треугольник ABC на треугольник $A_1B_1C_1$ так, чтобы вершина A совмещалась с вершиной A_1, сторона AB − со стороной A_1B_1 (по условию теоремы $AB=A_1B_1$), а вершины C и C_1 оказались по одну сторону от прямой A_1B_1.
Так как $\angle A=\angle A_1$ и $\angle B=\angle B_1$, то сторона AC наложится на луч A_1C_1 а сторона BC − на луч B_1C_1. Тогда вершина C окажется на луче A_1C_1 и на луче B_1C_1. Т.е. она окажется на пересечении этих лучей и, следовательно, вершина C совместится с общей точкой лучей A_1C_1 и B_1C_1, т.е. с вершиной C_1.

Таким образом, совместятся стороны AC и A_1C_1, BC и B_1C_1. То есть треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ полностью совместятся, поэтому они равны. **Теорема доказана.**

Третий признак равенства треугольников

Теорема 3. Если три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого треугольника, то эти треугольники равны.

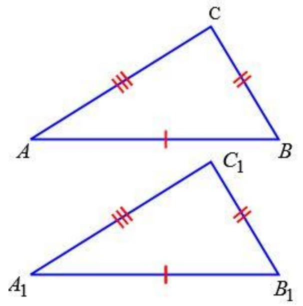


Рисунок 5

Доказательство. Рассмотрим треугольники ABC и $A_1B_1C_1$.
Пусть AB=A_1B_1, AC=A_1C_1 и BC=B_1C_1. Докажем, что$\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.
Приложим треугольник ABC к треугольнику $A_1B_1C_1$ так, чтобы вершина A совмещалась с вершиной A_1, вершина B совмещалась с вершиной B_1, а вершины C и C_1 находились по разные стороны от прямой A_1B_1.

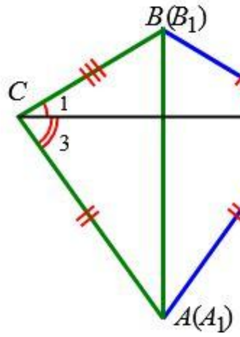


Рисунок 6

Возможны три варианта: луч CC_1 проходит внутри угла ACB(Рисунок6); луч CC_1 совпадает с одной из сторон угла ACB (Рисунок 7); луч CC_1 проходит вне угла ACB(Рисунок 8). Рассмотрим эти три случая по отдельности.
Вариант 1 (Рисунок 6). Так как по условию теоремы AC=A_1C_1 и BC=B_1C_1, то треугольники ACC_1 и BCC_1 равнобедренные. Тогда $\angle 1$=$\angle 2$ и $\angle 3$=$\angle 4$ и, следовательно:

$$\angle ACB = \angle 1 + \angle 3 = \angle 2 + \angle 4 = \angle AC_1B.$$

Имеем AC=A_1C_1, BC=B_1C_1 $\angle ACB$=$\angle A_1C_1B_1$ и по первому признаку равенства треугольников$\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$. **Теорема доказана.**

Вариант 2 (Рисунок 7). Так как по условию теоремы AC=A_1C_1 и BC=B_1C_1, то треугольник BCC_1 равнобедренный. Тогда $\angle 1$=$\angle 2$. Имеем: AC=A_1C_1, BC=B_1C_1, $\angle 1$=$\angle 2$ и по первому признаку равенства треугольников $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$. **Теорема доказана.**

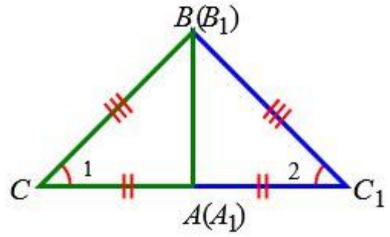


Рисунок 7

Вариант 3 (Рисунок 8). Так как по условию теоремы $AC=A_1C_1$ и $BC=B_1C_1$, то треугольники ACC_1 и BCC_1 равнобедренные. Тогда $\angle 1=\angle 2$ и $\angle C_1CA=\angle CC_1A$ и, следовательно:

$$\angle 3 = \angle C_1CA - \angle 1 = \angle CC_1A - \angle 2 = \angle 4 .$$

Имеем $AC=A_1C_1$, $BC=B_1C_1$, $\angle 3=\angle 4$ и по первому признаку равенства треугольников $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$. **Теорема доказана.**

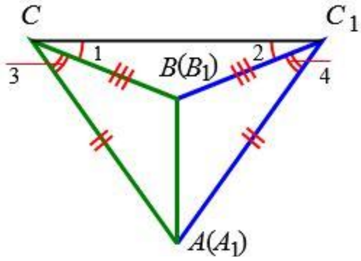
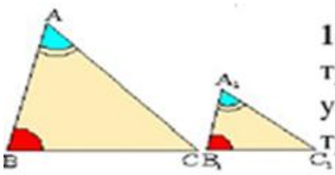
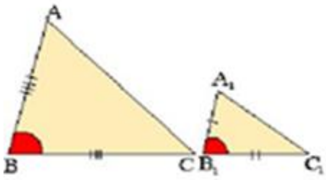


Рисунок 8

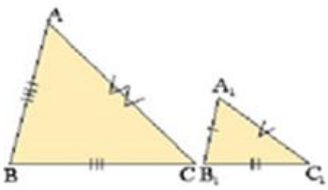
Признаки подобия треугольников



1-й признак: Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны.



2-й признак: если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника, а углы, образованные этими сторонами равны, то треугольники подобны



3-й признак: если три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого треугольника, то треугольники подобны

Площадь треугольника

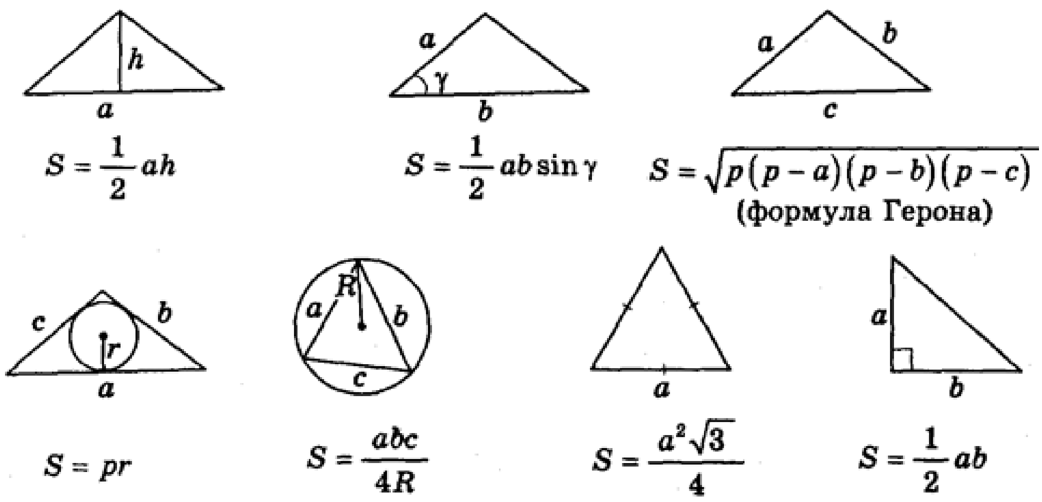


Рисунок 9

Многоугольники. Правильные многоугольники

Многоугольником называется геометрическая фигура, которая со всех сторон ограничена замкнутой ломаной линией. При этом количество звеньев ломаной не должно быть меньше трех. Каждая пара отрезков ломаной имеет общую точку и образует углы. Количество углов совместно с количеством отрезков ломаной являются основными характеристиками многоугольника. В каждом многоугольнике количество звеньев ограничивающей замкнутой ломаной совпадает с количеством углов.Сторонами в геометрии принято называть звенья ломаной линии, которая ограничивает геометрический объект. **Вершинами называют точки соприкосновения двух соседних сторон**, по количеству которых получают свои названия многоугольники.
Если замкнутая ломаная состоит из трех отрезков, она носит название треугольника; соответственно, из четырех отрезков — четырехугольником, из пяти — пятиугольником и пр.

Для обозначения треугольника или четырехугольника пользуются заглавными латинскими буквами, обозначающими его вершины. Буквы называют по порядку — по часовой стрелке или против нее.

Многоугольники. Правильные многоугольники

Правильным многоугольником называется выпуклый многоугольник, у которого все углы равны и все стороны равны.

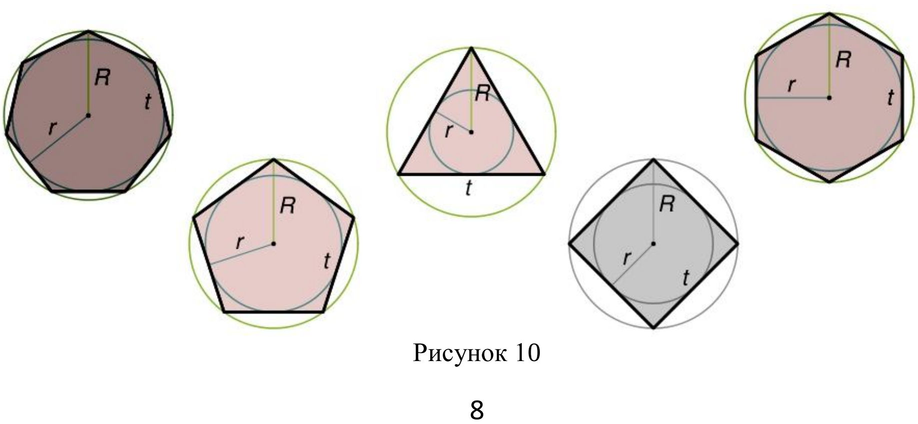
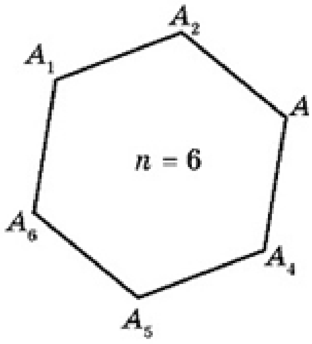


Рисунок 10

Выпуклый n-угольник называется **правильным**, если у него все стороны равны и все углы равны



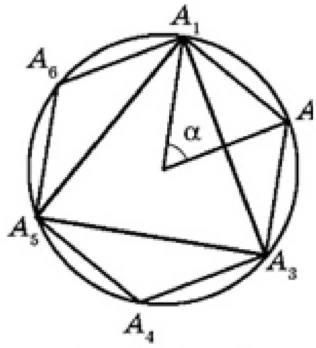
$$A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = \ldots = A_{n-1}A_n;$$
$$\angle A_1 = \angle A_2 = \angle A_3 = \ldots = \angle A_n.$$

Например, равносторонний треугольник, квадрат и т. д.

Сумма всех углов правильного n-угольника равна $(n - 2) \cdot 180°$, а каждый его угол равен:

$$\alpha_n = \frac{180° \cdot (n-2)}{n}.$$

Построение некоторых правильных многоугольников



$n = 6$ и $n = 3$

Для построения правильных многоугольников удобно использовать окружность, описанную около многоугольника.

Центральный угол вычисляем по формуле:

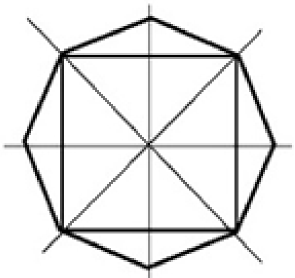
$$\boxed{\alpha_ц = \frac{360°}{n}}$$

Например, при $n = 6$, $\alpha = 60°$; при $n = 3$, $\alpha = 120°$.

Поэтому для построения правильного **шестиугольника** одну из вершин A_1 отмечаем произвольно, а из нее строим хорды A_1A_2, A_2A_3 и т. д., равные радиусу.

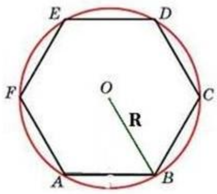
Если соединить эти вершины через одну, получим правильный **треугольник**.

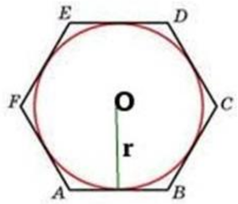
Для построения правильного вписанного **четырехугольника** (квадрата) проводим через центр два взаимно перпендикулярных диаметра. Если каждый из прямых углов при этом поделить пополам, то вместе с вершинами квадрата получим вершины правильного восьмиугольника.



$n = 4$ и $n = 8$

Правильный многоугольник и окружность

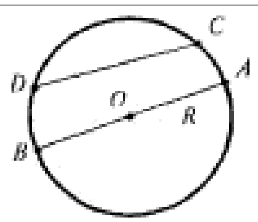
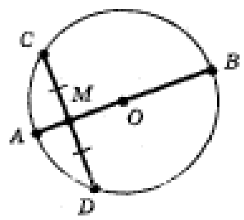
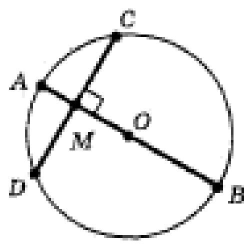


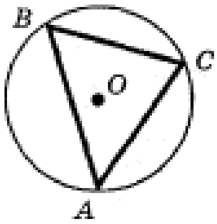
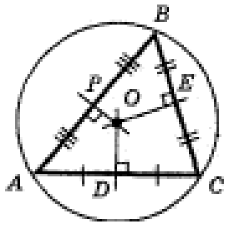
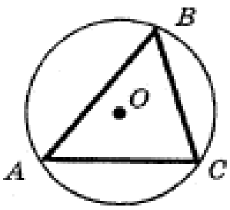
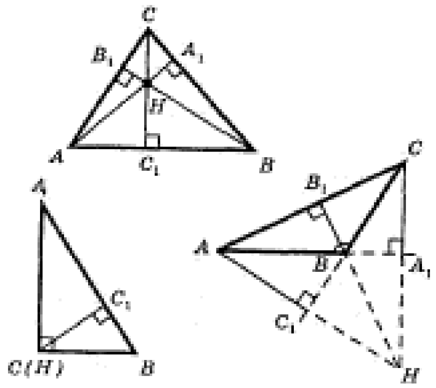
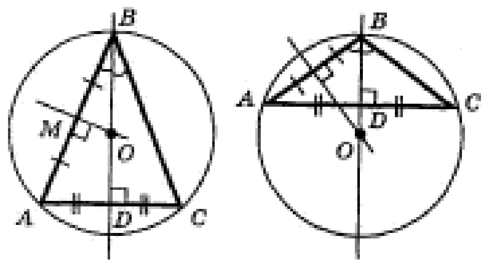


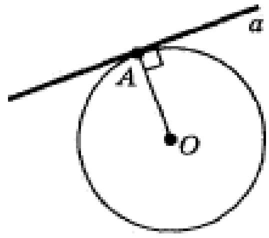
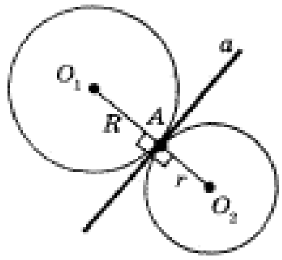
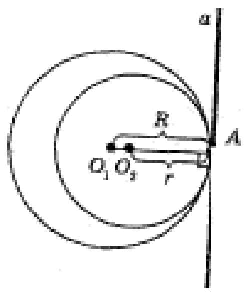
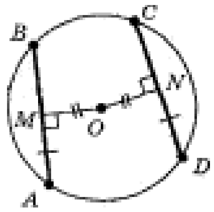
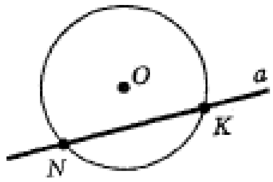
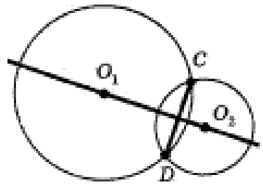
Окружность называется *описанной* около многоугольника, если она проходит через все его вершины. *Центр описанной* окружности лежит в точке пересечения серединных перпендикуляров, проведенных к сторонам многоугольника.

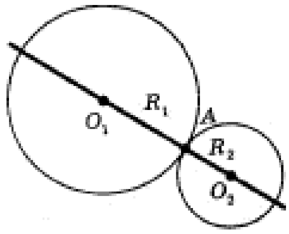
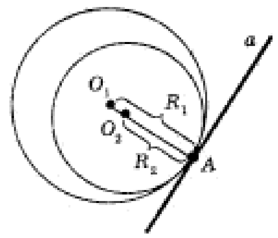
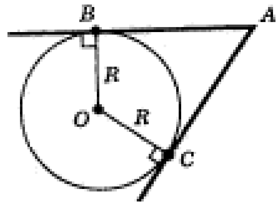
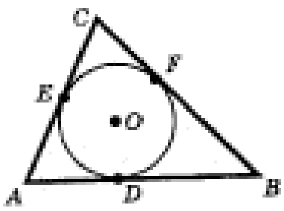
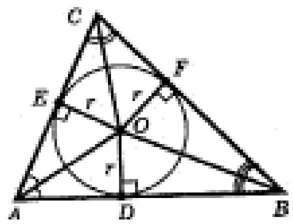
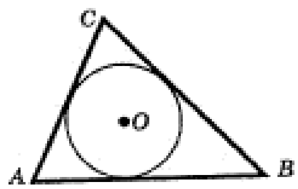
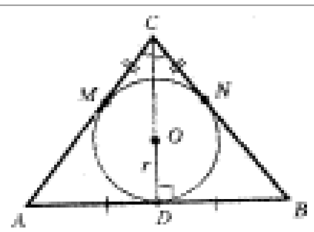
Окружность называется *вписанной* в многоугольник, если она касается всех сторон многоугольника. *Центр вписанной* окружности лежит в точке пересечения биссектрис углов многоугольника.

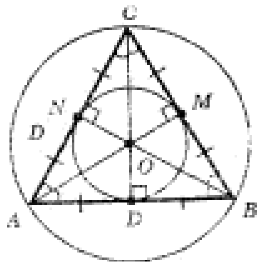
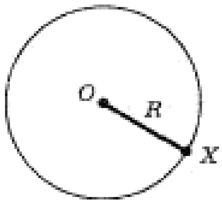
Окружность

Окружность, хорды и дуги	
Окружность — фигура, которая состоит из всех точек плоскости, равноудаленных от данной точки (центра). *O* – центр окружности *OA*– радиус *AB*– диаметр *CD*– хорда (отрезок, соединяющий две точки окружности) *Наибольшая хорда — диаметр.*	
Свойства	
Диаметр окружности, проходящий через середину хорды, перпендикулярен ей.	 AB ⊥ CD
Диаметр окружности, перпендикулярный хорде, делит эту хорду пополам.	 CM = MD

<table>
<tr><td colspan="2">Окружность, описанная около треугольника</td></tr>
<tr><td>Окружность называется описанной около треугольника, если она проходит через все его вершины.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Центр окружности, описанной около треугольника, является точкой пересечения перпендикуляров к сторонам этого треугольника, проведенных через середины этих сторон.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Около любого треугольника можно описать окружность, причем только одну.</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">Свойства высот треугольника</td></tr>
<tr><td>Прямые, содержащие в себе высоты треугольника, пересекаются в одной точке.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Центр окружности, описанной вокруг равнобедренного треугольника, принадлежит прямой, которая содержит медиану, высоту и биссектрису, проведенные из вершины к основанию.</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">Касательная к окружности</td></tr>
<tr><td>Прямая, проходящая через точку окружности перпендикулярно радиусу, проведенному в эту точку, называется касательной. Касательная к окружности не имеет с ней других общих точек, кроме точки касания.</td><td>Прямая а — касательная,
АО — радиус</td></tr>
</table>

	
Расстояние между центрами O_1 и O_2 двух касающихся окружностей в случае внешнего касания равно: $O_1O_2 = R + r$, где R и r — радиусы окружностей. В случае внутреннего касания: $O_1O_2 = R - r$ ($R>r$)	 $O_1O_2 = R + r$  $O_1O_2 = R - r$
В окружности равные хорды одинаково удалены от центра окружности, и наоборот, хорды, одинаково удаленные от центра окружности, равны.	 $OM = ON$
Окружность и прямая не могут пересекаться больше чем в двух точках.	
Общая хорда двух пересекающихся окружностей перпендикулярна прямой, проходящей через центры этих окружностей.	 $CD \perp O_1O_2$

Если две окружности имеют только одну общую точку, то она принадлежит прямой, проходящей через центры этих окружностей.	 $A \in O_1O_2$
Если две окружности имеют только одну общую точку, то они касаются друг друга в этой точке.	
Если из одной точки к окружности проведены две касательные, то отрезки касательных равны.	 $AB = AC$
Окружность, вписанная в треугольник	
Окружность называется **вписанной в треугольник**, если она касается всех его сторон.	
Центр окружности, вписанной в треугольник, является точкой пересечения биссектрис треугольника.	
В любой треугольник можно вписать окружность, причем только одну.	
Центр окружности, вписанной в равнобедренный треугольник, принадлежит медиане, высоте и биссектрисе, проведенным из вершины к основанию.	 $O \in CD$

Центры окружностей, описанной вокруг равностороннего треугольника и вписанной в него, совпадают. Это точка пересечения медиан, биссектрис и высот равностороннего треугольника.	
Геометрическое место точек	
Геометрическим местом точек (ГМТ) плоскости называется фигура, образованная из всех точек плоскости, которые обладают определенными свойствами: 1) если точка принадлежит фигуре, то она обладает данным свойством; 2) если точка обладает данным свойством, то она принадлежит фигуре.	
Геометрическим местом точек, равноудаленных от данной точки, является окружность с центром в этой точке и с радиусом, равным данному расстоянию.	

Примеры заданий с решениями

№ 1

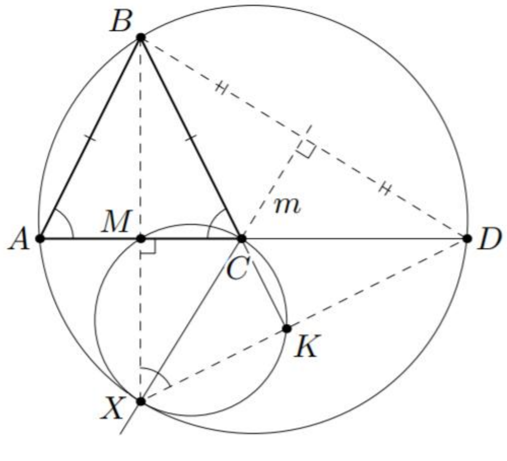
Точка M — середина основания AC равнобедренного треугольника ABC. На продолжении отрезков AC и BC за точку C отмечены точки D и K соответственно так, что $BC = CD$ и $CM = CK$. Докажите, что окружности, описанные около треугольников ABD и MCK, касаются.

Решение. Проведем биссектрису m угла BCD. По построению, B и D, а также M и K симметричны относительно m.

Из симметрии, BM и DK пересекаются в точке X, лежащей на m. Так как $XM \perp CM$, то $XK \perp CK$, значит, X лежит на окружности (CMK), причём CX — диаметр этой окружности.

Далее $\angle BXD = \angle MXK = 180^\circ - \angle MCK = \angle BCA = \angle BAC = \angle BAD$, поэтому X лежит на окружности (ABD).

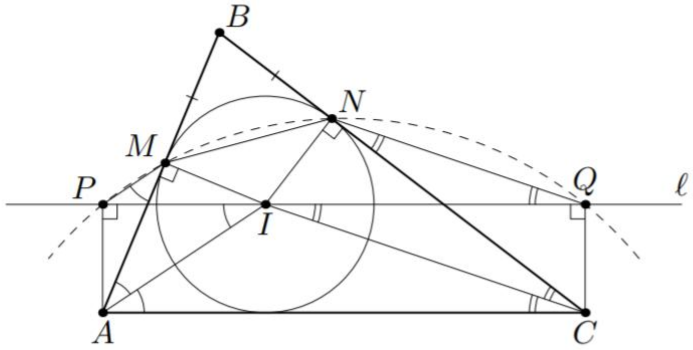
Так как m — серединный перпендикуляр к BD, то центр окружности (ABD) лежит на m. Но тогда X лежит на каждой из окружностей (CMK), (ABD) и на их линии центров, следовательно, эти окружности касаются друг друга в точке X.



№2

Пусть I — центр вписанной окружности остроугольного треугольника ABC, M и N — точки касания вписанной окружности сторон AB и BC соответственно. Через точку I проведена прямая ℓ, параллельная стороне AC, и на неё опущены перпендикуляры AP и CQ. Докажите, что точки M, N, P и Q лежат на одной окружности.

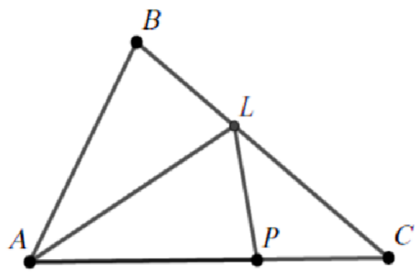
Решение. Пусть углы BAC и BCA треугольника ABC равны, соответственно 2α и 2γ. Углы API и AMI — прямые, поэтому точки A, P, M, I лежат на одной окружности с диаметром AI. Тогда $\angle AMP = \angle AIP =$ (в силу параллельности) $= \angle IAC = \alpha$. Аналогично $\angle QNC = \gamma$. Из равнобедренного треугольника MBN находим: $\angle BMN = \dfrac{180^\circ - \angle MBN}{2} = \alpha + \gamma$. Тогда $\angle PMN = \angle PMA + (180^\circ - \angle BMN) = 180^\circ - \gamma$. Но $\angle PQN = \angle ICN = \gamma$, значит, сумма углов PMN и PQN равна 180°, то есть точки M, N, P и Q лежат на одной окружности.



№3

В треугольнике ABC проведена биссектриса AL. На стороне AC взята точка P так, что LA – биссектриса угла BLP. Докажите, что если $BL= CP$, то угол ABC в два раза больше угла BCA.

Решение. Из условия следует, что треугольники APL и ABL равны по второму признаку. Тогда $PL = BL$. Но по условию $BL = CP$. Значит, $CP = PL$. Тогда $\angle PLC = \angle PCL$, и внешний угол APL треугольника CPL в два раза больше угла PCL. С другой стороны, $\angle ABC = \angle ABL = \angle APL$. Утверждение доказано.



Задачи для самостоятельного решения

№1

Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность Ω с центром O, при этом BD – диаметр окружности. Лучи AB и DCпересекаются в точке S. Окружность ω, проходящаячерез точки A, O, C, пересекает отрезок CD в точке M ($M \neq C$). Докажите, что M – середина отрезка DS.

№2

На деревянной стене отметили вершины треугольника ACE. Перпендикулярно стене вбили гвозди так, что наружу торчат части гвоздей длин: $AB=1$, $CD=2$, $EF=4$ (B, D, F – шляпки гвоздей). Могли ли расстояния между шляпками гвоздей оказаться равными $BD=\sqrt{2},\ DF=\sqrt{5},\ FB=\sqrt{13}$?

№ 3

Через концы основания BC трапеции $ABCD$ провели окружность, которая пересекла боковые стороны ABи CD трапеции в точках Mи N соответственно. Известно, что точка Tпересечения отрезков ANи DM так же лежит в этой окружности. Докажите, что $TB=TC$.

Заключение

Подготовлены методические рекомендации по темам «Треугольники» и «Окружность» для участников математических олимпиад (9-11 классы). Приведены решения типовых задач по указанной теме; задачи для самостоятельного решения.

Список используемых источников

1. Московские математические олимпиады 1993 – 2005 г. / Р. М. Федоров и др. Под ред. В. М. Тихомирова. – М.: МЦНМО, 2006. –456 с.
2. Агаханов Н. Х. Математика. Районные олимпиады. 6-11классы / Н. Х. Агаханов, О. К. Подлипский. – М. : Просвещение, 2010. – 192 с.
3. Математика в задачах. Сборник материалов выездных школ команды Москвы на Всероссийскую математическую олимпиаду / Под ред. А. А. Заславского, Д. А. Пермякова, А. Б. Скопенкова, М. Б. Скопенкова и А. В. Шаповалова. – М.: МЦНМО, 2009. – 488 с.