Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Армавирский государственный педагогический университет»
Институт прикладной информатики, математики и физики
Кафедра математики, физики и методики их преподавания

СПЕВАКОВА Н. Ю.
МОЗГОВАЯ М. А.

ЗАДАЧНИК – ПРАКТИКУМ

ПО ГЕОМЕТРИИ

ЧАСТЬ 1

А Р М А В И Р, 2017

Задачник – практикум предназначен для студентов 1 курса направления подготовки бакалавров «Педагогическое образование», образовательная «Математика», изучающих учебную дисциплину «Геометрия», разделы «Векторная алгебра», «Аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве». Содержит методические указания, краткий справочный материал по разделам, образцы решения задач и задачный материал. Задачник-практикум может также использоваться в преподавании курса «Аналитическая геометрия» для нематематических направлений подготовки бакалавров.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие

«Задачник – практикум по геометрии» часть 1 предназначен для направления подготовки бакалавров «Педагогическое образование» образовательная программа «Математика» в качестве учебно–методического пособия.

Содержание задачника соответствует первому семестру рабочей программы по геометрии. Пособие состоит из двух глав. Первая глава посвящена решению задач по векторной алгебре, что соответствует читаемым курсам «Геометрия» для студентов математических специальностей и «Аналитическая геометрия» для студентов – прикладников. Глава начинается с решения задач на применение сложения векторов, умножения вектора на число и скалярного произведения векторов к решению задач по геометрии, т. е. с разделов, которые изучались в школьном курсе геометрии. Это обеспечивает преемственность изучения геометрии и облегчает студентам переход от изучения школьного курса к вузовскому. Поэтому первая часть главы усваивается студентами довольно легко. После этого происходит переход к новому материалу – векторному и смешанному произведению векторов.

Во второй главе пособия решаются задачи по теме «Плоскости и прямые». И эта глава начинается с изучения тем, которые изучались в школьном курсе геометрии – координаты точек, прямая на плоскости.

В третьей и четвертой главах содержатся задачи по теме «Плоскости и прямые в пространстве».

В каждом параграфе сначала изложен теоретический материал для решения задач, даны образцы решения, а затем приведены задачи для самостоятельного решения, к которым даны методические указания.

Глава 1. Элементы векторной алгебры

1. Сложения векторов. Умножения вектора на число.

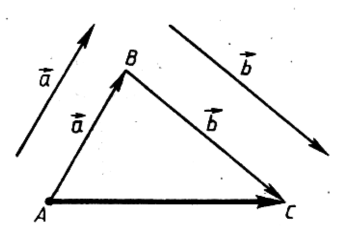
2.

1.1. Решение задач с помощью определения и основных свойств сложения векторов

Правило треугольника

Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — два вектора. Отметим произвольную точку А и отложим от этой точки вектор $\overrightarrow{AB}$, равный $\vec{a}$. Затем от точки В отложим вектор $\overrightarrow{BC}$, равный $\vec{b}$. Вектор $\overrightarrow{AC}$ называется суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

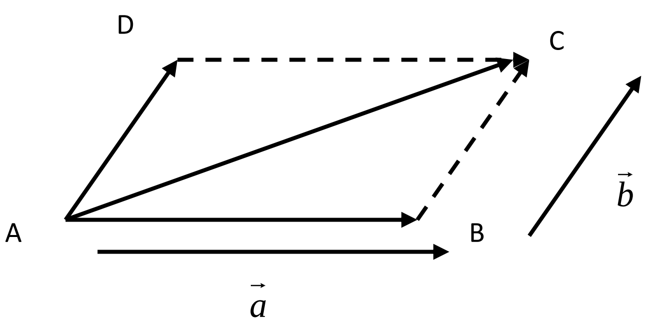
Это правило сложения векторов называется *правилом треугольника.*



Сумма векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается $\vec{a}+\vec{b}$.

Правило треугольника можно сформулировать также следующим образом: если А, В и С — произвольные точки, то $\vec{AB}+\vec{BC}=\vec{AC}$. Подчеркнем, что это равенство справедливо для произвольных точек А, В и С, в частности, в том случае, когда две из них или даже все три совпадают.

Правило параллелограмма



Если векторы не коллинеарны, то для построения их суммы можно пользоваться другим способом – правилом параллелограмма: чтобы сложить неколлинеарные векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, нужно отложить от какой-нибудь точки А векторы $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{AД} = \vec{b}$ и построить параллелограмм АВСД. Тогда $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$.

Свойства сложения векторов.

1. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (свойство коммуникативности).

2. $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$ (свойство ассоциативности).

3. $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$

4. $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$

Вычитание векторов

Разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется такой вектор, сумма которого с вектором $\vec{b}$ равна вектору $\vec{a}$.

Разность векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается $\vec{a} - \vec{b}$.

Рассмотрим задачу о построении разности двух векторов.

Для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ справедливо равенство $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$.

1.2. Произведение вектора на число

Произведением ненулевого вектора $\vec{a}$ на число k называется такой вектор $\vec{b}$, длина которого равна $|k|\,|\vec{a}|$, причем векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправлены при $k \geq 0$ и противоположно направлены при $k < 0$. Произведением нулевого вектора на любое число считается нулевой вектор.

Произведение вектора $\vec{a}$ на число k обозначается $k\vec{a}$.

Умножение вектора на число обладает следующими основными свойствами:

Для любых чисел k, l и любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ справедливы равенства:

1°. $(k\,l)\ \vec{a} = k\ (l\vec{a})$ (сочетательный закон).

2°, $(k+l)\ \vec{a} = k\vec{a} + l\vec{a}$ (первый распределительный закон).

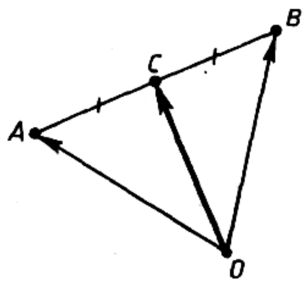
3°. $k\ (\vec{a} + \vec{b}\ ) = k\vec{a} + k\vec{b}$ (второй распределительный закон).

4°. $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$.

Задача 1. Точка С — середина отрезка АВ, а О — произвольная точка плоскости. Доказать, что $\vec{OC} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB})$.

Решение.

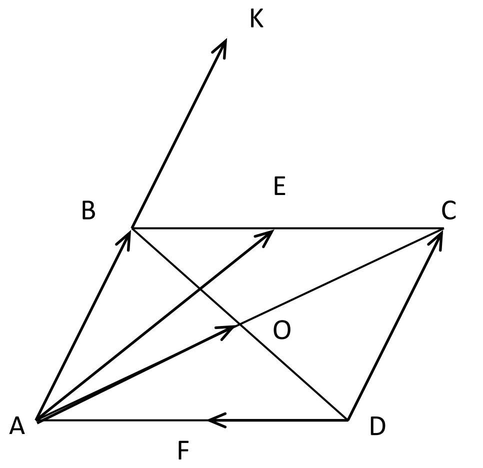
Первый способ. По правилу треугольника. $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC}$. Складывая эти равенства, получаем: $2\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{OB} + (\vec{AC} + \vec{BC})$. Так как точка С — середина отрезка АВ, то $\vec{AC} + \vec{BC} = \vec{0}$. Таким образом, $2\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{OB}$ или $\vec{OC} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB})$.



Второй способ. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$, следовательно, $\overrightarrow{AC}$ = ½ ($\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$). $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC}$ или $\vec{OC} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB})$

Третий способ. Достроить треугольник ОАВ до параллелограмма так, чтобы точка С являлась его центром и применить правило параллелограмма к векторам $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$.

Задача 2. O – точка пересечения диагоналей параллелограмма ABCD, E и F – середины параллельных сторон BC и AD. Построить векторы: $\overrightarrow{AB}$ + $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AE}$ + $\overrightarrow{DF}$, $\overrightarrow{AO}$ - $\overrightarrow{AB}$.



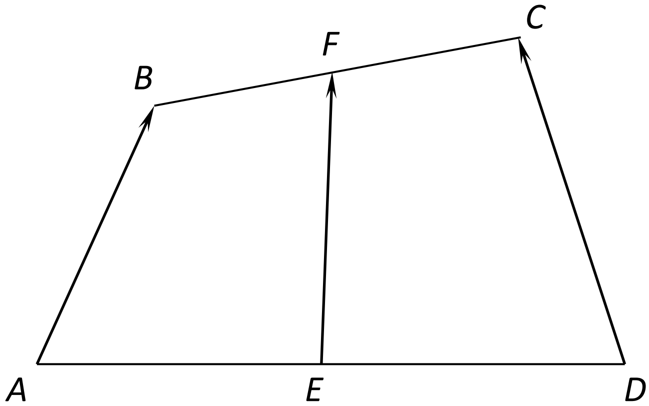
Решение.

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BK} = \overrightarrow{AK}$, $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EB} = \overrightarrow{AB}$. $\overrightarrow{AO} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BO}$ по правилу вычитания.

Задача 3. O – точка пересечения диагоналей параллелограмма ABCD, M, N, P, Q – середины сторон AB, BC, CD, DA. Построить векторы $\overrightarrow{OC}$ - $\overrightarrow{CP}$, $\overrightarrow{OQ}$ - $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{AN}$ + $\overrightarrow{MQ}$, $\overrightarrow{OA}$ - $\overrightarrow{NP}$.

Задача 4. Доказать, что если ABCD – пространственный четырехугольник, то $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC} = 2\,\overrightarrow{EF}$, где AB и DC противоположные стороны, а E и F – середины AD и BC.

Доказательство:



По правилу сложения векторов имеем:

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}=(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FB})+(\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FC})$$

$$= \overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FC}\ .$$

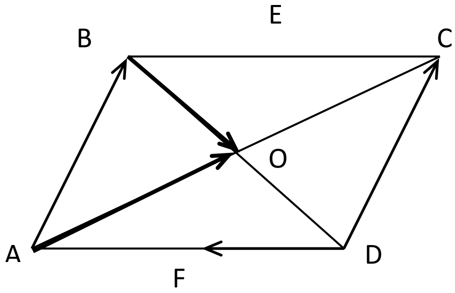
Так как, по условию F – середина BC, то $\overrightarrow{FB}=\overrightarrow{CF}$; E – середина AD, следовательно $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{ED}$

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AE}+2\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{FC},$$

значит $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}=2\,\overrightarrow{EF}$.

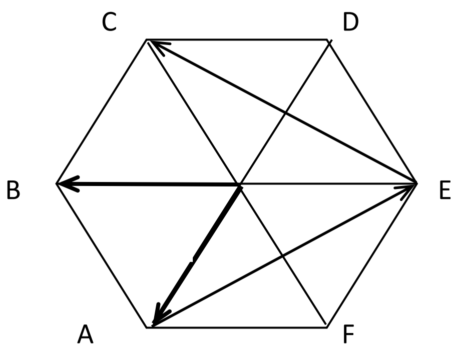
Задача 5. O – точка пересечения диагоналей параллелограмма ABCD. Выразить $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$ через $\vec{a} = \overrightarrow{AO}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{BO}$.

Решение.



$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AO} - \overrightarrow{BO} = \vec{a} - \vec{b}$. $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{AO} = \vec{a} + \vec{b}$. $\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$, $\overrightarrow{DA} = -\overrightarrow{BC} = -(\vec{a} + \vec{b})$.

Задача 6. O – точка пересечения диагоналей параллелограмма ABCD. Выразить $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{CD}$ через $\vec{a} = \overrightarrow{AO}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$.



Задача 7. ABCDEF – правильный шестиугольник, O – его центр. $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$. Выразить $\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{EC}, \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{CA}$ через $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Решение.

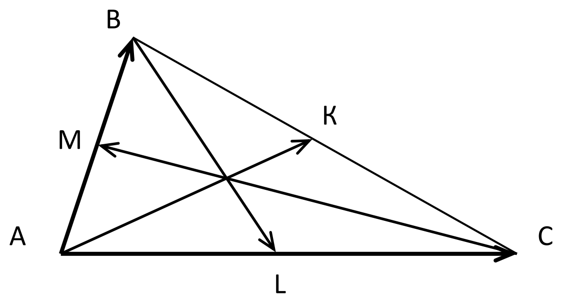
$\overrightarrow{OD} = -\overrightarrow{OA} = -\vec{a}, \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \vec{b} - \vec{a},$

$\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{OA} = -\vec{a}, \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BC} = 2\vec{b} - \vec{a},$

$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} = -2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BA} = -2\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{AB} = -2\vec{a} - (\vec{b} - \vec{a}) = -\vec{a} - \vec{b}.$

Задача 8. ABCDEF – правильный шестиугольник, O – его центр. $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} =$. Выразить векторы $\overrightarrow{FC}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{DF}, \overrightarrow{BE}$ через $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Задача 9. В треугольнике ABC: $\overrightarrow{AK}, \overrightarrow{BL}, \overrightarrow{CM}$ - направлены по медианам. Выразить их через $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$.



Решение.

$\overrightarrow{BC} = \vec{b} - \vec{a}$, $\overrightarrow{BK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a})$,

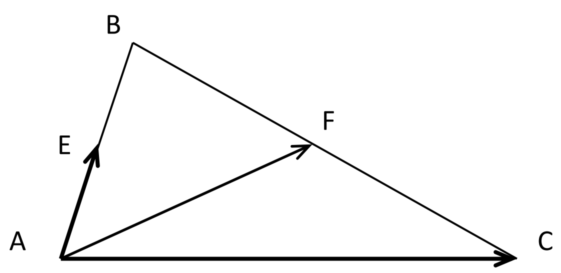
$\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BK} = \vec{a} + \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a}) = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$,

$\overrightarrow{BL} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AL} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = -\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$,

$\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = -\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a}$.

Задача 10. В треугольнике ABC: E и F – середины сторон AB и BC. Выразить векторы $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}$ через $\vec{a} = \overrightarrow{AE}, \vec{b} = \overrightarrow{AF}$.

Решение.



$\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AE} = 2\vec{a}$, $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AB} = \vec{b} - 2\vec{a}$,

$\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BF} = 2\vec{b} - 4\vec{a}$,

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = 2\vec{b} - 2\vec{a}.$

Задача 11. В треугольнике ABC: E и F – середины сторон AB и BC. Выразить векторы $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AF}, \overrightarrow{EF}, \overrightarrow{CE}$ через $\vec{a} = \overrightarrow{AE}, \vec{b} = \overrightarrow{AC}$.

Задача 12. AK, BL и CM – медианы треугольника ABC. Выразить векторы $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BL}, \overrightarrow{CM}$ через $\vec{a} = \overrightarrow{AK}, \vec{b} = \overrightarrow{AC}$.

1.3. Действия над векторами в координатах

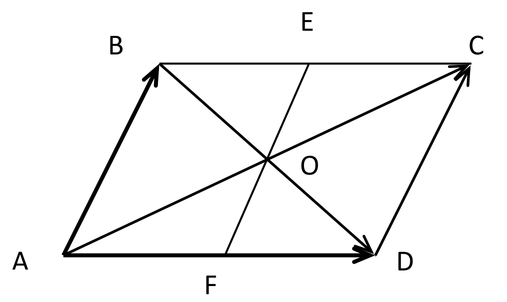
Базис в векторном пространстве на плоскости образуют любые два неколлинеарных вектора, а в пространстве – любые три некомпланарных вектора.

Координатами вектора $\vec{a}$ в базисе $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2, \vec{e}_3$ называются числа a_1, a_2, a_3 такие, что $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$ и записывается $\vec{a}$ (a_1, a_2, a_3).

Если $\vec{a}$ (a_1, a_2, a_3), $\vec{b}$ (b_1, b_2, b_3) то $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$ = ($\alpha a_1 + \beta b_1$; $\alpha a_2 + \beta b_2$; $\alpha a_3 + \beta b_3$).

Теорема. Векторы $\vec{a}$ (a_1, a_2, a_3), и $\vec{b}$ (b_1, b_2, b_3) коллинеарны тогда и только тогда, когда их координаты пропорциональны.

Задача 13. E и F – середины противоположных сторон BC и AD параллелограмма ABCD, а O – точка пересечения диагоналей. Взяв векторы $\overrightarrow{AB} = \vec{e}_1$ и $\overrightarrow{AD} = \vec{e}_2$ за базисные, определить координаты векторов $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{OD}, \overrightarrow{FC}, \overrightarrow{EO}$.



Решение.

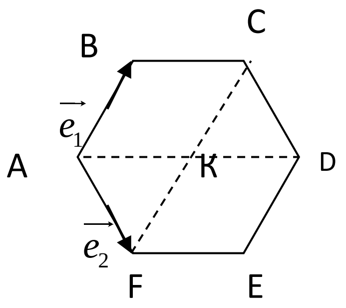
Чтобы найти координаты вектора, достаточно выразить его через базисные. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$. Следовательно, $\overrightarrow{AC}$ (1,1). $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} =$

$\vec{e}_2 - \frac{1}{2}(\vec{e}_1 + \vec{e}_2) = -\frac{1}{2}\vec{e}_1 + \frac{1}{2}\vec{e}_2$; $\overrightarrow{OD}(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$. $\overrightarrow{EC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\vec{e}_2 = 0\ \vec{e}_1 + \frac{1}{2}\vec{e}_2$; $\overrightarrow{EC}(0, \frac{1}{2})$. $\overrightarrow{EO} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = -\frac{1}{2}\vec{e}_1 + 0\vec{e}_2$; $\overrightarrow{EO}(-\frac{1}{2}, 0)$.

Задача 14. Решить предыдущую задачу в предположении, что за координатные векторы взяты $\vec{e}_1 = \overrightarrow{AF}, \vec{e}_2 = \overrightarrow{OD}$.

Задача 15. На плоскости дан правильный шестиугольник ABCDEF. Принимая точку A за начало координат и векторы $\overrightarrow{AB} = \vec{e}_1$ и $\overrightarrow{AF} = \vec{e}_2$ за координатные векторы, найти координаты всех вершин и центра К шестиугольника.

Решение.



Так как, начало координат совпадает с точкой А и векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AF}$ (радиусы векторы точек B и F относительно точки А) являются координатными векторами, то A(0;0), B(1;0), F(0;1). Для определения координат остальных вершин выразим их радиус-векторы через $\vec{e_1}$ и $\vec{e_2}$. Имеем: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FC} = \vec{e_2} + 2\vec{e_1}$, так как $\overrightarrow{FK} = \overrightarrow{KC} = \overrightarrow{AB} = \vec{e_1}$. Отсюда точка С имеет координаты (2; 1). Аналогично находим координаты других точек.

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = (2\vec{e_1} + \vec{e_2}) + \vec{e_2}$, поэтому D (2;2).

$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} = (2\vec{e_1} + 2\vec{e_2}) - \vec{e_1} = \vec{e_1} + 2\vec{e_2}$, то есть E (1;2).

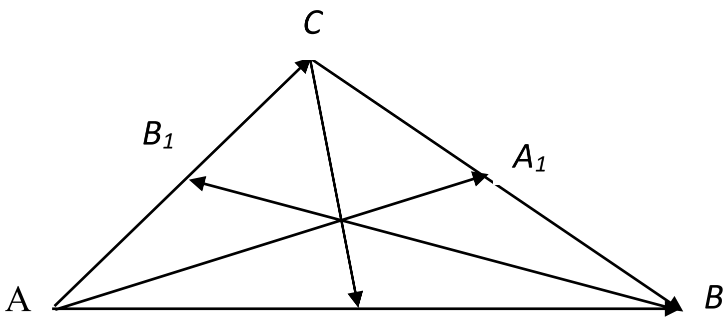
$\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(2\vec{e_1} + 2\vec{e_2}) = \vec{e_1} + \vec{e_2}$, то есть K (1;1).

Ответ: A(0;0), B(1;0), C(2;1), D(2;2), E(1;2), F(0;1), K(1;1).

Задача 16. В правильном шестиугольнике ABCDEF: $\overrightarrow{AB} = \vec{e_1}$, $\overrightarrow{AE} = \vec{e_2}$ - базисные. Найти координаты $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AF}, \overrightarrow{EF}$.

Задача 17. Если ABC – произвольный треугольник и AA$^!$, BB$^!$,CC$^!$- его медианы, то принимая векторы $\overrightarrow{AB} = \vec{e_1}, \overrightarrow{AC} = \vec{e_2}$ соответственно за базисные, найти координаты векторов $\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{BB'}, \overrightarrow{CC'}$.

Решение. По условию $\overrightarrow{AB} = \vec{e_1}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{e_2}$. Тогда $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \vec{e_1} - \vec{e_2}$.



Согласно определению суммы векторов

$$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA'} = \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{e_2} + \ldots$$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{e_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{e_2}$. Отсюда следует,

что $\overrightarrow{AA^!}$ = ($\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$). Далее так же

по определению суммы векторов $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB'} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{e_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{e_2}$.

Следовательно, $\overrightarrow{BB'} = (-1; \frac{1}{2})$. Аналогично можно показать, что $\overrightarrow{CC'} = (\frac{1}{2};-1)$.

Ответ: AA$^!$= ($\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$), $\overrightarrow{BB'}$ = (-1;$\frac{1}{2}$); $\overrightarrow{CC'} = (\frac{1}{2};-1)$.

Задача 18. Взяв на плоскости общую декартову систему координат $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$, построить векторы $\vec{a}(1,2), \vec{b}(2,-1), \vec{c}(0,-1), \vec{d}(-1,-2)$.

Решение.

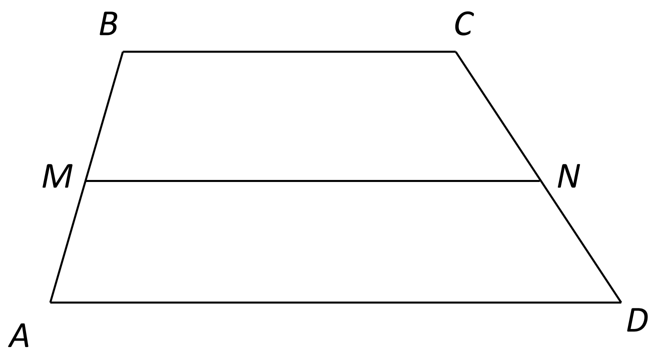
Так как координаты вектора – коэффициенты при базисных векторах, то $\vec{a} = \overrightarrow{e_1} + 2\overrightarrow{e_2}, \vec{b} = 2\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2}$, $\vec{c} = -\overrightarrow{e_2}, \vec{d} = -\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2}$. Строим векторы по правилу параллелограмма.

Задача 19. Взяв на плоскости ортонормированный репер $\vec{i}, \vec{j}$, построить векторы предыдущего примера.

1.4. Решение геометрических задач векторным методом

Задача 20. Докажите, что средняя линия трапеции параллельна ее основаниям.

Доказательство:



Пусть ABCD – трапеция, а MN – ее средняя линия. По правилу сложения векторов: $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CN}$.С другой стороны $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DN}$. Сложим два полученных равенства: $2\overrightarrow{MN}$ =($\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MA}$)+($\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}$)+($\overrightarrow{CN}+\overrightarrow{DN}$).

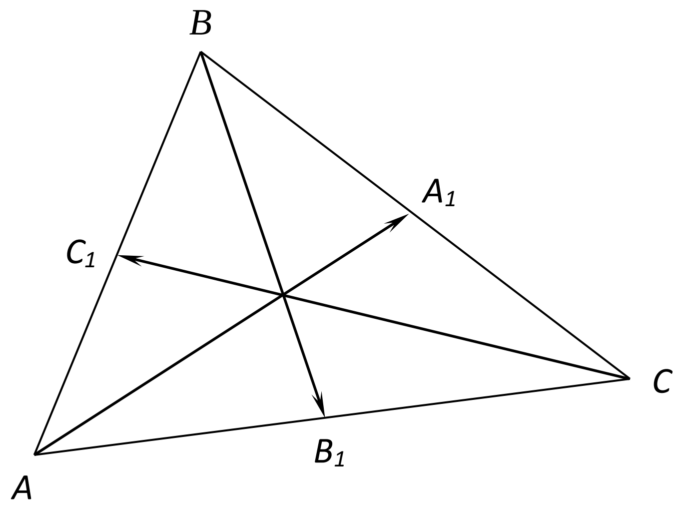
Так как, по условию MN – средняя линия трапеции, то $|\overrightarrow{AM}|=|\overrightarrow{MB}|$ и $|\overrightarrow{CN}|=|\overrightarrow{ND}|$, $\overrightarrow{AM} \uparrow\uparrow \overrightarrow{MB}$ и $\overrightarrow{DN} \uparrow\uparrow \overrightarrow{NC}$, следовательно $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{DN}=\overrightarrow{NC}$, тогда $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MA}$ =0, $\overrightarrow{CN}+\overrightarrow{DN}$ =0. В результате имеем: $2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}$ (:2), $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}$ ($\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}$). По определению трапеции AD || BC, следовательно $\overrightarrow{AD} \parallel \overrightarrow{BC}$, а значит, существует такое число t, что $\overrightarrow{AD}=t\overrightarrow{BC}$.

Подставляя в последнее равенство получаем $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BC}+t\overrightarrow{BC})=\frac{t+1}{2}\overrightarrow{BC}$, откуда следует, что $\overrightarrow{MN} \parallel \overrightarrow{BC} \parallel \overrightarrow{AD}$.

Задача 21. В произвольном треугольнике ABC векторы $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{CC_1}$ совпадают с медианами треугольника. Доказать, что из них можно составить треугольник.

Доказательство:

Так как, по условию векторы $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{CC_1}$ совпадают с медианами треугольника ABC, то по доказанному



$\overrightarrow{AA_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$, $\overrightarrow{BB_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC})$,

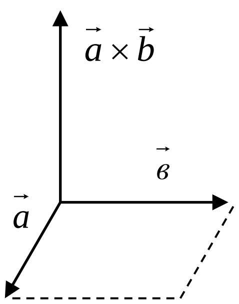
$\overrightarrow{CC_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA})$. По правилу многоугольника сложения векторов

$\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA}) = 0$, а это значит, что из векторов $\overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{BB_1}, \overrightarrow{CC_1}$ можно составить треугольник.

Глава 2. Векторное и смешанное произведение векторов

2. 1. Решение задач с помощью векторного произведения векторов

Определение. Векторным произведением неколлинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{в}$ называется вектор, обозначаемый $\vec{a} \times \vec{в}$ и удовлетворяющий следующим свойствам:



а) $\vec{a} \times \vec{в} \perp \vec{a}, \vec{в}$ (ортогонален каждому из векторов сомножителей);

б) $\vec{a}, \vec{в}, \vec{a} \times \vec{в}$ образуют правый базис

в) $|\vec{a} \times \vec{в}| = |\vec{a}|\,|\vec{в}|\sin(\vec{a}, \vec{в})$, т. е. равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{в}$;.

Свойства векторного произведения векторов

1. $\vec{a} \times \vec{в} = -\,\vec{в} \times \vec{a}$ (антикоммутативность).

2. $(\alpha\vec{a}) \times \vec{в} = \alpha(\vec{a} \times \vec{в})$ (ассоциативность).

3. $\vec{a}\times(\vec{в}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{в}+\vec{a}\times\vec{c}$ (дистрибутивность).

Пусть в ортонормированном базисе $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ заданы векторы $\vec{a}$=$a_1\vec{i}$+$a_2\vec{j}$ + a_3 $\vec{k}$, $\vec{в}$= $в_1\vec{i}$ + $в_2$ $\vec{j}$ + $в_3\vec{k}$.

$$\vec{a}\times\vec{в}=\vec{i}\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ в_2 & в_3\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}a_1 & a_3\\ в_1 & в_3\end{vmatrix}+\vec{к}\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ в_1 & в_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}.$$

Задача 22. Преобразовать выражения:

а) $(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}-\vec{b})$, б) $(\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c})\times(\vec{a}-2\vec{b})$.

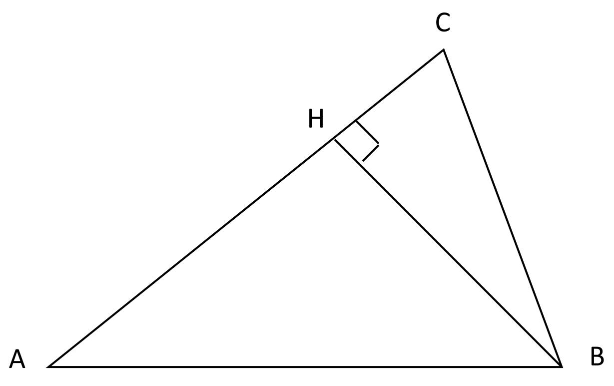
Решение.

$(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}-\vec{b})$ = $\vec{a}\times\vec{a}$ - $\vec{a}\times\vec{b}$ + $\vec{b}\times\vec{a}$ - $\vec{b}\times\vec{b}$ = $\vec{0}$ - $\vec{a}\times\vec{b}$ - $\vec{a}\times\vec{b}$ + $\vec{0}$ = -2 $\vec{a}\times\vec{b}$.

Задача 23. Преобразовать выражение $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}-\vec{a})$.

Задача 24. Дан треугольник АВС координатами своих вершин: А (-1;1;2), В (1;1;0), С (2;6;-2). Найти: а) площадь треугольника; б) длину высоты ВН.

Решение



а) $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$, следовательно $\overrightarrow{AB}$ =(2;0;-2), $\overrightarrow{BC}$ =(1;5;-2), $\overrightarrow{AC}$ =(3;5;-4). Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ численно равна $\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$.

$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i}\,\vec{j}\,\vec{k} \\ 20-2 \\ 35-4 \end{vmatrix} = (10,\ 2,\ 10)$. Отсюда следует, что $S_{ABC} = \frac{1}{2}$

$\sqrt{100+4+100} = \sqrt{51}$.

б) $S_{ABC} = BH\cdot AC, AC = \left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{3^2+5^2+(-4)^2} = \sqrt{50}$.

$$BH = \frac{2S_{ABC}}{AC}; BH = \frac{2\sqrt{51}}{\sqrt{50}} = \sqrt{\frac{204}{50}} = \sqrt{\frac{102}{25}} = \frac{\sqrt{102}}{5}.$$

Ответ: а) $S_{ABC} = \sqrt{51}$; б) $BH = \frac{\sqrt{102}}{5}$.

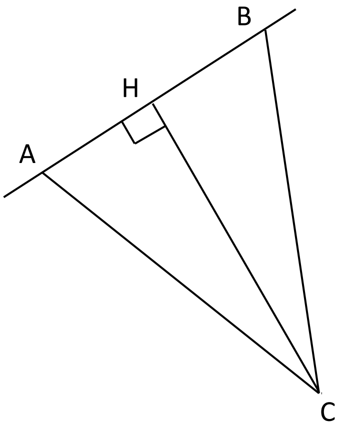
Задача 25. Дан треугольник ABC координатами своих вершин: A (2;1;0), B (-3;-6;4), C (-2;4;1). Найти: а) площадь треугольника; б) длину высоты BH.

Задача 26. Найти расстояние от точки C(3;2;-2) до прямой, проходящей через точки A(1;2;3) и B(5;2;0).

Решение

а) Кратчайшее расстояние от точки до прямой – перпендикуляр, опущенный из точки на прямую, поэтому CH ⊥ AB, для треугольника ABC отрезок CH является высотой.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{CH}\right|, \left|\overrightarrow{CH}\right| = \frac{2S_{ABC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}.$$



б) $S_{ABC} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|; \overrightarrow{AB} = (4;0;3); \overrightarrow{AC} = (2;0;1)$.

$$\left|\overrightarrow{CH}\right| = \frac{2S_{ABC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}, \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{4^2+0+3^2} = 5, \left|\overrightarrow{CH}\right| = \frac{2\cdot 1}{5} = 0,4.$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{0+4+0} = \frac{1}{2}\cdot 2 = 1.$$

Ответ: расстояние от точки C до прямой равно 0,4.

2.2. Решение задач с помощью смешанного произведения векторов

Пусть задана упорядоченная тройка векторов $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ (1).

Определение. Смешанным произведением тройки (1) называется число, обозначаемое ($\vec{a},\vec{b},\vec{c}$) и определяемое равенством: $(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = \vec{a}(\vec{b}\times\vec{c})$.

Теорема. Модуль смешанного произведения некомпланарных векторов равен объёму параллелепипеда, построенного на векторах сомножителей, отложенных от данной точки.

$V_{пар.} = |(\vec{a},\vec{b},\vec{c})|$, $V_{пир.} = \frac{1}{6}|(\vec{a},\vec{b},\vec{c})|$.

Смешанное произведение векторов через координаты векторов сомножителей в ортонормированном правом базисе имеет вид:

$$\text{(t)} \qquad \left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Свойства смешанного произведения векторов

1. При циклической перестановке смешанное произведение не меняется.

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = (\vec{c},\vec{a},\vec{b}) = (\vec{b},\vec{c},\vec{a}),$$

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = \vec{c}(\vec{a}\times\vec{b}) = \vec{b}(\vec{c}\times\vec{a}).$$

2. Смешанное произведение однородно по отношению к каждому сомножителю.

$$(\alpha\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = \alpha(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = (\vec{a},\alpha\vec{b},\vec{c}) = (\vec{a},\vec{b},\alpha\vec{c}).$$

3. При перестановке двух сомножителей знак смешанного произведения меняется на противоположный.

4. Смешанное произведение дистрибутивно по каждому сомножителю.

$$(\vec{a},\vec{b}'+\vec{b}'',\vec{c}) = (\vec{a},\vec{b}',\vec{c}) + (\vec{a},\vec{b}'',\vec{c}).$$

5. Критерий компланарности векторов на языке смешанного произведения:

$$((\vec{a},\vec{b},\vec{c}) - \text{компланарны}) \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow ((\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = 0).$$

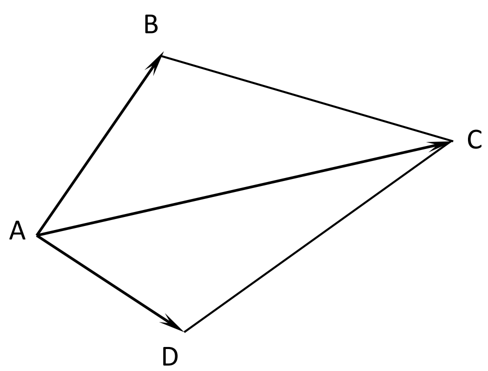
Объем параллелепипеда АВСД находится по формуле:

$V_{пар}=\left|(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})\right|$, где A ($a_1$, a_2, a_3), B (b_1, b_2, b_3), C (c_1, c_2, c_3), D (d_1, d_2, d_3) – вершины параллелепипеда (тетраэдра). $\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$, $\overrightarrow{AC} = (c_1 - a_1, c_2 - a_2, c_3 - a_3)$, $\overrightarrow{AD} = (d_1 - a_1, d_2 - a_2, d_3 - a_3)$, тогда

$$V_{пар} = \left|\begin{vmatrix} b_1 - a_1 & b_2 - a_2 & b_3 - a_3 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 & c_3 - a_3 \\ d_1 - a_1 & d_2 - a_2 & d_3 - a_3 \end{vmatrix}\right|,$$

$V_{тетраэдра} = \dfrac{1}{6} V_{пар}$, следовательно $V_{тет.} = \dfrac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} b_1 - a_1 & b_2 - a_2 & b_3 - a_3 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 & c_3 - a_3 \\ d_1 - a_1 & d_2 - a_2 & d_3 - a_3 \end{vmatrix}\right|$.

Задача 27. Доказать, что четырехугольник ABCD – плоский и найти его площадь, если A(2;-3;1), B(-1;1;1), C(-4;5;6) и D(2;-3;6).



Решение.

1) Для того, чтобы четырехугольник ABCD был плоским, необходимо чтобы векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, были компланарными, то есть ($\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$,

$\overrightarrow{AD}$)=0.

$\overrightarrow{AB}$ = (-3, 4, 0), $\overrightarrow{AC}$ = (-6, 8, 5),

$\overrightarrow{AD}$ = (0, 0, 5). Тогда ($\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$) = $\begin{vmatrix} -3 & 4 & 0 \\ -6 & 8 & 5 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$ = 0.

$$S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ADC},$$

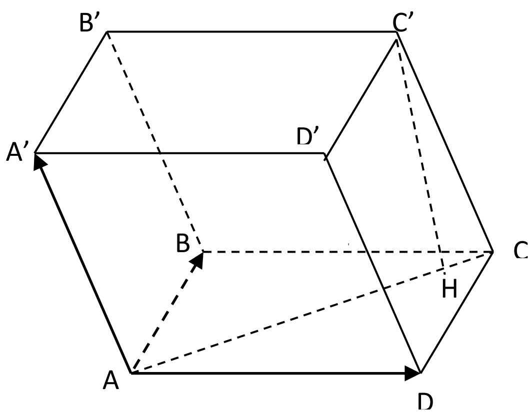
$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 8 & 5 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ -6 & 5 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -6 & 8 \end{vmatrix}^2} = \frac{1}{2}\sqrt{400 + 225 + 0} = \frac{1}{2}\sqrt{625} =$$

$$\frac{1}{2} \cdot 15 = \frac{15}{2} = 7,5;$$

$$S_{ADC} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} 8 & 5 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} -6 & 5 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} -6 & 8 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}^2} = \frac{1}{2}\sqrt{2500} = \frac{1}{2} \cdot 50 = 25.$$

$$S_{ABCD} = 7,5 + 25 = 32,5.$$

Ответ: площадь четырехугольника ABCD равна 32,5.



Задача 28. Дан параллелепипед ABCDA'B'C'D', построенный на векторах $\overrightarrow{AB}$ (4;3;0), $\overrightarrow{AD}$ (2;1;2) и $\overrightarrow{AA'}$ (-3;-2;5). Найти объём и высоту C'H параллелепипеда.

Решение.

V = $\left|\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right|$ =

$\left\|\begin{matrix} -3 & -2 & 5 \\ 4 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{matrix}\right\| = |(-3)\cdot 6 - (-2)\cdot 8 + 5\cdot(-2)| = |-12| = 12$ V = S_{ABCD} C'H, C'H =

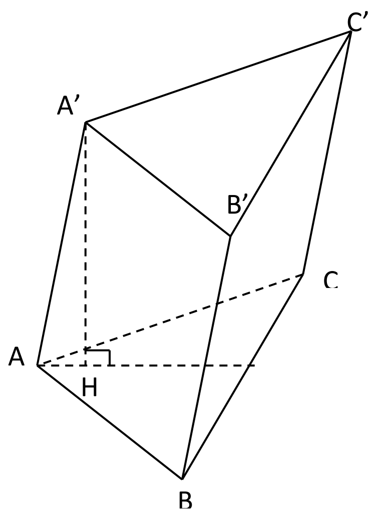
$$\frac{V}{S_{ABCD}};$$

$$S_{ABCD}=\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\right|=\begin{vmatrix}4 & 3 & 0\\ 2 & 1 & 2\end{vmatrix}=\sqrt{\begin{vmatrix}3 & 0\\ 1 & 2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}4 & 0\\ 2 & 2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}4 & 3\\ 2 & 1\end{vmatrix}^2}=\sqrt{104}=2\sqrt{26}$$

$$C'H=\frac{12}{2\sqrt{26}}=\frac{6}{\sqrt{26}}.$$

Ответ: $C'H=\dfrac{6}{\sqrt{26}}$.

Задача 29. В треугольной призме ABCA'B'C' $\overrightarrow{AB}=(0;\ 1;\ -1)$, $\overrightarrow{AC}=(2;-1;4)$, $\overrightarrow{AA'}=(-3;\ 2;2)$. Найти высоту A'H, опущенную на основание ABC.



Решение.

1). $V=\dfrac{1}{2}\left|(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AA'})\right|$;

$V=S_{ABC}A'H$, следовательно $A'H=\dfrac{V}{S_{ABC}}$.

V =

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix}0 & 1 & -1\\ 2 & -1 & 4\\ -3 & 2 & 2\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\left|(0\cdot(-10)-1\cdot16+(-1)\cdot1)\right|=\frac{1}{2}\cdot|-17|=\frac{17}{2}$$

.

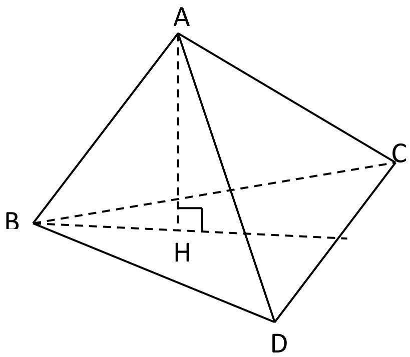
2). $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AB}\right|=\dfrac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix}2 & -1 & 4\\ 0 & 1 & -1\end{vmatrix}=\dfrac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix}-1 & 4\\ 1 & -1\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}2 & 4\\ 0 & -1\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}2 & -1\\ 0 & 1\end{vmatrix}^2}=$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{(-3)^2+(-2)^2+2^2}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{9+4+4}=\frac{\sqrt{17}}{2}.$$

3). $A'H=\dfrac{V}{S_{ABC}}$; $A'H=\dfrac{17}{2}:\dfrac{\sqrt{17}}{2}=\dfrac{17}{\sqrt{17}}=\sqrt{17}$.

Ответ: A'H= $\sqrt{17}$.

Задача 30. Найти длину высоты AH тетраэдра ABCD: A(2;-4;5), B(-1;-3;4), C(5;5;-1), D(2;-2;2).



Решение.

$V_{ABCD}=\frac{1}{6}\left|\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right|$, и

$V_{ABCD}=\frac{1}{3}S_{BCD}AH$, следовательно

$AH = \frac{3\cdot V_{ABCD}}{S_{BCD}}$.

По условию A(2;-4;5), B(-1;-3;4), C(5;5;-1), D(2;-2;2), а значит,

$\overrightarrow{AB}$ = (-3; 1; -1), $\overrightarrow{AC}$ =(3; 9;-6), $\overrightarrow{AD}$ =(0 ;2; -3).

$$V_{ABCD}=\frac{1}{6}\begin{vmatrix}-3 & 1 & -1\\ 3 & 9 & -6\\ 0 & 2 & -3\end{vmatrix}=\frac{1}{6}((-3)\cdot(-15)-1\cdot(-9)+(-1)\cdot 6)=\frac{1}{6}\cdot$$

(45 +9 - 6)= 8.

$S_{BCD}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BD}\right|$; $\overrightarrow{BC}$ =(6;8;-5), $\overrightarrow{BD}$ = (3; 1; -2).

$S_{BCD}=$

$$\frac{1}{2}\cdot\begin{Vmatrix}6 & 8 & -5\\ 3 & 1 & -2\end{Vmatrix}=\frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix}8 & -5\\ 1 & -2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}6 & -5\\ 3 & -2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}6 & 8\\ 3 & 1\end{vmatrix}^2}=\frac{1}{2}\sqrt{(-11)^2+3^2+(-18)^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{454}.$$

В конечном итоге получаем:

AH = $\dfrac{3\cdot V_{ABCD}}{S_{BCD}} = \dfrac{48}{\sqrt{454}}$.

Глава 3. Прямая линия на плоскости

3.1. Координаты точки в пространстве. Деление отрезка в данном отношении

Определение 1. *Координатами точки М в системе координат* (*О* $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$) называются числа *x*, *y*, *z* такие, что

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3. \qquad (1)$$

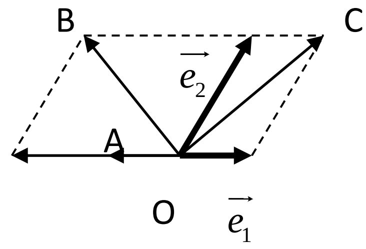
и записывают M(x, y, z).

Определение 2. Пусть A и B − две точки плоскости, а λ − некоторое действительное число. Говорят, что точка *М делит* (направленный) *отрезок* $\overrightarrow{AB}$ в данном отношении λ, если $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{MB}$ (2).

Пусть в *АСК* (*О* $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$) даны две точки $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2)$, и $(AB, M) = \lambda$. Тогда координаты точки $M(x, y, z)$ находятся по формулам

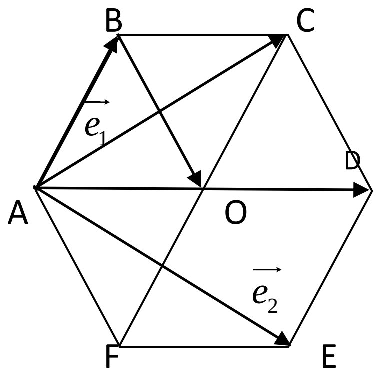
$$\begin{cases} x = \dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda} \\ y = \dfrac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda} \\ z = \dfrac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda} \end{cases}. (3)$$

Задача 31. В системе координат (О, $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$) на плоскости построить точки А(-1,0), В(-2, 1), С(1, 1), Д(-3, 2), Е(0, -2).



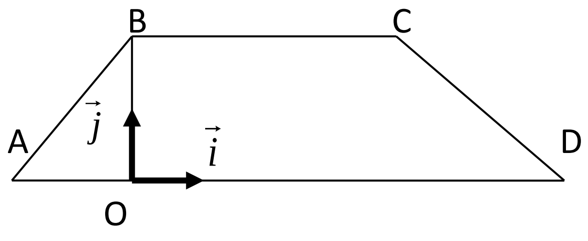
Решение. Точка А определяется вектором $\overrightarrow{OA} = -\vec{e}_1 + 0\vec{e}_2 = -\vec{e}_1$, точка В – вектором $\overrightarrow{OB} = -2\vec{e}_1 + \vec{e}_2$, точка С – вектором $\overrightarrow{OC} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$.

Задача 32. В правильном шестиугольнике АВСДЕF точка А – начало координат, векторы $\overrightarrow{AB} = \vec{e}_1$, $\overrightarrow{AE} = \vec{e}_2$. Найти координаты вершин и центра.



Решение. $\overrightarrow{AB} = \vec{e}_1 + 0\vec{e}_2 \Rightarrow$ B(1, 0), $\overrightarrow{AD} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 \Rightarrow$ D(1, 1), $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AO} = \vec{e}_1 + 0{,}5(\vec{e}_1 + \vec{e}_2) = 1{,}5\,\vec{e}_1 + 0{,}5\vec{e}_2 \Rightarrow$C(1,5; 0,5), $\overrightarrow{AE} = 0\vec{e}_1 + \vec{e}_2 \Rightarrow$E(0, 1), $\overrightarrow{AO} = 0{,}5\,\overrightarrow{AD} = 0{,}5\vec{e}_1 + 0{,}5\vec{e}_2 \Rightarrow$ O(0,5; 0,5), $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{AO} - \overrightarrow{AB} = 0{,}5\,\vec{e}_1 + 0{,}5\vec{e}_2 - \vec{e}_1 = -0{,}5\vec{e}_1 + 0{,}5\vec{e}_2 \Rightarrow$F(- 0,5; 0,5).

Задача 33. В равнобочной трапеции АВСД большее основание АД = 10, высота ВО = 2, угол при основании равен 30°. Задана ПСК = (О, $\vec{i}$, $\vec{j}$), где вектор $\vec{i}$ сонаправлен с вектором $\overrightarrow{OD}$, а $\vec{j}$ - с вектором $\overrightarrow{OB}$. Найти координаты вершин трапеции.



Задача 34. Найти координаты середин отрезков A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2, если $A_1(1, -5)$, $A_2(3, 3)$; $B_1(-2, 3)$, $B_2(2, 5)$; $C_1(0, -3)$, $C_2(-4, 5)$.

Решение. По формулам (3)находим координаты середины отрезка A_1A_2 x = (1 + 3) : 2 = 2, y = (-5 + 3) : 2 = -1.

Задача 35. Найти координаты точки М, симметричной точке А(-1, 5) относительно точки В(3, 2) и координаты точки С, симметричной точке В относительно точки А.

Решение. Первый способ. Точка М делит отрезок АВ в отношении l = -2. По формуле (3): x = (-1 -3×2) : (1 -2) = 7, y = (5 -4) : (1 -2) = -1, М (7, -1). Второй способ. Точка В – середина отрезка АМ, поэтому она делит его в отношении l = 1. По формуле (3): 3 = (-1 + x)/2, 2 = (5 + y)/2.

Задача 36. Даны вершины А(-4, 4) и В(2, 8) параллелограмма АВСД и точка пересечения диагоналей М(2, 2). Найти координаты вершин С и Д.

3.2. Различные способы задания прямой линии на плоскости

Уравнение прямой, заданной точкой и направляющим вектором

Пусть на плоскости в системе координат известны координаты некоторой точки M_0 (x_0, y_0) прямой d и направляющего вектора $\vec{a}$ (a_1, a_2) этой прямой.

Параметрические уравнения прямой

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 + ta_1 \\ y = y_0 + ta_2 \end{cases} \quad (1)$$

Каноническое уравнение прямой

Исключим t из уравнения (1). Получим

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} \quad (= t) \quad (2)$$

Уравнение прямой, заданной двумя точками

Пусть прямая d задана двумя точками M_1 (x_1, y_1) и M_2 (x_2, y_2). Тогда в качестве направляющего вектора можно выбрать вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$ = (x_2 –x_1, y_2 – y_1). Подставим в (2), получим:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \quad (3)$$

Это каноническое уравнение прямой, заданной двумя точками.

Уравнение прямой с угловым коэффициентом

Пусть в ПСК задана прямая d, *пересекающая ось ординат* в точке (0, b). Пусть $\vec{a}$ (a_1, a_2) − направляющий вектор прямой d. Число $k = \frac{a_2}{a_1}$ = tgj, где j - угол, образованный прямой с положительным направлением оси Ox, называется *угловым коэффициентом прямой* d.

$$y = \kappa x + b \qquad (4)$$

Общее уравнение прямой

$$Ax + By + C = 0 \quad (|A| + |B| \neq 0) \qquad (5)$$

где $\vec{a}$ $(-B, A)$− направляющий вектор прямой, $\vec{n}$ (A, B) – вектор нормали.

Задача 37. Определить, какие из точек А(1, -1), В(2, 3), С(-1, 1), Д(-2, 2) принадлежат прямой 2x -3y +5 = 0.

Задача 38. Написать уравнение прямой d заданной двумя точками M_1(2; 4) и M_2(-3; 0).

Подставим координаты точек M_1 и M_2 в формулы (3) получим:

$$\frac{x - 2}{-3 - 2} = \frac{y - 4}{0 - 4}.$$

Упростив, получим уравнение: $y = 0{,}8x + 2{,}4$.

Задача 39. Написать уравнение прямой:

a) проходящей через точки A(2, -1) и B(-1, 3),

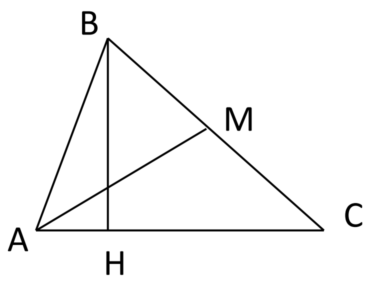
b) проходящей через точку A(1, -2) параллельно вектору $\vec{a}$(-1, 2),

c) проходящей через точку A(2, -3) параллельно прямой 2x -3y +7 = 0.

Решение с). Воспользуемся формулой (5) и найдём направляющий вектор $\vec{a}$(3, 2) данной прямой. Т. к. искомая прямая параллельна данной, то вектор $\vec{a}$ является направляющим вектором и для неё. Подставим в уравнение (2), получим (x-2)/3 = (y+3)/2 или 2x -3y -13 = 0.

Задача 40. В треугольнике ABC: A(1, -2), B(2, 3), C(0, 1). Найти уравнения высоты BH и медианы AM.

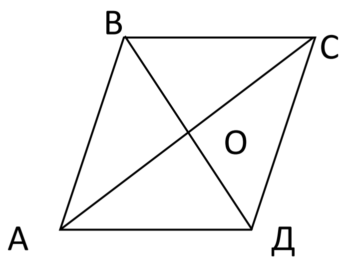
Решение. Вектор $\overrightarrow{AC}$ = (-1, 3) перпендикулярен BH, поэтому вектор $\vec{a}$ = (3, 1) параллелен BH ($\vec{a}$ ^ $\overrightarrow{AC}$). Воспользуемся формулой (2) для точки B и вектора $\vec{a}$, получим



(x -2) : 3 = (y -3) : 1 или x -3y +7 = 0.

Задача 41. Дана вершина A(1, -1) и высота BH : 2x –y + 3 = 0 треугольника ABC. Найти уравнение стороны AC.

Задача 42. В параллелограмме АВСД даны вершины A(1, -1), B(2, 3) и точка O(3, 2) пересечения диагоналей. Найти уравнения сторон BC и ДС.



Решение. Т. к. точка O – середина отрезка AC, то (1 + x) : 2 = 3 и (-1 + y) : 2 = 2, где (x, y) – координаты точки C. Получаем x = 5, y = 5, т. е.

C(5, 5). Подставив в уравнение (3) координаты точек B и C, получим (x -2)/3 = (y -3)/2 или (ВС) : 2x -3y +5 = 0. Вектор $\overrightarrow{AB}$ = (1, 4) является направляющим для прямой СД. Подставив в уравнение (2) координаты точки C и вектора $\overrightarrow{AB}$, получим (x -5) : 1 = (y -5) : 4 или (СД) : 4x –y -15 = 0.

Задача 43. В параллелограмме АВСД даны вершины A(2, -1), B(1, -2) и C(3, 4). Найти уравнение высоты BH.

Задача 44. Найти проекцию точки M(5, -2) на прямую 2x – 3y -3 = 0.

Указание. Найти уравнение прямой МК, перпендикулярной данной пря мой и найти их точку пересечения.

Глава 4. Плоскость и прямая линия в пространстве

4.1. Различные способы задания плоскости в пространстве

Уравнение плоскости, заданной точкой и парой векторов

Рассмотрим плоскость π, заданную точкой $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и векторами $\vec{p}\,(\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3) \parallel \pi$, $\vec{q}\,(\vec{q}_1, \vec{q}_2, \vec{q}_3) \parallel \pi$, $\vec{p} \nparallel \vec{q}$.

$$\begin{vmatrix} x - x_0, & y - y_0, & z - z_0 \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_2 \end{vmatrix} = 0 \qquad (1) \qquad \begin{cases} x = x_0 + up_1 + vq_1 \\ y = y_0 + up_2 + vq_2 \\ z = z_0 + up_3 + vq_3 \end{cases} \qquad (2)$$

Равенства (2) называются *параметрическими уравнениями* плоскости π, а числа u и v – *параметрами*.

Уравнение плоскости, заданной тремя точками, не лежащими на одной прямой точки: $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$.

$$M_0 = M_1,\ \vec{p} = \overrightarrow{M_1M_2},\ \vec{q} = \overrightarrow{M_1M_3}.$$

Подставив в (1) получим

$$\begin{vmatrix} x-x_0, & y-y_0, & z-z_0 \\ x_2-x_1, & y_2-y_1, & z_2-z_1 \\ x_3-x_1, & y_3-y_1, & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (3)$$

Уравнение плоскости, заданной точкой и нормальным вектором Пусть в *ДПрСК* $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ плоскость π задана, точкой $M_0(x_0,y_0,z_0)\in\pi$ и вектором нормали $\vec{N}\left(A,B,C\right)\perp\pi$. Тогда её уравнение имеет вид

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0. \quad (4)$$

Общее уравнение плоскости

$Ax+By+Cz+D=0$ (5), где $D=-Ax_0-By_0-Cz_0$ и $\vec{N}\left(A,B,C\right)\perp\pi$.

Задача 45. Составить уравнение плоскости:

a) проходящей через точку A(2, 0, 3) и параллельной векторам $\vec{p}$(1, 0, 1) и $\vec{q}$(2, 1, 3);
b) проходящей через точки A(1, 2, 3), B(2, -1, 3) и параллельной вектору $\vec{p}$(1, 2, -3);
c) проходящей через точки A(1, -3, 2), B(-2, 1, -3) и C(0, 1, -1);
d) проходящей через точку A(-2, 2, 1) и ось Oy;
e) проходящей через точки A(1, 2, -1), B(2, 1, -1) параллельно оси Ox;
f) проходящей через точку A(1,-2,1) перпендикулярно вектору $\vec{N}$ (2,-1, 3).

Решение. а) подставить в формулу(1); b) найти вектор $\vec{q}$ = $\overrightarrow{AB}$ = (1, -3, 0) и подставить в формулу(1); c) найти векторы $\vec{p}$ = $\overrightarrow{AC}$ = (-1, 4, -3) и $\vec{q}$ = $\overrightarrow{AB}$ = (-3, 4, -5) и подставить в формулу(1) или подставить координаты точек в формулу (3); d) вектор $\vec{p}$ = $\overrightarrow{OA}$ = (-2, 2, 1), $\vec{q}$ = $\vec{j}$ = (0, 1, 0) и подставить в формулу(1); e) вектор $\vec{p}$ = $\overrightarrow{AB}$ = (1, -1, 0), $\vec{q}$ = $\vec{i}$ = (1, 0, 0) и подставить в формулу (1); f) подставить в формулу (4).

Задача 46. Составить уравнение плоскости:

a) проходящей через точку A(-1, 2, 3) перпендикулярно плоскостям 2x –y + z – 3 = 0 и x +2y +4 = 0;

b) проходящей через точки A(2, -1, 3) и B(1, 0, -1)перпендикулярно плоскости x –y +3z -2 = 0;

c) проходящей через точку A(-1, 0, 1) параллельно плоскости 2x –y + 3z – 3 = 0;

Решение. а) так как искомая плоскость перпендикулярна данным плоскостям, то их векторы нормали $\overrightarrow{N_1}$ = (2, -1, 1) и $\overrightarrow{N_2}$ = (1, 2, 0) (формула 5) параллельны искомой плоскости, подставив в формулу (1), получим искомое уравнение; b) $\vec{p}$ = $\overrightarrow{AB}$ = (-1, 1, -4), $\vec{q}$ = $\vec{N}$ = (1, -1, 3), подставим в формулу (1); c) вектор нормали $\vec{N}$ =(2, -1, 3) (формула 5) данной плоскости является вектором нормали искомой, подставим в формулу (4).

Задача 47. Вычислить расстояние между параллельными плоскостями x -2y + 2z – 6 = 0, x -2y + 2z + 18 = 0.

Решение. Выберем на первой плоскости точку M: x_0 = 0, y_0 = 0, z_0 = 3. Расстояние от точки M до второй плоскости

r = ê$Ax_0 + By_0 + Cz_0$ + Дú / $\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$ = 24 : 3 = 8.

4.2. Прямая линия в пространстве

Уравнение прямой, заданной точкой и направляющим вектором

Пусть на плоскости выбрана система координат и в этой системе известны координаты некоторой точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$, принадлежащей прямой d и направляющий вектор $\vec{p}$ (p_1, p_2, p_3) этой прямой.

$$\begin{cases} x = x_0 + t\,p_1 \\ y = y_0 + t\,p_2 \\ z = z_0 + t\,p_2 \end{cases} \quad - \text{ параметрические уравнения прямой } (t\text{ - }\textit{параметр}) \qquad (1)$$

Исключим t из (1), получаем:

$$\frac{x - x_0}{p_1} = \frac{y - y_0}{p_2} = \frac{z - z_0}{p_3} \qquad (2)$$

Это *канонические уравнения прямой d.*

Уравнение прямой, заданной двумя точками

Пусть прямая d задана двумя точками $A\,(x_1, y_1, z_1)$ и $B\,(x_2, y_2, z_2)$. Тогда в качестве направляющего вектора можно выбрать вектор $\vec{p} = \overrightarrow{AB} =$ $(x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1)$, M_0=A, подставляя в (2), получим:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \qquad (3)$$

Это *канонические уравнения* прямой, заданной двумя точками.

Общее уравнение прямой, заданной в виде пересечения двух плоскостей

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \quad (\pi_1) \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \quad (\pi_2) \end{cases} - \text{ общее уравнение прямой} \qquad (4)$$

Найдем каноническое уравнение прямой. Вектор $\vec{p} = \vec{N}_1 \,'\, \vec{N}_2$ = (p_1, p_2, p_3) - направляющий вектор прямой, где $\vec{N}_1\left(A_1, B_1, C_1\right)$ ^ p_1 , $\vec{N}_2\left(A_2, B_2, C_2\right)$ ^ p_2.

Подставив в (2), получим каноническое уравнение прямой

Задача 48. Определить координаты нескольких точек, лежащих на прямых:

а) $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z-4}{-1}$; б) x = 3 + 2t; y = 3t; z = 5; в) $\begin{cases} x - 3 = 0 \\ x + y + z - 5 = 0 \end{cases}$.

Решение. а) Выберем произвольно число x, например, x = 2 и найдём y и z так, чтобы сохранялись равенства в уравнениях прямой. Получаем y = 3, z = 3. Точка M(2, 3, 3) лежит на прямой. б) Выберем произвольно число t, например, t = 1. Тогда x = 5, y = 3, z = 5. Точка M(5, 3, 5) лежит на прямой. в) Из первого уравнения x = 3, зададим произвольно y, например, y = 0, тогда z = 2. Точка M(3, 0, 2) лежит на прямой.

Задача 49. Составить уравнения прямой:

1. проходящей через точки A(2, -1, 3), B(1, 2, -1);
2. проходящей через точку A(1, -2, 1) параллельно вектору $\vec{p}$ = (-2, 1, 3).

Указание. Воспользоваться формулами (3) и (2).

Задача 50. Написать канонические уравнения прямой:

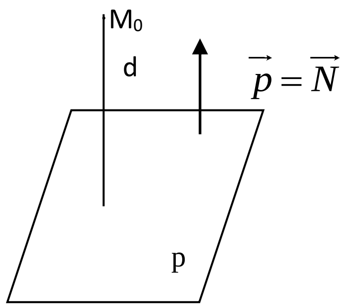
а) $\begin{cases} 2x - y + z - 3 = 0 \\ x + 3y - z - 1 = 0 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3y + 5z = 0 \\ x - 2y + z - 1 = 0 \end{cases}$

Решение. а) $\vec{N}_1$ = (2, -1, 1), $\vec{N}_2$ = (1, 3, -1). Направляющий вектор $\vec{p}$ = $\vec{N}_1 \times \vec{N}_2$ = $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}$ = (-2, 3, 7). Чтобы найти точку прямой, положим x = 0 и подставим в систему а). Получим y = 2, z = 5, т. е. точка M_0 (0, 2, 5) лежит на прямой. Подставим в формулу (2), получим $\dfrac{x}{-2} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z-5}{7}$.

4.3. Взаимное положение прямых и плоскостей в пространстве

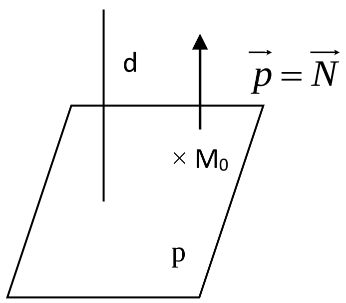
Задача 51. Написать уравнение прямой, проходящей через точку

M_0(2, -1, 3) перпендикулярно плоскости x -2y +3z -7 = 0.



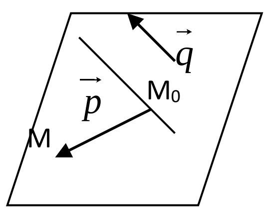
Решение. Вектор нормали плоскости $\vec{N}$ = (1, -2, 3) параллелен искомой прямой. Поэтому в качестве направляющего вектора прямой можно взять вектор $\vec{p}$ = $\vec{N}$. Подставим в уравнение (2) прямой координаты точки M_0 и вектора $\vec{p}$, получим $\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-3}{3}$.

Задача 52. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку M_0(1, 3, -1) перпендикулярно прямой $\frac{x+2}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{2}$.



Решение. Направляющий вектор прямой $\vec{p}$ = (-1, 2, 2) перпендикулярен плоскости, поэтому вектор нормали плоскости $\vec{N}$ = $\vec{p}$. Подставив в уравнение (5) плоскости координаты точки M_0 и вектора $\vec{N}$, получим –x + 2y +2z -3 = 0.

Задача 53. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку M(2, -1, 1) и прямую $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{3}$.



Решение. Точка M_0(1, -2, 0) лежит на прямой. Поэтому вектор $\vec{p}$ = $\overrightarrow{M_0M}$ = (-1, -1, -1) параллелен плоскости. Направляющий вектор прямой $\vec{q}$ = (2, -1, 3) также параллелен плоскости. Воспользуемся уравнением (1) плоскости $\begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}$ = 0 или -2(x -1) + (y +2) + 3z = 0, -2x + y + 3z + 4 =0.

Задача 54. Найти точку пересечения прямой $\frac{x+1}{-1}=\frac{y}{2}=\frac{z-2}{1}$ и плоскости x -2y + z + 1 = 0.

Решение. Запишем уравнения прямой в параметрическом виде $\begin{cases} x=-1+t \\ y=2t \\ z=2+t \end{cases}$ и решим совместно уравнения прямой и плоскости. Получим -1 +t -4t + 2 + t + 1 = 0 или -2t = -2, t = 1. Подставив в уравнение прямой, получим М(0, 2, 3).

Задача 55. Найти проекцию точки М(1, 1, -2) на плоскость

x -2y +2z -3 = 0.

Решение. Найдём уравнение прямой, проходящей через точку М перпендикулярно плоскости (задача 1), а затем точку пересечения полученной прямой и плоскости (задача 4).

Задача 56. Найти проекцию точки М(-1, 2, 3) на прямую $\frac{x+2}{-1}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{2}$.

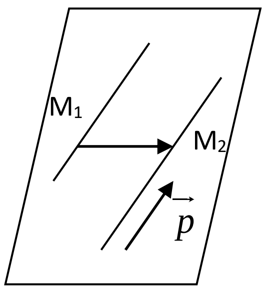
Задача 57. Найти точку, симметричную началу координат относительно плоскости x -2y +4z -21 = 0.

Решение. Найдём проекцию М начала координат на плоскость (задача 5). Точка М является серединой отрезка ОО¢, где О¢ - искомая точка.

Задача 58. Найти расстояние от точки М(2, -1, 1) до прямой $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z}{2}$

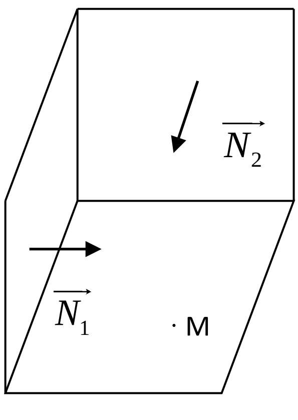
Решение. Найдём проекцию К точки М на прямую (задача 6). МК – искомое расстояние.

Задача 59. Написать уравнение плоскости, проходящей через две параллельные прямые $\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z+1}{-2}$ и $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z+2}{-2}$.



Решение. Точка $M_1(2, -1, -1)$ принадлежит первой прямой, точка $M_2(1, 0, -2)$ – второй, поэтому вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$ = (-1, 1, -1) параллелен плоскости. Направляющий вектор $\vec{p}$ = (2, -1, -2) прямых параллелен плоскости. Таким образом, искомая плоскость задана точкой M_1 и векторами $\overrightarrow{M_1M_2}$ и $\vec{p}$. Подставим в уравнение (1) плоскости, получим $\begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z+1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix}$ = 0 или –3(x -2) -4(y +1) –(z +1) = 0 или <u>3x +4y +z -1 = 0.</u>

Задача 60. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку M(2, -1, 1) перпендикулярно плоскостям 2x –y +z -7 = 0, x +y -z +4 = 0.



Решение. Векторы нормали данных плоскостей $\overrightarrow{N_1}$ = (2, -1, 1) и $\overrightarrow{N_2}$ = (1, 1, -1) параллельны искомой плоскости. Подставив координаты точки M и векторов $\overrightarrow{N_1}$ и $\overrightarrow{N_2}$ в уравнение (1) плоскости, получим искомое уравнение.

Задача 61. Написать уравнение прямой, проходящей через точку M(2, -1, 1) параллельно плоскостям 2x –y +z -4 = 0, x -2y +3z -7 = 0.

Решение. Векторы нормали $\overrightarrow{N_1}$ = (2, -1, 1) и $\overrightarrow{N_2}$ = (1, -2, 3) плоскостей перпендикулярны к прямой, поэтому вектор $\vec{p}$ = $\overrightarrow{N_1}$ ′ $\overrightarrow{N_2}$ параллелен прямой. Подставив координаты точки М и векторов $\overrightarrow{N_1}$ и $\overrightarrow{N_2}$ в уравнение (1) прямой, получим ответ.

Задача 62. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки А(2, -1, 1) и В(3, 4, -1) перпендикулярно плоскости x +y - z + 7 = 0.

Решение. Вектор $\overrightarrow{AB}$ = (1, 5, -2) и вектор нормали $\vec{N}$ данной плоскости параллельны искомой плоскости. Подставив в уравнение (1) плоскости, получим ответ.

Задача 63. Написать уравнение прямой, проходящей через точку М(2, -1, 1) параллельно прямой $\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z+1}{-2}$.

Задача 64. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку М(2, -1, 1) параллельно плоскости 2x –y +z -7 = 0.

Задача 65. Написать уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z+2}{-2}$ перпендикулярно плоскости x +y - z + 7 = 0.

Задача 66. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку М(2, -1, 1) параллельно прямым $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z}{2}$ и $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z+2}{-2}$.

4.4. Метрические задачи в пространстве

Пусть в пространстве заданы плоскость $\pi: Ax+By+Cz+D=0$ и точка $M_0(x_0,y_0,z_0)\notin\pi$. $\rho(M_0,\pi)=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$. (1) - *расстояние от точки M_0 до плоскости π.*

Угол между плоскостями

Пусть заданы плоскости $A_1x+B_1y+C_1z+Д_2=0$ и $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$.

$$\cos\alpha = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \quad (2)$$

Угол между прямой и плоскостью

Пусть в пространстве заданы плоскость $\pi: Ax + By + Cz + D = 0$ и прямая $\frac{x - x_0}{p_1} = \frac{y - y_0}{p_2} = \frac{z - z_0}{p_3}$, тогда угол между ними вычисляется по формуле

$$\sin\varphi = \frac{|Ap_1 + Bp_2 + Cp_3|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\cdot\sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}} \quad (3)$$

Угол между прямыми

Даны две прямые $\frac{x - x_0}{p_1} = \frac{y - y_0}{p_2} = \frac{z - z_0}{p_3}$ и $\frac{x - x_1}{q_1} = \frac{y - y_1}{q_2} = \frac{z - z_1}{q_3}$, тогда угол между ними вычисляется по формуле

$$\cos\varphi = \frac{|p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3|}{\sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}\cdot\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}} \quad (4)$$

Задача 67. Найти расстояние между параллельными плоскостями 2x –y +2z -4 = 0 и 2x –y +2z +5 = 0.

Решение. Возьмём на первой плоскости точку M, положив x =0, y = 0, тогда z = 2 и точка M(0, 0, 2). Расстояние между плоскостями равно расстоянию от точки M до второй плоскости. По формуле (1) получаем

r = 9 : 3 = 3.

Задача 68. Найти синус угла между прямой $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{2}$ и плоскостью x -2y +3z -7 = 0.

Решение. Направляющий вектор прямой $\vec{p}$ = (1, -1, 2), вектор нормали плоскости $\vec{N}$ = (1, -2, 3). Подставив в формулу (3), получаем sin j = 9/2$\sqrt{14}$.

Задача 69. Найти косинус угла между плоскостями x -2y +4z -21 = 0 и –x + 2y +2z -3 = 0.

Решение. Подставим в формулу (2), получим cosj = 4/3$\sqrt{21}$.

Задача 70. Найти косинус угла между прямыми $\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z+1}{-2}$ и $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z}{2}$.

Решение. Подставим данные в формулу (4), получим cos j= 1/3$\sqrt{6}$.