

## 2. Линейная множественная регрессия

### Краткая теоретическая справка по теме

Для оценки параметров уравнения линейной множественной регрессии

$$y = a + b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_px_p \quad (2.1)$$

применяют метод наименьших квадратов – строится система нормальных уравнений, решение которой позволяет получить оценки параметров регрессии:

$$\begin{cases} \sum y = na + b_1 \sum x_1 + b_2 \sum x_2 + \dots + b_p \sum x_p, \\ \sum yx_1 = a \sum x_1 + b_1 \sum x_1^2 + b_2 \sum x_2x_1 + \dots + b_p \sum x_px_1, \\ \dots \\ \sum yx_p = a \sum x_p + b_1 \sum x_1x_p + b_2 \sum x_2x_p + \dots + b_p \sum x_p^2. \end{cases} \quad (2.2)$$

Другой вид уравнения множественной регрессии – уравнение регрессии в стандартизованном масштабе:

$$t_y = \beta_1 t_{x_1} + \beta_2 t_{x_2} + \dots + \beta_p t_{x_p}, \quad (2.3)$$

где  $t_y = \frac{y - \bar{y}}{\sigma_y}$ ,  $t_{x_i} = \frac{x_i - \bar{x}_i}{\sigma_{x_i}}$  – стандартизированные переменные;

$\beta_i$  – стандартизированные коэффициенты регрессии.

К уравнению множественной регрессии в стандартизованном масштабе применим МНК, что приводит к решению системы уравнений:

$$\begin{cases} r_{yx_1} = \beta_1 + \beta_2 r_{x_2x_1} + \beta_3 r_{x_3x_1} + \dots + \beta_p r_{x_px_1}, \\ r_{yx_2} = \beta_1 r_{x_1x_2} + \beta_2 + \beta_3 r_{x_3x_2} + \dots + \beta_p r_{x_px_2}, \\ \dots \\ r_{yx_p} = \beta_1 r_{x_1x_p} + \beta_2 r_{x_2x_p} + \beta_3 r_{x_3x_p} + \dots + \beta_p. \end{cases} \quad (2.4)$$

Для двухфакторной модели линейной регрессии  $t_y = \beta_1 t_{x_1} + \beta_2 t_{x_2}$  расчет  $\beta$ -коэффициентов можно выполнить по формулам (следуют из решения системы (2.4)):

$$\beta_1 = \frac{r_{yx_1} - r_{yx_2} r_{x_1x_2}}{1 - r_{x_1x_2}^2}, \quad \beta_2 = \frac{r_{yx_2} - r_{yx_1} r_{x_1x_2}}{1 - r_{x_1x_2}^2} \quad (2.5)$$

Связь коэффициентов множественной регрессии  $b_i$  со стандартизованными коэффициентами  $\beta_i$  описывается соотношением:

$$b_i = \beta_i \frac{\sigma_y}{\sigma_{x_i}}, \quad \beta_i = b_i \frac{\sigma_{x_i}}{\sigma_y}. \quad (2.6)$$

При этом:  $a = \bar{y} - b_1 \bar{x}_1 - b_2 \bar{x}_2$ .

Тесноту совместного влияния факторов на результат оценивает коэффициент множественной корреляции, который можно определить по формуле:

$$R_{yx_1x_2\dots x_p} = \sqrt{\sum \beta_i r_{yx_i}}, \quad (2.7)$$

где  $\beta_i$  – стандартизированные коэффициенты регрессии,

$r_{yx_i}$  – парные коэффициенты корреляции между переменными  $y$  и  $x_i$ .

Качество построенной модели в целом оценивает коэффициент (индекс) детерминации. Коэффициент множественной детерминации рассчитывается как квадрат индекса множественной корреляции:

$$R_{yx_1x_2\dots x_p}^2. \quad (2.8)$$

Частные коэффициенты корреляции характеризуют тесноту связи между результатом и соответствующим фактором при устранении влияния (при закреплении их влияния на постоянном уровне) других факторов, включенных в уравнение регрессии. Для двухфакторной модели их можно определить по формулам:

$$r_{yx_1 \cdot x_2} = \frac{r_{yx_1} - r_{yx_2} \cdot r_{x_1x_2}}{\sqrt{(1-r_{yx_2}^2)(1-r_{x_1x_2}^2)}}; \quad r_{yx_2 \cdot x_1} = \frac{r_{yx_2} - r_{yx_1} \cdot r_{x_1x_2}}{\sqrt{(1-r_{yx_1}^2)(1-r_{x_1x_2}^2)}}; \quad (2.9)$$

$$r_{x_1x_2 \cdot y} = \frac{r_{x_1x_2} - r_{yx_1} \cdot r_{yx_2}}{\sqrt{(1-r_{yx_1}^2)(1-r_{yx_2}^2)}}.$$

При построении уравнения множественной регрессии может возникнуть проблема мультиколлинеарности факторов (тесная линейная зависимость более двух факторов). Считается, что две переменные явно коллинеарны, если  $r_{x_i x_j} > 0,7$ .

Статистическая значимость уравнения множественной регрессии в целом оценивается с помощью общего F-критерия Фишера:

$$F = \frac{R_{yx_1x_2\dots x_p}^2}{1 - R_{yx_1x_2\dots x_p}^2} \cdot \frac{n - m - 1}{m}, \quad (2.10)$$

где  $m$  – число факторов в линейном уравнении регрессии;  
 $n$  – число наблюдений.

Вывод о статистической значимости уравнения множественной регрессии в целом и коэффициента множественной детерминации можно сделать, если наблюдаемое значение критерия больше табличного, найденного для заданного уровня значимости (например,  $\alpha = 0,05$ ) и степенях свободы  $k_1 = m$ ,  $k_2 = n - m - 1$ .

Частный F-критерий оценивает статистическую значимость присутствия каждого из факторов в уравнении множественной регрессии. Для двухфакторной модели  $F_{x_1}$  оценивает целесообразность включения в уравнение фактора  $x_1$  после того, как в него был включен фактор  $x_2$ ;  $F_{x_2}$

оценивает целесообразность включения в уравнение фактора  $x_2$  после того, как в него был включен фактор  $x_1$ :

$$F_{x_1} = \frac{R_{yx_1x_2}^2 - r_{yx_2}^2}{1 - R_{yx_1x_2}^2} \cdot \frac{n - m - 1}{1}, \quad F_{x_2} = \frac{R_{yx_1x_2}^2 - r_{yx_1}^2}{1 - R_{yx_1x_2}^2} \cdot \frac{n - m - 1}{1}, \quad (2.11)$$

где  $m$  – число факторов в линейном уравнении регрессии;  
 $n$  – число наблюдений.

Фактическое значение частного F-критерия сравнивается с табличным при 5%-ном или 1%-ном уровне значимости и числе степеней свободы:  $k_1 = 1$ ,  $k_2 = n - m - 1$ . Если фактическое значение превышает табличное, то дополнительное включение соответствующего фактора в модель статистически оправдано, в противном случае фактор в модель включать нецелесообразно.

### Решение типового примера

#### Задание

Имеются данные<sup>1</sup> о стоимости автомобилей ВАЗ 2110 (результативная переменная  $y$ , тыс. руб.) в Краснодарском крае, о годе выпуска (возраст автомобиля – фактор  $x_1$ , лет) и о пробеге (фактор  $x_2$ , тыс. км):

№	Возраст, лет	Пробег, тыс. км	Цена, тыс. руб.
1	5	50	167
2	5	70	175
3	8	110	146
4	8	120	143
5	10	175	120
6	4	62	220
7	5	87,5	150
8	5	84	172
9	7	77	170
10	4	83	190
11	4	65	210
12	8	120	143
13	6	88	167
14	7	89	150
15	4	83	195

Требуется:

1) Найти уравнение линейной множественной регрессии в стандартизированной ( $t_y = \beta_1 t_{x_1} + \beta_2 t_{x_2}$ ) и естественной форме ( $y = a + b_1 x_1 + b_2 x_2$ ).

<sup>1</sup> Источник: поисковая система Яндекс, информация о продаже подержанных автомобилей, 2010 г.

2) Найти коэффициенты множественной и частной корреляции, множественной детерминации; дать их характеристику.

3) Рассчитать общий и частные  $F$ -критерии Фишера; оценить статистическую надежность уравнения регрессии и коэффициента множественной детерминации; оценить целесообразность включения в уравнение множественной регрессии фактора  $x_1$  после фактора  $x_2$  и целесообразность включения фактора  $x_2$  после фактора  $x_1$ .

4) При необходимости найти уравнение парной регрессии (исключив статистически незначимый фактор).

### Решение

1. Рассчитаем параметры уравнения линейной множественной регрессии в стандартизированной форме  $t_y = \beta_1 t_{x_1} + \beta_2 t_{x_2}$  и естественной форме  $y = a + b_1 x_1 + b_2 x_2$  методом наименьших квадратов.

Составим расчетную таблицу.

Таблица 2.1

№	y	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	yx <sub>1</sub>	yx <sub>2</sub>	x <sub>1</sub> x <sub>2</sub>	y <sup>2</sup>	x <sub>1</sub> <sup>2</sup>	x <sub>2</sub> <sup>2</sup>
1	167	5	50	835	8350	250	27889	25	2500
2	175	5	70	875	12250	350	30625	25	4900
3	146	8	110	1168	16060	880	21316	64	12100
4	143	8	120	1144	17160	960	20449	64	14400
5	120	10	175	1200	21000	1750	14400	100	30625
6	220	4	62	880	13640	248	48400	16	3844
7	150	5	87,5	750	13125	437,5	22500	25	7656,25
8	172	5	84	860	14448	420	29584	25	7056
9	170	7	77	1190	13090	539	28900	49	5929
10	190	4	83	760	15770	332	36100	16	6889
11	210	4	65	840	13650	260	44100	16	4225
12	143	8	120	1144	17160	960	20449	64	14400
13	167	6	88	1002	14696	528	27889	36	7744
14	150	7	89	1050	13350	623	22500	49	7921
15	195	4	83	780	16185	332	38025	16	6889
<b>Сумма</b>	<b>2518</b>	<b>90</b>	<b>1363,5</b>	<b>14478</b>	<b>219934</b>	<b>8869,5</b>	<b>433126</b>	<b>590</b>	<b>137078,3</b>
<b>Среднее</b>	<b>167,87</b>	<b>6,00</b>	<b>90,90</b>	<b>965,20</b>	<b>14662,27</b>	<b>591,30</b>	<b>28875,07</b>	<b>39,33</b>	<b>9138,55</b>

Найдем средние квадратические отклонения переменных:

$$\sigma_y = \sqrt{y^2 - \bar{y}^2} = \sqrt{28875,07 - 167,87^2} = 26,38;$$

$$\sigma_{x_1} = \sqrt{x_1^2 - \bar{x}_1^2} = \sqrt{39,33 - 6,0^2} = 1,83;$$

$$\sigma_{x_2} = \sqrt{x_2^2 - \bar{x}_2^2} = \sqrt{9138,55 - 90,9^2} = 29,59.$$

Найдем коэффициенты парной корреляции:

$$r_{yx_1} = \frac{\text{cov}(y, x_1)}{\sigma_y \cdot \sigma_{x_1}} = \frac{y \cdot x_1 - \bar{y} \cdot \bar{x}_1}{\sigma_y \cdot \sigma_{x_1}} = \frac{965,2 - 167,87 \cdot 6,0}{26,38 \cdot 1,83} = -0,87;$$

$$r_{yx_2} = \frac{\text{cov}(y, x_2)}{\sigma_y \cdot \sigma_{x_2}} = \frac{\overline{y \cdot x_2} - \bar{y} \cdot \bar{x_2}}{\sigma_y \cdot \sigma_{x_2}} = \frac{14662,27 - 167,87 \cdot 90,9}{26,38 \cdot 29,59} = -0,76;$$

$$r_{x_1x_2} = \frac{\text{cov}(x_1, x_2)}{\sigma_{x_1} \cdot \sigma_{x_2}} = \frac{\overline{x_1 \cdot x_2} - \bar{x_1} \cdot \bar{x_2}}{\sigma_{x_1} \cdot \sigma_{x_2}} = \frac{591,3 - 6,0 \cdot 90,9}{1,83 \cdot 29,59} = 0,85.$$

Стандартизированные  $\beta$ -коэффициенты определим по формулам (2.5):

$$\beta_1 = \frac{r_{yx_1} - r_{yx_2} r_{x_1x_2}}{1 - r_{x_1x_2}^2} = \frac{-0,87 - (-0,76) \cdot 0,85}{1 - 0,85^2} = -0,8;$$

$$\beta_2 = \frac{r_{yx_2} - r_{yx_1} r_{x_1x_2}}{1 - r_{x_1x_2}^2} = \frac{-0,76 - (-0,87) \cdot 0,85}{1 - 0,85^2} = -0,09.$$

Таким образом, уравнение регрессии в стандартизированной форме имеет вид:  $t_y = -0,8t_{x_1} - 0,09t_{x_2}$ .

**Вывод:** Сравнение модулей значений стандартизированных коэффициентов регрессии ( $|\beta_1| = 0,8 > |\beta_2| = 0,09$ ) говорит о том, что на цену автомобиля возраст (фактор  $x_1$ ) оказывает значительно большее влияние, нежели пробег (фактор  $x_2$ ).

Рассчитаем естественные коэффициенты регрессии:

$$b_1 = \beta_1 \frac{\sigma_y}{\sigma_{x_1}} = -0,8 \cdot \frac{26,38}{1,83} = -11,56;$$

$$b_2 = \beta_2 \frac{\sigma_y}{\sigma_{x_2}} = -0,09 \cdot \frac{26,38}{29,59} = -0,08;$$

$$a = \bar{y} - b_1 \bar{x_1} - b_2 \bar{x_2} = 167,87 - (-11,56) \cdot 6,0 - (-0,08) \cdot 90,9 = 244,09.$$

Получаем уравнение линейной множественной (двухфакторной) регрессии в естественной форме:  $y = 244,09 - 11,56x_1 - 0,08x_2$ .

**Вывод:** с увеличением возраста машины на 1 год ее цена уменьшается в среднем на 11,56 тыс. рублей, а с увеличением пробега на 1 тыс. км цена уменьшается в среднем на 0,08 тыс. рублей (80 рублей).

2. Найдем коэффициенты множественной и частной корреляции, а также множественной детерминации.

Коэффициент множественной корреляции находится по формуле:

$$R_{yx_1x_2} = \sqrt{\beta_1 r_{yx_1} + \beta_2 r_{yx_2}} = \sqrt{-0,8 \cdot (-0,87) - 0,09 \cdot (-0,76)} = \sqrt{0,76} = 0,87.$$

$$R_{yx_1x_2}^2 = \sqrt{0,76}^2 = 0,76 - \text{коэффициент множественной детерминации.}$$

**Вывод:** величина коэффициента множественной корреляции показывает, что связь между  $y$ ,  $x_1$ ,  $x_2$  – высокая<sup>2</sup>, причем 76,3% вариации цены на автомобиль объясняется вариацией возраста машины и пробега.

<sup>2</sup> При качественной интерпретации коэффициента корреляции используется шкала Чеддока

Коэффициенты частной корреляции определяются через парные коэффициенты корреляции по формулам:

$$r_{y_{x_1} \cdot x_2} = \frac{r_{yx_1} - r_{yx_2} \cdot r_{x_1x_2}}{\sqrt{(1-r_{yx_2}^2)(1-r_{x_1x_2}^2)}} = \frac{-0,87 - (-0,76) \cdot 0,85}{\sqrt{(1-(-0,76)^2)(1-0,85^2)}} = -0,65;$$

$$r_{y_{x_2} \cdot x_1} = \frac{r_{yx_2} - r_{yx_1} \cdot r_{x_1x_2}}{\sqrt{(1-r_{yx_1}^2)(1-r_{x_1x_2}^2)}} = \frac{-0,76 - (-0,87) \cdot 0,85}{\sqrt{(1-(-0,87)^2)(1-0,85^2)}} = -0,09;$$

$$r_{x_1x_2 \cdot y} = \frac{r_{x_1x_2} - r_{yx_1} \cdot r_{yx_2}}{\sqrt{(1-r_{yx_1}^2)(1-r_{yx_2}^2)}} = \frac{0,85 - (-0,76) \cdot (-0,87)}{\sqrt{(1-(-0,76)^2)(1-(-0,87)^2)}} = 0,32.$$

*Вывод:* коэффициенты частной корреляции характеризуют тесноту связи между двумя переменными, исключив влияние третьей переменной. Значит, связь между ценой на ВАЗ 2110 и годом выпуска при исключении влияния величины пробега обратная и заметная; между ценой автомобиля и пробегом без учета возраста машины – обратная, но слабая; связь между факторами  $x_1$  и  $x_2$  – умеренная.

Сравним соответствующие коэффициенты парной и частной корреляции:  $r_{yx_1} = -0,87$ ,  $r_{yx_2} = -0,76$ ,  $r_{x_1x_2} = 0,85$ ;

$$r_{y_{x_1} \cdot x_2} = -0,65, r_{y_{x_2} \cdot x_1} = -0,09, r_{x_1x_2 \cdot y} = 0,32.$$

*Вывод:*

1) при закреплении фактора  $x_2$  на постоянном уровне влияние на  $y$  фактора  $x_1$  оказалось несколько менее сильным ( $-0,65$  против  $-0,87$ ), но все равно остается заметным;

2) при закреплении фактора  $x_1$  на постоянном уровне влияние на  $y$  фактора  $x_2$  стало весьма слабым ( $-0,09$  против  $-0,76$ );

3) межфакторная связь ( $r_{x_1x_2} = 0,85$ ) говорит о высокой коллинеарности факторов, причем исключив влияние резульативной переменной  $y$  эта связь становится умеренной.

3. Оценим значимость уравнения регрессии и коэффициента множественной детерминации с помощью F-критерия Фишера. Наблюдаемое значение критерия находится по формуле:

$$F_{набл} = \frac{R_{yx_1x_2}^2}{1 - R_{yx_1x_2}^2} \cdot \frac{n - m - 1}{m} = \frac{0,76}{1 - 0,76} \cdot \frac{15 - 2 - 1}{2} = 19,27.$$

Табличное значение критерия при уровне значимости  $\alpha = 0,05$  и  $k_1 = m = 2$ ,  $k_2 = n - m - 1 = 15 - 2 - 1 = 12$ :

$$F_{табл} = F(0,05; 2; 12) = 3,88.$$

*Вывод:* т.к.  $F_{табл} < F_{набл}$ , то с вероятностью  $1 - \alpha = 0,95$  делаем заключение о статистической значимости уравнения регрессии и коэффициента множественной детерминации, которые сформировались под неслучайным воздействием факторов  $x_1$  и  $x_2$ .

Оценим целесообразность включения в уравнение множественной регрессии фактора  $x_1$  после фактора  $x_2$  и целесообразность включения фактора  $x_2$  после фактора  $x_1$  с помощью частных F-критериев  $F_{x_1}$  и  $F_{x_2}$ .

$$F_{x_1 \text{ набл}} = \frac{R_{yx_1x_2}^2 - r_{yx_2}^2}{1 - R_{yx_1x_2}^2} \cdot \frac{n - m - 1}{1} = \frac{0,76 - (-0,76)^2}{1 - 0,76} \cdot \frac{15 - 2 - 1}{1} = 9,00;$$

$$F_{x_2 \text{ набл}} = \frac{R_{yx_1x_2}^2 - r_{yx_1}^2}{1 - R_{yx_1x_2}^2} \cdot \frac{n - m - 1}{1} = \frac{0,76 - (-0,87)^2}{1 - 0,76} \cdot \frac{15 - 2 - 1}{1} = 0,10.$$

Найдем табличные значения критерия на уровне значимости  $\alpha = 0,05$  и  $k_1 = 1$ ,  $k_2 = n - m - 1 = 15 - 2 - 1 = 12$ :  $F_{табл} = F(0,05; 1; 12) = 4,75$ .

*Вывод:* 1) Поскольку  $F_{x_1 \text{ набл}} > F_{табл}$ , то включение в модель фактора  $x_1$  (возраста автомобиля) после фактора  $x_2$  статистически оправдано и коэффициент  $b_1$  при факторе  $x_1$  статистически значим.

2) Поскольку  $F_{x_2 \text{ набл}} < F_{табл}$ , то нецелесообразно включать в модель фактор  $x_2$  (пробег) после фактора  $x_1$ . Это означает, что парная регрессия зависимости цены ВАЗ 2110 от возраста машины является достаточно статистически значимой, надежной и что нет необходимости улучшать ее, включая дополнительный фактор  $x_2$ .

Найдем уравнение парной регрессии  $y = a + bx_1$ , где  $y$  – цена автомобиля (тыс. руб),  $x_1$  – возраст машины (лет):

$$b = \frac{\text{cov}(x_1; y)}{\sigma_{x_1}^2} = \frac{\overline{x_1 \cdot y} - \overline{x_1} \cdot \overline{y}}{\sigma_{x_1}^2} = \frac{965,2 - 6 \cdot 167,87}{1,83^2} = -12,6;$$

$$a = \overline{y} - b \cdot \overline{x_1} = 167,87 - (-12,6) \cdot 6 = 243,47.$$

Получаем:  $y = 243,47 - 12,6x_1$ .

### **Задание для самостоятельной работы**

Имеются данные<sup>3</sup> о стоимости автомобилей (результативная переменная  $y$ , тыс. руб.) в Краснодарском крае, о годе выпуска (возраст автомобиля – фактор  $x_1$ , лет) и о пробеге (фактор  $x_2$ , тыс. км).

*Требуется:*

1) Найти уравнение линейной множественной регрессии в стандартизированной ( $t_y = \beta_1 t_{x_1} + \beta_2 t_{x_2}$ ) и естественной форме ( $y = a + b_1 x_1 + b_2 x_2$ ).

2) Найти коэффициенты множественной и частной корреляции, множественной детерминации; дать их характеристику.

3) Рассчитать общий и частные F-критерии Фишера; оценить статистическую надежность уравнения регрессии и коэффициента

<sup>3</sup> Источник: поисковая система Яндекс, информация о продаже подержанных автомобилей, 2010 г.

множественной детерминации; оценить целесообразность включения в уравнение множественной регрессии фактора  $x_1$  после фактора  $x_2$  и целесообразность включения фактора  $x_2$  после фактора  $x_1$ .

4) При необходимости найти уравнение парной регрессии (исключив статистически незначимый фактор).

## Приложение 2

### Статистические данные к теме «Линейная множественная регрессия»

№	Вариант 1 ВАЗ 2107			Вариант 2 ВАЗ 2107			Вариант 3 ВАЗ 2107		
	y	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	y	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	y	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>
1	55	14	100	62	10	85	90	7	100
2	80	11	150	45	16	90	70	6	107
3	55	14	195	65	10	130	45	16	90
4	83	8	118	72	9	88	80	6	120
5	86	8	77	55	17	62	80	6	60
6	107	7	100	60	6	64	85	6	96
7	85	7	100	90	7	73	97	6	59
8	50	14	180	70	7	63	70	6	115
9	75	7	79	85	6	115	70	9	110
10	50	17	90	70	8	80	50	6	117
11	95	7	100	73	7	98	68	11	71
12	40	14	184	75	9	110	60	9	90
13	100	6	76	82	8	90	90	8	136
14	40	18	83	48	17	68	82	7	83
15	60	12	100	75	7	130	50	16	170

№	Вариант 4 ВАЗ 2107			Вариант 5 ВАЗ 2107			Вариант 6 ВАЗ 2109		
	y	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	y	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	y	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>
1	60	14	70	32	13	75	150	5	110
2	60	11	150	85	7	75	135	8	115
3	87	8	60	75	10	90	130	9	118
4	90	14	70	90	14	70	85	5	150
5	75	10	130	60	11	75	145	7	94
6	100	6	59	100	7	70	130	6	110
7	67	9	180	100	6	76	90	11	100
8	80	8	115	100	6	60	110	9	120
9	45	13	75	48	7	138	150	5	110
10	50	15	138	32	13	75	165	6	93
11	100	7	70	73	6	75	107	10	105
12	90	7	65	85	7	150	117	8	79
13	65	10	91	80	10	80	143	5	87
14	55	14	100	45	14	85	100	10	130
15	80	6	70	100	6	76	135	8	80

№	Вариант 7 ВАЗ 2109			Вариант 8 ВАЗ 2109			Вариант 9 ВАЗ 2109		
	y	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	y	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	y	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>
1	105	9	105	55	17	181	96	11	88
2	140	8	160	90	9	180	100	12	160
3	130	7	85	100	7	153	140	8	160
4	80	12	160	143	6	112	110	9	173
5	120	10	184	56	19	100	135	10	140
6	135	6	92	107	11	140	70	19	192
7	103	10	160	105	10	85	81	11	61
8	100	11	98	115	8	130	105	9	95
9	130	7	90	55	16	150	60	11	80
10	140	8	150	161	6	88	83	18	87
11	110	7	95	65	14	100	65	13	175
12	130	6	103	83	11	88	90	9	120
13	80	16	85	117	7	65	90	17	190
14	155	5	71	55	14	100	80	12	112
15	110	11	98	70	15	160	70	15	100

№	Вариант 10 ВАЗ 2109			Вариант 11 ВАЗ 2110			Вариант 12 ВАЗ 2110		
	y	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	y	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	y	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>
1	130	7	120	175	5	70	255	3	70
2	135	8	105	146	8	110	170	5	120
3	95	17	103	120	10	175	220	4	100
4	102	9	120	220	4	62	107	12	100
5	43	15	180	172	5	84	135	10	110
6	110	14	100	170	7	77	125	7	85
7	139	6	85	190	4	83	107	11	102
8	95	13	70	80	10	65	138	10	170
9	70	16	137	143	8	120	175	5	150
10	70	18	165	167	6	88	130	9	110
11	107	10	75	150	7	89	100	11	130
12	97	11	100	195	4	83	218	5	104
13	140	9	120	131	8	108	170	6	100
14	43	15	180	175	4	110	135	9	125
15	110	8	60	150	9	90	120	11	168

№	Вариант 13 ВАЗ 2110			Вариант 14 ВАЗ 2110			Вариант 15 ВАЗ 2112		
	y	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	y	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	y	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>
1	130	9	100	120	11	168	175	4	78
2	195	4	71	165	7	90	270	3	62
3	105	12	80	135	10	160	160	8	140
4	118	11	179	120	9	55	235	3	64
5	120	9	103	95	12	150	200	5	84
6	146	8	100	160	8	100	200	4	110
7	165	6	130	120	12	95	150	8	82
8	110	11	180	140	9	150	180	5	100
9	140	8	95	135	10	120	200	4	110
10	195	4	71	170	6	167	203	5	94
11	165	7	95	110	13	160	145	9	145
12	123	10	120	100	11	130	160	7	100
13	180	4	91	140	9	160	140	8	119
14	130	10	160	135	10	98	165	7	100
15	98	13	150	190	5	155	220	3	99

№	Вариант 16 ВАЗ 2112			Вариант 17 ВАЗ 2112			Вариант 18 ВАЗ 2112		
	y	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	y	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	y	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>
1	175	5	90	175	6	80	150	8	110
2	160	8	80	140	8	115	115	6	80
3	130	10	136	145	8	110	140	10	105
4	215	4	70	225	4	65	137	8	106
5	170	7	107	165	5	98	210	2	67
6	155	8	111	200	5	80	160	7	136
7	250	3	120	170	6	77	180	9	100
8	187	5	80	190	4	70	210	5	80
9	220	3	51	130	10	140	195	5	120
10	140	8	130	240	3	60	130	9	107
11	196	5	64	175	5	95	180	7	110
12	168	6	80	197	5	75	150	9	105
13	170	5	62	240	3	70	235	3	62
14	140	8	195	185	6	80	150	7	105
15	200	5	84	190	5	110	227	2	53

№	Вариант 19 ВАЗ 2114			Вариант 20 ВАЗ 2114			Вариант 21 ВАЗ 2115		
	y	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	y	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	y	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>
1	175	3	70	175	5	140	155	6	140
2	222	2	56	190	3	74	150	7	116
3	105	5	70	170	5	63	180	4	100
4	190	3	68	203	2	60	179	3	65
5	150	6	72	160	6	130	167	3	38
6	130	5	103	190	3	74	180	6	77
7	155	6	130	176	5	140	172	5	75
8	175	5	78	180	3	83	160	6	90
9	160	4	110	169	6	87	200	4	35
10	170	5	60	170	4	70	150	7	118
11	125	6	79	155	5	110	165	4	40
12	155	4	100	205	3	65	165	6	90
13	200	3	70	150	5	65	125	7	89
14	177	4	65	157	6	79	130	9	95
15	165	5	77	165	4	66	115	10	132

№	Вариант 22 ВАЗ 2115			Вариант 23 ВАЗ Лада Калина			Вариант 24 ВАЗ 2106		
	y	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	y	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	y	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>
1	139	6	83	185	4	61	65	12	160
2	130	9	100	205	3	47	47	17	125
3	170	5	75	170	5	130	60	7	160
4	145	4	89	210	3	45	50	14	73
5	189	3	65	233	2	120	65	13	197
6	120	10	140	215	3	50	57	12	120
7	100	5	80	170	4	62	85	6	105
8	155	6	89	200	3	38	60	13	60
9	150	5	50	235	1	18	35	16	120
10	180	4	60	200	2	42	65	12	160
11	160	5	120	210	3	20	60	13	60
12	220	2	40	178	4	104	50	16	180
13	150	6	120	215	3	20	40	17	90
14	135	7	195	195	4	55	60	17	125
15	165	5	91	200	3	40	75	7	130

№	Вариант 25 ВАЗ 2111			Вариант 26 ВАЗ 2111			Вариант 27 ВАЗ 2108		
	y	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	y	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	y	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>
1	260	3	40	136	8	97	96	10	142
2	190	3	43	220	4	42	95	10	150
3	178	5	89	133	9	168	45	17	82
4	119	11	117	230	4	45	85	11	170
5	230	4	45	210	4	42	60	18	100
6	125	9	130	180	4	96	70	11	100
7	175	7	45	100	10	85	75	17	73
8	185	4	65	220	3	80	60	13	110
9	242	2	35	210	2	22	65	17	100
10	175	7	45	135	11	90	85	10	107
11	185	4	65	230	4	40	120	8	190
12	242	2	35	155	8	192	65	15	130
13	190	5	100	180	6	120	60	16	60
14	150	6	50	163	6	125	85	11	195
15	125	9	130	135	7	124	80	13	86

№	Вариант 28 Audi 100			Вариант 29 Audi 80			Вариант 30 Audi A4		
	y	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	y	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	y	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>
1	78	26	190	180	19	350	270	11	130
2	70	27	150	110	23	160	220	15	178
3	100	26	200	75	24	244	530	7	180
4	160	22	110	80	23	300	330	11	170
5	75	23	150	130	22	300	350	9	135
6	150	17	275	190	17	224	650	5	60
7	65	24	350	180	20	60	444	8	106
8	120	21	260	140	20	200	460	7	144
9	175	19	250	120	25	292	490	6	120
10	75	23	150	70	22	400	530	8	105
11	150	17	275	90	22	150	450	7	140
12	120	21	260	210	16	192	690	5	107
13	105	25	270	90	21	235	410	9	110
14	185	18	277	120	23	180	235	14	198
15	160	18	400	120	19	260	440	8	155

## Приложение 4

Таблица значений F-критерия Фишера при уровне значимости  $\alpha = 0,05$

$k_1 \backslash k_2$	1	2	3	4	5	6	8	12	24	$\infty$
1	161,5	199,5	215,7	224,6	230,2	233,9	238,9	243,9	249,0	254,3
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,37	19,41	19,45	19,50
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,84	8,74	8,64	8,53
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,04	5,91	5,77	5,63
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,82	4,68	4,53	4,36
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,15	4,00	3,84	3,67
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,73	3,57	3,41	3,23
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,44	3,28	3,12	2,93
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,23	3,07	2,90	2,71
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,07	2,91	2,74	2,54
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	2,95	2,79	2,61	2,40
12	4,75	3,88	3,49	3,26	3,11	3,00	2,85	2,69	2,50	2,30
13	4,67	3,80	3,41	3,18	3,02	2,92	2,77	2,60	2,42	2,21
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,70	2,53	2,35	2,13
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,64	2,48	2,29	2,07
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,59	2,42	2,24	2,01
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,55	2,38	2,19	1,96
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,51	2,34	2,15	1,92
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,48	2,31	2,11	1,88
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,45	2,28	2,08	1,84
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,42	2,25	2,05	1,81
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,40	2,23	2,03	1,78
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,38	2,20	2,00	1,76
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,36	2,18	1,98	1,73
25	4,24	3,38	2,99	2,76	2,60	2,49	2,34	2,16	1,96	1,71
26	4,22	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,32	2,15	1,95	1,69
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,30	2,13	1,93	1,67
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,44	2,29	2,12	1,91	1,65
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,54	2,43	2,28	2,10	1,90	1,64
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,27	2,09	1,89	1,62
35	4,12	3,26	2,87	2,64	2,48	2,37	2,22	2,04	1,83	1,57
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,18	2,00	1,79	1,51
45	4,06	3,21	2,81	2,58	2,42	2,31	2,15	1,97	1,76	1,48
50	4,03	3,18	2,79	2,56	2,40	2,29	2,13	1,95	1,74	1,44
60	4,00	3,15	2,76	2,52	2,37	2,25	2,10	1,92	1,70	1,39
70	3,98	3,13	2,74	2,50	2,35	2,23	2,07	1,89	1,67	1,35
80	3,96	3,11	2,72	2,49	2,33	2,21	2,06	1,88	1,65	1,31
90	3,95	3,10	2,71	2,47	2,32	2,20	2,04	1,86	1,64	1,28
100	3,94	3,09	2,70	2,46	2,30	2,19	2,03	1,85	1,63	1,26

## Приложение 5

### Критические значения $t$ -критерия Стьюдента при уровне значимости 0,10, 0,05, 0,01 (двухсторонний)

Число степеней свободы d.f.	$\alpha$			Число степеней свободы d.f.	$\alpha$		
	00,10	0,05	0,01		00,10	0,05	0,01
1	6,3138	12,706	63,657	18	1,7341	2,1009	2,8784
2	2,9200	4,3027	9,9248	19	1,7291	2,0930	2,8609
3	2,3534	3,1825	5,8409	20	1,7247	2,0860	2,8453
4	2,1318	2,7764	4,5041	21	1,7207	2,0796	2,8314
5	2,0150	2,5706	4,0321	22	1,7171	2,0739	2,8188
6	1,9432	2,4469	3,7074	23	1,7139	2,0687	2,8073
7	1,8946	2,3646	3,4995	24	1,7109	2,0639	2,7969
8	1,8595	2,3060	3,3554	25	1,7081	2,0595	2,7874
9	1,8331	2,2622	3,2498	26	1,7056	2,0555	2,7787
10	1,8125	2,2281	3,1693	27	1,7033	2,0518	2,7707
11	1,7959	2,2010	3,1058	28	1,7011	2,0484	2,7633
12	1,7823	2,1788	3,0545	29	1,6991	2,0452	2,7564
13	1,7709	2,1604	3,0123	30	1,6973	2,0423	2,7500
14	1,7613	2,1448	2,9768	40	1,6839	2,0211	2,7045
15	1,7530	2,1315	2,9467	60	1,6707	2,0003	2,6603
16	1,7459	2,1199	2,9208	120	1,6577	1,9799	2,6174
17	1,7396	2,1098	2,8982	$\infty$	1,6449	1,9600	2,5758