

Аддитивная модель временного ряда

Краткая теоретическая справка

Временным рядом (рядом динамики, динамическим рядом) называется упорядоченная во времени последовательность наблюдений:

$$y_1, y_2, \dots, y_t, \dots, y_n.$$

Всякий ряд динамики включает два обязательных элемента: *уровни ряда* – числовые значения того или иного статистического показателя и *время*, выраженное моментами или периодами, к которым относятся уровни.

Под *прогнозом* понимается научно обоснованное описание возможных состояний объектов в будущем, а также альтернативных путей и сроков достижения этого состояния.

Время (период) упреждения прогноза – отрезок времени от момента, для которого имеются последние статистические данные об изучаемом объекте, до момента, к которому относится прогноз.

По времени упреждения экономические прогнозы делятся на:

- оперативные (с периодом упреждения до одного месяца);
- краткосрочные (период упреждения – от одного, нескольких месяцев до года);
- среднесрочные (период упреждения более 1 года, но не превышает 5 лет);
- долгосрочные (с периодом упреждения более 5 лет).

Каждый уровень временного ряда формируется из *трендовой* (T), *циклической* (S) и *случайной* (E) компонент.

Аддитивная модель временного ряда: уровни ряда представлены в виде суммы указанных компонент $Y = T + S + E$.

Мультипликативная модель временного ряда: уровни ряда представлены в виде произведения указанных компонент $Y = T \cdot S \cdot E$.

Автокорреляция уровней ряда – это корреляционная зависимость между последовательными уровнями временного ряда:

$$r_i = \frac{\text{cov}(y_{t-i}, y_t)}{\sigma_{y_{t-i}} \sigma_{y_t}} = \frac{\overline{y_{t-i} \cdot y_t} - \overline{y_{t-i}} \cdot \overline{y_t}}{\sqrt{\overline{y_{t-i}^2} - \overline{y_{t-i}}^2} \cdot \sqrt{\overline{y_t^2} - \overline{y_t}^2}},$$

$$\text{где } \overline{y_t} = \frac{1}{n-i} \sum_{t=i+1}^n y_t, \quad \overline{y_{t-i}} = \frac{1}{n-i} \sum_{t=1}^{n-i} y_t.$$

Последовательность коэффициентов автокорреляции называется *автокорреляционной функцией* временного ряда, а график ее значений от величины лага порядка коэффициента автокорреляции) – *коррелограммой*.

Автокорреляция в остатках – корреляционная зависимость между значениями остатков ε_t за текущий и предыдущие моменты времени.

Построение аддитивной модели выполняется в следующей последовательности:

- 1) выравнивание исходного ряда скользящей средней;
- 2) оценка сезонной компоненты с учетом того, что для аддитивной модели сумма сезонных компонент за год (весь период) равна нулю;
- 3) удаление сезонных компонент из исходных уровней ряда $Y_t - S_t$;
- 4) оценка параметров тренда по полученным уровням ряда (без сезонной компоненты);
- 5) оценка качества полученной модели.

Решение типового примера (аддитивная модель)

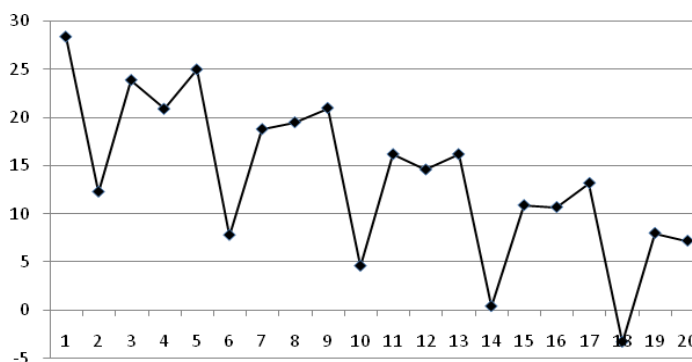
Задан временной ряд ежеквартальных значений переменной X:

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X	28,4	12,3	23,9	20,9	25,0	7,8	18,8	19,5	21,0	4,6
t	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
X	16,2	14,6	16,2	0,4	10,9	10,7	13,2	-3,3	8,0	7,2

1. Построить график временного ряда.
2. Рассчитать автокорреляционную функцию.
3. Оценить параметры линейного тренда и сезонной компоненты.
4. Сделать прогноз на 21, 22, 23, 24 кварталы по полученной модели.

Решение

1. Построим график временного ряда:



Визуальный анализ позволяет сделать вывод о наличии сезонных колебаний, с периодом 4, наличие убывающего тренда и о возможности использования аддитивной модели, т.к. амплитуда колебаний со временем не меняется.

Замечание: для построения графика временного ряда в среде MS Excel необходимо выделить диапазон данных и добавить диаграмму *График*.

2. Рассчитаем автокорреляционную функцию.

Коэффициент автокорреляции первого порядка r_1 :

$$r_1 = \frac{\text{cov}(y_{t-1}, y_t)}{\sigma_{y_{t-1}} \sigma_{y_t}} = \frac{\overline{y_{t-1} \cdot y_t} - \overline{y_{t-1}} \cdot \overline{y_t}}{\sqrt{\overline{y_{t-1}^2} - \overline{y_{t-1}}^2} \cdot \sqrt{\overline{y_t^2} - \overline{y_t}^2}}, \text{ где } \overline{y_t} = \frac{1}{n-1} \sum_{t=2}^n y_t, \overline{y_{t-1}} = \frac{1}{n-1} \sum_{t=1}^{n-1} y_t.$$

Заполним расчетную таблицу:

Таблица 3.1

t	y_t	y_{t-1}	$y_t \cdot y_{t-1}$	y_t^2	y_{t-1}^2
1.	28,4	-	-	-	-
2.	12,3	28,4	349,32	151,29	806,56
3.	23,9	12,3	293,97	571,21	151,29
4.	20,9	23,9	499,51	436,81	571,21
5.	25	20,9	522,5	625	436,81
6.	7,8	25	195	60,84	625
7.	18,8	7,8	146,64	353,44	60,84
8.	19,5	18,8	366,6	380,25	353,44
9.	21	19,5	409,5	441	380,25
10.	4,6	21	96,6	21,16	441
11.	16,2	4,6	74,52	262,44	21,16
12.	14,6	16,2	236,52	213,16	262,44
13.	16,2	14,6	236,52	262,44	213,16
14.	0,4	16,2	6,48	0,16	262,44
15.	10,9	0,4	4,36	118,81	0,16
16.	10,7	10,9	116,63	114,49	118,81
17.	13,2	10,7	141,24	174,24	114,49
18.	-3,3	13,2	-43,56	10,89	174,24
19.	8	-3,3	-26,4	64	10,89
20.	7,2	8	57,6	51,84	64
Среднее	13,05	14,16	193,87	227,02	266,75

Примечание: в столбце y_{t-1} находятся исходные уровни временного ряда, смещенные на одну строку вниз.

$$r_1 = \frac{193,87 - 13,05 \cdot 14,6}{\sqrt{227,02 - 13,05^2} \cdot \sqrt{266,75 - 14,16^2}} = 0,148$$

Аналогично, можно рассчитать остальные коэффициенты автокорреляции, получаем автокорреляционную функцию:

$$r_1 = 0,148; r_2 = 0,377; r_3 = 0,122; r_4 = 0,991;$$

$$r_5 = -0,021; r_6 = 0,251; r_7 = -0,029; r_8 = 0,996.$$

Значения коэффициентов автокорреляции подтверждают гипотезу о наличии сезонных колебаний с периодом 4, т.к. наибольшее значение имеют r_4 и r_8 .

Замечание: Для последовательного расчета значений автокорреляционной функции в MS Excel целесообразно использовать функцию КОРРЕЛ(массив1;массив2). Так, если уровни исходного временного ряда располагаются в ячейках A1:A20, то для расчета коэффициентов автокорреляции можно вводить функции:

$$r_1 := \text{КОРРЕЛ}(A1:A19;A2:A20);$$

$$r_2 := \text{КОРРЕЛ}(A1:A18;A3:A20);$$

$$r_3 := \text{КОРРЕЛ}(A1:A17;A4:A20);$$

$$r_4 := \text{КОРРЕЛ}(A1:A16;A5:A20).$$

3. Проведем оценку тренда и сезонной компоненты временного ряда.

Результаты расчета коэффициентов автокорреляции показали, что данный временной ряд содержит сезонные колебания периодичностью 4.

Для выделения сезонной компоненты проведем выравнивание исходных уровней ряда методом скользящей средней. Заполним расчетную таблицу:

Таблица 3.2

t	y_t	Скользящая средняя за 4 квартала	Центрированная скользящая средняя	Оценка сезонной компоненты
1	28,4	-	-	-
2	12,3	21,38	-	-
3	23,9	20,53	20,95	2,95
4	20,9	19,40	19,96	0,94
5	25	18,13	18,76	6,24
6	7,8	17,78	17,95	-10,15
7	18,8	16,78	17,28	1,53
8	19,5	15,98	16,38	3,13
9	21	15,33	15,65	5,35
10	4,6	14,10	14,71	-10,11
11	16,2	12,90	13,50	2,70
12	14,6	11,85	12,38	2,23
13	16,2	10,53	11,19	5,01
14	0,4	9,55	10,04	-9,64
15	10,9	8,80	9,18	1,73
16	10,7	7,88	8,34	2,36
17	13,2	7,15	7,51	5,69
18	-3,3	6,28	6,71	-10,01
19	8	-	-	-
20	7,2	-	-	-

В столбце 3 рассчитаны средние значения четырех последовательных уровней ряда столбца 2:

- во второй строке: $21,38 = \frac{28,4 + 12,3 + 23,9 + 20,9}{4}$;
- в третьей строке: $20,53 = \frac{12,3 + 23,9 + 20,9 + 25}{4}$;
- в четвертой строке: $19,40 = \frac{23,9 + 20,9 + 25 + 7,8}{4}$ и т.д.

В столбце 4 рассчитаны средние значения двух последовательных средних из столбца 3:

- в третьей строке: $20,95 = \frac{21,38 + 20,53}{2}$;
- в четвертой строке: $19,96 = \frac{20,53 + 19,4}{2}$ и т.д.

В столбце 2 находятся исходные уровни ряда, а в столбце 4 соответствующие уровни, но без сезонного отклонения. Поэтому оценить

сезонную компоненту можно разностью между соответствующими исходными и выровненными уровнями: в столбце 5 рассчитаны разности значений столбца 2 и столбца 4:

- в третьей строке: $23,9 - 20,95 = 2,95$;
- в четвертой строке: $20,9 - 19,96 = 0,94$ и т.д.

Таким образом, получили следующие оценки:

S_3 : 2,95; 1,53; 2,7; 1,73.

S_4 : 0,94; 3,13; 2,23; 2,36.

S_1 : 6,24; 5,35; 5,01; 5,69.

S_2 : -10,15; -10,11; -9,64; -10,01.

Будем считать, что сезонная компонента для каждого квартала является константой, причем за все четыре квартала суммарное воздействие сезонных компонент равно нулю: $S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = 0$.

Найдем средние значения сезонных компонент и рассчитаем корректирующий коэффициент:

	Среднее значение	Корректирующий коэффициент	Окончательное значение сезонной компоненты
S_3	2,23	-0,00469	2,23
S_4	2,16		2,17
S_1	5,57		5,58
S_2	-9,98		-9,97

Корректирующий коэффициент рассчитан следующим образом:

$$k = \frac{S_1 + S_2 + S_3 + S_4}{4} = \frac{2,23 + 2,16 + 5,57 - 9,98}{4} = -0,00469.$$

Корректирующий коэффициент вычли из среднего значения сезонной компоненты и получили окончательные значения:

$$S_1 = 5,58; S_2 = -9,97; S_3 = 2,23; S_4 = 2,17.$$

Следующий шаг построения модели – оценка тренда. Для этого вычтем из исходных уровней временного ряда y_t сезонные компоненты и проведем аналитическое выравнивание ряда – методом наименьших квадратов (МНК) найдем оценки параметров линейного тренда $y = a + bt$.

Оформим расчеты следующим образом:

Таблица 3.3

t	y_t	S	$y_t - S$	$T = a + bt$	$\hat{y} = T + S$	$E = y_t - \hat{y}$	E^2	$(y_t - \bar{y}_t)^2$
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	28,4	5,58	22,82	22,93	28,51	-0,11	0,01	212,72
2	12,3	-9,97	22,27	21,97	12,00	0,30	0,09	2,30
3	23,9	2,23	21,67	21,01	23,24	0,66	0,43	101,71
4	20,9	2,17	18,73	20,05	22,22	-1,32	1,74	50,20
5	25	5,58	19,42	19,09	24,67	0,33	0,11	125,10
6	7,8	-9,97	17,77	18,13	8,16	-0,36	0,13	36,18
7	18,8	2,23	16,57	17,17	19,40	-0,60	0,36	24,85

1	2	3	4	5	6	7	8	9
8	19,5	2,17	17,33	16,21	18,38	1,12	1,25	32,32
9	21	5,58	15,42	15,25	20,83	0,17	0,03	51,62
10	4,6	-9,97	14,57	14,29	4,32	0,28	0,08	84,92
11	16,2	2,23	13,97	13,34	15,56	0,64	0,40	5,69
12	14,6	2,17	12,43	12,38	14,54	0,06	0,00	0,62
13	16,2	5,58	10,62	11,42	16,99	-0,79	0,63	5,69
14	0,4	-9,97	10,37	10,46	0,48	-0,08	0,01	179,96
15	10,9	2,23	8,67	9,50	11,73	-0,83	0,68	8,50
16	10,7	2,17	8,53	8,54	10,70	0,00	0,00	9,70
17	13,2	5,58	7,62	7,58	13,15	0,05	0,00	0,38
18	-3,3	-9,97	6,67	6,62	-3,35	0,05	0,00	292,92
19	8	2,23	5,77	5,66	7,89	0,11	0,01	33,81
20	7,2	2,17	5,03	4,70	6,87	0,33	0,11	43,76
Сумма							6,09	1302,95
Среднее	13,82							

Столбец 3 заполняется последовательными значениями S_1, S_2, S_3, S_4 .

В столбце 4 находится разность исходных уровней ряда (столбец 2) и соответствующей сезонной компоненты S_1, S_2, S_3, S_4 (столбец 3). Полученные выровненные уровни ряда позволяют оценить параметры линейного тренда $y = a + bt$. Сделаем это двумя способами: 1) по формулам решения системы нормальных уравнений: $b = \frac{\bar{Y} \cdot \bar{t} - \bar{Y} \cdot \bar{t}}{\bar{t}^2 - \bar{t}^2}$, $a = \bar{Y} - b \cdot \bar{t}^1$; 2) с помощью функции ЛИНЕЙН в MS Excel, которая рассчитывает параметры уравнения линейной регрессии.

1) Заполним расчетную таблицу для оценки параметров $y = a + bt$:

Таблица 3.4

	t	$Y = y_t - S$	$Y \cdot t$	t^2
	1	22,82	22,82	1
	2	22,27	44,55	4
	3	21,67	65,01	9
	4	18,73	74,93	16
	5	19,42	97,12	25
	6	17,77	106,64	36
	7	16,57	115,99	49
	8	17,33	138,66	64
	9	15,42	138,81	81
	10	14,57	145,73	100
	11	13,97	153,67	121
	12	12,43	149,19	144
	13	10,62	138,10	169
	14	10,37	145,23	196

¹ Подробно алгоритм оценки параметров парной линейной регрессии приводится в соответствующей теме пособия.

	t	$Y = y_t - S$	$Y \cdot t$	t^2
	15	8,67	130,05	225
	16	8,53	136,53	256
	17	7,62	129,60	289
	18	6,67	120,12	324
	19	5,77	109,64	361
	20	5,03	100,66	400
Среднее	10,5	13,82	113,15	143,5

Получаем параметры линейного тренда:

$$b = \frac{\bar{Y} \cdot \bar{t} - \bar{Y} \cdot \bar{t}}{\bar{t}^2 - \bar{t}^2} = \frac{113,15 - 13,82 \cdot 10,5}{143,5 - 10,5^2} = -0,96;$$

$$a = \bar{Y} - b \cdot \bar{t} = 13,82 + 0,96 \cdot 10,5 = 23,89.$$

Таким образом, уравнение тренда имеет вид: $y = 23,89 - 0,96t^2$.

2) Также можно воспользоваться средствами MS Excel, в частности, функцией ЛИНЕЙН, которая проводит оценку методом наименьших квадратов (МНК) параметров уравнения линейной парной (множественной) регрессии.

Синтаксис: ЛИНЕЙН(известные_значения_y; известные_значения_x; конст; статистика).

Аргументы:

- *известные_значения_y*: множество значений результативного признака Y ;
- *известные_значения_x*: множество значений факторных признаков X_i (необязательный аргумент); если этот аргумент опущен, то предполагается, что это массив $\{1; 2; 3; \dots\}$ такого же размера, как и аргумент *известные_значения_y*;
- *конст*: логическое значение, которое указывает, требуется ли, чтобы свободный член a_0 был равен 0 (необязательный аргумент);
- *статистика*: логическое значение, которое указывает, требуется ли вернуть дополнительную статистику по регрессии (необязательный аргумент).

Результаты функции выводятся в диапазон ячеек 5x2 (5 строк, 2 столбца) в следующем виде:

Значение параметра b	Значение параметра a
Стандартное отклонение b	Стандартное отклонение a
Коэффициент детерминации R^2	Стандартное отклонение y
F-статистика	Число степеней свободы
Регрессионная сумма квадратов	Остаточная сумма квадратов

Если аргумент *статистика* = 0 (или пустой), то достаточно диапазона 1x2 (будут получены только оценки параметров регрессии). После ввода функции в ячейку необходимо выделить соответствующий диапазон (верхняя левая ячейка содержит введенную функцию), нажать F2, а затем комбинацию CTRL+SHIFT+ENTER.

² Наиболее простым способом получения уравнения тренда в табличном процессоре MS Excel является построение графика ряда и добавление линии тренда с отображением его уравнения

Если считать, что уровни ряда с исключенной сезонной компонентой $Y = y_t - S$ находятся в диапазоне ячеек D2:B21, то можно ввести функцию ЛИНЕЙН в следующем виде: =ЛИНЕЙН(D2:B21;;1;1). Получаем:

$b =$	-0,96	$a =$	23,89
$\sigma_b =$	0,02	$\sigma_a =$	0,27
$R^2 =$	0,99	$\sigma_y =$	0,58
$F_{\text{набл}} =$	1809,02	$df =$	18,00
$RSS =$	612,26	$ESS =$	6,09

Таким образом, получили уравнение тренда $y = 23,89 - 0,96t$. Большое значение коэффициента детерминации $R^2 = 0,99$ говорит о хорошем качестве полученного уравнения, другие статистики подтверждают этот вывод.

Вернемся к расчетной таблице 3.3.

Столбец 5 в ней рассчитывается по полученному уравнению тренда:

при $t = 1$: $y = 23,89 - 0,96 \cdot 1 = 22,93$;

при $t = 2$: $y = 23,89 - 0,96 \cdot 2 = 21,97$;

при $t = 3$: $y = 23,89 - 0,96 \cdot 3 = 21,01$ и т.д.

В столбце 6 рассчитаны теоретические (смоделированные, объясненные) значения уровней ряда, как сумма сезонной и трендовой компонент $\hat{y} = T + S$ (сумма значений столбца 3 и столбца 5).

В столбце 7 найдем значения случайной компоненты $E = y_t - T - S$ (разность значений столбца 2 и столбца 6). Таким образом, определение компонент аддитивной модели ряда можно считать завершенной.

Проведем оценку качества полученной модели. Найдем отношение остаточной суммы квадратов отклонений исходных уровней ряда от соответствующих теоретических значений $\sum E^2$ к общей сумме квадратов отклонений исходных уровней ряда от среднего значения $\sum (y_t - \bar{y}_t)^2$ (столбец 8 и столбец 9) расчетной таблицы 3.3. Т.к.

$\frac{\sum E^2}{\sum (y_t - \bar{y}_t)^2} = \frac{6,09}{1302,95} = 0,005$, т.е. 0,5%, то аддитивная модель объясняет 99,5% общей вариации уровней данного временного ряда.

4. Сделаем прогноз на 21, 22, 23, 24 кварталы по полученной модели.

при $t = 21$: $\hat{y} = S_1 + T_{21} = 5,58 + (23,89 - 0,96 \cdot 21) = 9,31$;

при $t = 22$: $\hat{y} = S_2 + T_{22} = -9,97 + (23,89 - 0,96 \cdot 22) = -7,2$;

при $t = 23$: $\hat{y} = S_3 + T_{23} = 2,23 + (23,89 - 0,96 \cdot 23) = 4,04$;

при $t = 24$: $\hat{y} = S_4 + T_{24} = 2,17 + (23,89 - 0,96 \cdot 24) = 3,02$;

Ответ:

1) Автокорреляционная функция:

$$r_1 = 0,148; r_2 = 0,377; r_3 = 0,122; r_4 = 0,991;$$

$$r_5 = -0,021; r_6 = 0,251; r_7 = -0,029; r_8 = 0,996.$$

2) Сезонная компонента: $S_1 = 5,58$; $S_2 = -9,97$; $S_3 = 2,23$; $S_4 = 2,17$.

3) Уравнение тренда: $y = 23,89 - 0,96t$.

4) Прогнозные значения: $\hat{y}_{21} = 9,31$; $\hat{y}_{22} = -7,2$; $\hat{y}_{23} = 4,04$; $\hat{y}_{24} = 3,02$.

Задание для самостоятельной работы

Имеются поквартальные значения некоторого экономического показателя (приложение №3). Требуется:

1. Построить график временного ряда³.
2. Получить аддитивную модель ряда:
 - оценить сезонную компоненту (S_1, S_2, S_3, S_4);
 - оценить параметры линейного тренда $y = a + bt$, исключив из исходных уровней ряда сезонную компоненту.
3. Сделать прогноз на 17, 18, 19, 20 кварталы по полученной модели.

³ График целесообразно построить как диаграмму в MS Excel

Приложение

Временные ряды заданы по вариантам

	Варианты									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
t	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y
1	6,1	3,6	5,2	4,9	5,4	5,2	4,2	4,9	4,2	3,1
2	2,8	2,1	2,9	2,8	2,6	2,8	1,6	1,9	2,0	1,4
3	8,4	7,5	8,7	8,6	8,8	8,7	8,2	8,0	8,4	8,6
4	0,1	0,3	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,4
5	8,1	8,1	8,5	7,9	7,9	8,2	8,5	7,9	8,4	8,9
6	5,6	6,3	5,6	5,2	5,2	5,4	6,1	5,3	6,3	7,4
7	11,0	13,1	10,8	11,3	10,4	11,8	12,7	10,6	12,4	13,3
8	2,8	4,9	2,9	2,3	2,5	3,0	4,2	2,7	4,0	5,5
9	10,8	13,6	10,0	10,1	9,6	10,8	12,3	9,9	12,0	13,5
10	8,1	11,7	8,2	8,0	7,7	7,7	10,5	8,2	10,1	12,4
11	14,2	17,1	13,8	12,8	13,4	14,0	16,5	13,7	16,1	18,4
12	4,9	9,9	5,0	5,3	4,6	5,5	8,8	5,6	8,3	11,3
13	12,7	18,4	13,0	12,6	12,4	13,0	17,3	12,7	16,5	18,9
14	10,4	15,9	10,7	10,2	10,1	10,6	15,0	10,9	13,9	17,8
15	16,6	22,7	16,3	15,9	15,7	15,8	21,3	16,0	20,1	23,5
16	7,9	15,0	8,0	7,2	7,6	7,8	13,5	7,7	12,2	16,1

	Варианты									
	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
t	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y
1	5,9	4,4	4,8	6,2	4,0	4,4	4,5	4,5	5,4	4,6
2	3,5	2,1	3,0	4,6	1,4	2,9	2,6	3,0	3,0	2,5
3	8,4	8,4	9,5	10,7	8,6	9,1	8,1	8,3	8,2	8,9
4	0,1	0,9	2,4	3,1	0,4	2,0	0,1	0,1	0,1	1,6
5	7,4	8,7	10,9	11,4	9,0	10,6	7,7	8,1	7,4	9,0
6	4,9	7,3	8,6	10,3	7,1	9,1	4,9	4,9	4,5	7,5
7	11,0	14,0	15,4	16,4	12,9	15,4	10,6	11,5	10,2	13,6
8	2,2	6,2	7,4	8,6	5,7	7,6	2,1	2,6	1,2	5,8
9	9,6	14,6	15,8	17,2	13,7	15,6	10,4	10,9	9,0	14,1
10	7,3	12,1	14,4	15,6	12,4	14,4	8,1	8,7	6,3	11,4
11	12,2	18,7	20,5	22,1	19,0	20,5	13,2	14,1	11,7	17,7
12	4,4	11,4	13,3	14,2	10,4	13,5	5,0	5,5	3,3	9,9
13	11,6	19,6	22,1	22,7	19,1	22,0	12,7	13,5	10,0	18,2
14	8,8	18,3	19,9	20,8	17,4	19,7	10,4	10,6	7,4	16,6
15	14,4	24,4	26,1	27,8	23,4	26,4	15,9	16,7	13,3	22,0
16	6,5	16,1	19,2	20,0	16,4	18,3	8,2	8,3	4,9	14,0

	Варианты									
	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
t	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y
1	6,1	4,3	6,5	4,1	4,3	5,4	4,8	4,6	6,1	5,2
2	4,6	2,1	3,1	2,4	3,4	2,4	2,6	2,5	3,5	3,6
3	11,7	7,8	8,1	7,8	10,1	8,6	8,8	8,8	8,6	9,2
4	3,8	0,9	0,1	0,1	2,3	0,1	0,1	0,1	0,1	1,5
5	12,3	8,5	7,1	7,6	10,2	7,2	7,8	8,3	7,4	9,9
6	10,7	6,6	3,6	6,0	8,9	5,3	6,2	6,1	4,8	8,8
7	17,1	13,4	9,1	12,1	15,5	10,4	11,4	11,4	9,7	14,9
8	10,0	4,8	0,6	3,9	7,7	2,4	3,4	3,1	1,4	7,8
9	18,2	13,6	7,8	11,2	16,1	9,8	10,9	11,2	8,4	15,8
10	16,9	11,3	4,5	10,0	14,1	7,0	9,1	8,8	5,9	14,1
11	23,3	18,2	10,2	15,1	20,7	13,2	14,7	15,0	11,6	20,4
12	15,4	9,7	1,6	7,2	12,8	5,1	6,3	6,5	2,6	13,1
13	24,0	18,5	8,2	15,5	21,8	12,1	14,7	14,5	10,3	22,1
14	22,8	15,9	5,5	13,1	19,7	9,9	11,8	11,8	7,1	20,0
15	29,6	22,6	10,6	18,6	26,1	15,9	17,7	17,7	12,5	26,3
16	22,1	15,2	1,8	10,7	18,8	7,0	10,3	9,5	4,2	18,4